

**Exercice 1.** Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques.

1. On suppose que  $\sum u_n$  converge et que  $\sum v_n$  diverge. Que dire de  $\sum u_n + v_n$  ?
2. Même question lorsque les deux séries divergent.

**Exercice 2.** Montrer que les séries de termes généraux  $\frac{\cos(n)}{2^n}$  et  $\frac{\sin(n)}{2^n}$  sont convergentes et calculer leur somme.

**Exercice 3** (Série harmonique 1).

On considère la série  $\sum \frac{1}{n}$ , appelée **série harmonique**. On pose donc  $\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ .

1. Montrer que la suite  $(S_N)$  est croissante. On note  $l$  la limite de  $(S_N)$ .
2. Montrer que :  $\forall N \in \mathbb{N}^*, S_{2N} - S_N \geq \frac{1}{2}$ .
3. Supposer que  $l$  est un réel fini et aboutir à une contradiction. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 4** (Série harmonique 2).

On reprend les notations de l'exercice précédent.

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ .
2. En déduire que :  $\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N - 1 + \frac{1}{N+1} \leq \ln(N+1) \leq S_N$ .
3. En déduire un équivalent de  $(S_N)$ .

**Exercice 5.**

1. Calculer, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)}$ . On pourra montrer que  $\frac{1}{n(n+1)}$  peut s'écrire sous la forme  $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$  où  $a$  et  $b$  sont à déterminer.
2. En déduire la nature de la série  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ .

**Exercice 6.** Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs, convergente. Montrer que la série  $\sum u_n^2$  est convergente.

**Exercice 7.** En comparant à une série géométrique, montrer  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n2^n}$  est une série convergente.

**Exercice 8.** On considère la série  $\sum \frac{1}{n!}$ , ainsi que les suites  $S$  et  $S'$  définies par

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \text{ et } S'_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} + \frac{1}{N!}.$$

Montrer que  $S$  et  $S'$  sont deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire sur la série  $\sum \frac{1}{n!}$  ? D'après le cours, que vaut sa somme ?

**Exercice 9.** On considère la série  $S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  et  $(S_N)$  la suite de ses sommes partielles.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

2. En déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, 2(\sqrt{N+1} - 1) \leq S_N \leq 2\sqrt{N}.$$

3. Qu'en déduit-on sur la série  $S$  ?

**Exercice 10.** Via une comparaison série/intégrale, étudier la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln(n)}$ .

**Exercice 11.**

1. Soit  $f : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue et décroissante. Montrer que

$$\sum f(n) \text{ converge, si et seulement si, } \left( \int_0^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

2. Soit maintenant  $f : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue et décroissante telle que  $\sum f(n)$  diverge. On pose  $I_n = \int_0^n f(t) dt$ .

(a) Prouver que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n + f(n+1) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + I_n$ .

(b) En déduire la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et vérifier que  $I_n \sim \sum_{k=0}^n f(k)$ .

**Exercice 12.** Montrer que la série de terme général  $u_n = \frac{1}{(1+2+3+\dots+n)^\alpha}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

**Exercice 13.**

1. Soit  $\beta > 1$ . Avec une comparaison à une série de Riemann, montrer que la série de terme général  $\frac{\ln(n)}{n^\beta}$  est convergente.

2. Considérons la série de terme général  $u_n = e^{-n^\alpha}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(a) Montrer que pour  $\alpha \leq 0$ , cette série diverge.

(b) Pour  $\alpha > 0$ , la série est-elle convergente ?

(c) Donner une CNS de convergence pour cette série.

**Exercice 14.** On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

1. Montrer que la série de  $\sum_{n \geq 1} u_n$  de terme général  $u_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$  est convergente.

2. Est-elle absolument convergente ?

3. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$  de terme général  $v_n = u_n + \frac{1}{n}$  est divergente.

4. Vérifier cependant que  $u_n \sim v_n$ .

**Exercice 15.** Montrer que la série de  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^3}$  est convergente.

**Exercice 16.**

1. Donner le développement décimal illimité propre de  $\frac{7}{256}$  et de  $\frac{1}{12}$ .

2. Calculer  $0,9999\dots$  et  $3,56777777\dots$ .

**Exercice 17.** A l'aide d'une comparaison série/intégrale, étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))^2}$ . Pour l'intégrale, on pourra envisager le changement de variable  $y = \ln(\ln(t))$ .

**Exercice 18.** A l'aide d'une comparaison idoine, étudier la nature des séries de termes généraux  $u_n$  suivants :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n} \quad ; \quad u_n = e^{-3n} \quad ; \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

**Exercice 19.** A l'aide d'un produit de Cauchy, étudier les séries de termes généraux ci-après et calculer leur somme en cas de convergence. On admettra que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

$$a_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2(n-p)!} \quad ; \quad b_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2(n-p)^2}.$$

**Exercice 20.** Etudier, suivant les valeurs du nombre réel  $\alpha > 0$ , la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}$ .