

**Exercice 1.** Donner les éléments propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2.** Donner les éléments propres et les sous-espaces propres des matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.**  $E$  désigne  $\mathcal{C}^1([0 ; 1], \mathbb{R})$ . On considère l'application  $\varphi$  qui, à toute fonction  $f$  de  $E$  associe la fonction  $\varphi(f)$  définie sur  $[0 ; 1]$  par  $\varphi(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ .

Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ , de spectre vide.

**Exercice 4.** Donner les éléments propres et les sous-espaces propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ . Cette matrice est-elle diagonalisable ?

**Exercice 5.** Réduire la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et en déduire  $A^k$  pour tout entier naturel  $k$ .

**Exercice 6.** A l'aide d'une réduction de matrice et du calcul de puissances de cette matrice, trouver toutes les suites numériques  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Même question pour la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont le terme général est défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n.$$

**Exercice 7.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $f^3 + f = 0$ .

1. Montrer que  $f$  ne peut avoir au plus qu'une seule valeur propre réelle.
2. En étudiant le degré du polynôme caractéristique de  $f$ , donner  $\text{Sp}(f) \cap \mathbb{R}$ .

**Exercice 8.** Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  sont-elles semblables ? On pourra étudier si elles sont diagonalisables.

**Exercice 9.** Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme  $\psi$  de  $\mathbb{R}[X] : P \mapsto XP' - P$ .  
Même question pour  $\theta : P \mapsto XP$ .

**Exercice 10.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 + A^2 + A = 0_n$ .

1. Expliquer pourquoi  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
2. Montrer que  $\text{tr}(A) \in \mathbb{Z}^-$ .

**Exercice 11.** Vérifier que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 12.** Réduire la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 13.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 8u_{n+2} - 20u_{n+1} + 16u_n.$$

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ .

1. Trouver  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $U_{n+1} = AU_n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $A$  est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. En déduire que  $A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .
4. Conclure que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (a + bn)2^n + c4^n$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .