

Exercice 1. Soit E un espace euclidien et soient f, g deux endomorphismes de E tels que, dans une base orthonormée de E , la matrice A de f soit symétrique et la matrice B de g soit antisymétrique.

1. Montrer que, pour tout x et tout $y \in E$, $\langle f(x)|y \rangle = \langle x|f(y) \rangle$ et que $\langle g(x)|y \rangle = -\langle x|g(y) \rangle$.
2. On suppose de plus que f et g commutent.

Montrer que, pour tout $x \in E$, $\langle f(x)|g(x) \rangle = 0$ puis que $\|f(x) - g(x)\| = \|f(x) + g(x)\|$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien et u un vecteur unitaire de E . Montrer que l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x - 2 \langle x|u \rangle u \end{aligned}$$

est une isométrie vectorielle. Laquelle ?

Exercice 3.

1. Vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \text{tr}(AB) \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que dans cet espace euclidien de matrices carrées de taille n , l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 4. a, b, c étant trois nombres réels, on définit la matrice A par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $I_3 - A$ et $I_3 + A$ sont inversibles.
2. Montrer que $(I_3 - A)(I_3 + A)^{-1}$ est une matrice du groupe spécial orthogonal.

Exercice 5. a, b, c étant trois nombres réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, on définit la matrice M par

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Déterminer les sous espaces propres de M .
3. Quelle est la nature géométrique de M ?

Exercice 6. Montrer que $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice de réflexion, dont on précisera l'axe.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 3, et (a, b) est une famille libre de vecteurs unitaires de E . On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto \langle a|x \rangle a + \langle b|x \rangle b \end{aligned}$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme autoadjoint.
2. Déterminer les éléments propres de M .

Exercice 8. Soient E un espace euclidien, a un vecteur unitaire de E et k un nombre réel avec $k \neq -1$. On considère l'application g définie par

$$\begin{aligned} g : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto k \langle a|x \rangle a + x \end{aligned}$$

1. Vérifier que g est un endomorphisme autoadjoint.

2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle g a pour matrice $\begin{pmatrix} 1+k & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $g \in \mathcal{O}(E)$. A quoi correspondrait g ?

Exercice 9. E est un espace euclidien et soit u un endomorphisme de E .

1. (a) Démontrer le théorème de Riesz : pour $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle, il existe un unique $a \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \langle a|x \rangle$.

(b) Montrer qu'il existe un seul endomorphisme de E , note u^* tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x)|y \rangle = \langle x|u^*(y) \rangle.$$

u^* est l'endomorphisme **adjoint** de u .

2. Préciser $(u^*)^*$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u^* soit autoadjoint.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u^* soit une isométrie.

5. Montrer que $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$ et que $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$.

6. Si \mathcal{B} désigne une base orthonormée de E , montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^T$.