

Exercice 1. Préciser les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ pour $a_n = \arctan(n)$ et pour $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2. On considère la série entière $\sum a_n z^n$ où a_n désigne le n -ième chiffre de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$: $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 2$, etc...

Préciser le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(2n)!}{n!n^n}$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$. Même question pour la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 4. Soit une série convergente $\sum a_n$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. En déduire que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels positifs, décroissante, de limite nulle. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est 1.
2. Si f désigne la somme de cette série entière, vérifier que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

Exercice 6. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière de la variable réelle $\sum \frac{1}{n+2} x^n$ (on pensera à multiplier la somme par x^2 si $x \neq 0$ et on reconnaîtra un développement en série entière connu).

Exercice 7. Montrer que la fonction $x \mapsto e^x \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ est développable en série entière sur $] -1 ; 1[$.

Exercice 8.

1. Décomposer la fraction $\frac{1}{X(2X+1)}$ en éléments simples.
2. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n(2n+1)}$.
3. A l'aide des développements en séries entières de $\ln(1-x)$ et de $\arctan(\sqrt{-x})$ sur $] -1 ; 0]$, calculer la somme de cette série entière sur $] -1 ; 0]$.

Exercice 9. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum n^2 z^n$ puis calculer sa somme (on pensera à utiliser la dérivée de la série géométrique).

Exercice 10. Développer en série entière les fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de convergence :

$$x \mapsto \sin^2(x) \cos(x) \quad ; \quad x \mapsto \ln(1+x+x^2).$$

Même question pour la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}$$

en remarquant que $f'(x) = \frac{1-x}{1-x^3}$ pour $x \neq 1$.

Exercice 11.

1. Montrer que pour $x \in] -1 ; 1[$, $\int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$.

2. Vérifier que, pour $x \neq -1$, on a $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+x} - \frac{1}{6} \times \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$.
3. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{n+1}}$.

Exercice 12. Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0.$$

1. Chercher les solutions développables en série entière de (E) .
2. Exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.