

**Exercice 1.** Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $x \mapsto \frac{nx^3}{1+nx^2}$ .

Préciser  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-3}^3 f_n(x) dx$ .

**Exercice 2.** Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0 ; 1]$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ n^2 \left( \frac{1}{n} - x \right) & \text{si } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $[0 ; 1]$  vers une fonction  $f$ .
2. Comparer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$  et  $\int_0^1 f(x) dx$ . Conclusions ?
3. Etudier la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur tout segment  $[a ; 1]$  où  $0 < a < 1$ .

**Exercice 3.** Etudier le mode de convergence sur  $]1 ; +\infty[$  de  $\sum f_n$  où  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ .

**Exercice 4.** Etudier le mode de convergence sur  $\mathbb{R}$  de  $\sum f_n$  où  $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1 + nx^8 + x^{24} + n^2}$ .

**Exercice 5.** Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$ .

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  à déterminer.
3. Montrer que la suite de fonctions  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .
4.  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 6.** On considère la série de fonctions  $\sum u_n$  définies sur  $\mathbb{R}^+$  par  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{xn^2 + n}$ .

1. Montrer que  $\sum u_n$  ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Montrer, par contre, qu'il y a convergence normale sur tout compact de  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 7.** Etudier, selon les valeurs du nombre réel  $\alpha$ , la convergence normale sur  $[0 ; 1]$  de la série de fonctions  $\sum n^\alpha x^n (1 - x)$ .

**Exercice 8.** En admettant que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + x^2}$ .

**Exercice 9.** Soit la fonction  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Reprendre tout ce qui précède avec la fonction  $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2}$ .
4. En admettant que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , montrer qu'au voisinage de  $+\infty$ , on a  $f(x) \sim \frac{\pi^2}{6x^2}$ .

**Exercice 10.** On considère la fonction suivante

$$\begin{aligned} f : ]0 ; \pi[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx) \quad . \end{aligned}$$

1. Vérifier que  $f$  est bien définie.
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0 ; \pi[$  et calculer la somme  $f'$  en utilisant les nombres complexes.
3. Montrer que, pour tout  $x \in ]0 ; \pi[$ ,  $f'(x) = -1$  et en déduire une écriture plus simple de  $f$ .