

**Exercice 1.** On se donne trois événements  $A, B, C$  d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ . Écrire en utilisant l'union, l'intersection et le complémentaire, les événements suivants :

1. Aucun des événements  $A, B$  et  $C$  n'est réalisé.
2. Tous les événements  $A, B$  et  $C$  sont réalisés.
3. Un et un seul événement parmi  $A, B$  et  $C$  est réalisé.
4. Exactement deux des événements  $A, B$  et  $C$  sont réalisés.
5. Un au plus des événements  $A, B$  et  $C$  est réalisé.

**Exercice 2.** On se donne une famille  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ . Écrire en utilisant l'union, l'intersection et le complémentaire, les événements suivants :

1. Tous les  $A_i$  sont réalisés.
2. Seul l'un des  $A_i$  est réalisé.
3. Un au plus des  $A_i$  est réalisé.
4. Un nombre fini de  $A_i$  est réalisé.
5. Une infinité de  $A_i$  sont réalisés.

**Exercice 3.** On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 non équilibré, et on sait que la probabilité de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. Déterminer la probabilité de tomber sur un nombre pair.

**Exercice 4.** On lance  $n$  fois un dé à 6 faces bien équilibré, et on note  $A_n$  l'événement "On obtient 6 pour la première fois au  $n$ -ième lancer" et  $B_n$  l'événement "On n'obtient aucun 6 lors des  $n$  lancers".

1. Quel est l'espace probabilisé associé à cette expérience ?
2. Déterminer  $P(A_n)$  et  $P(B_n)$ .
3. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un 6 lors des  $n$  lancers.

**Exercice 5.** On choisit au hasard et de manière équiprobable un code à 5 chiffres de 0 à 9. Quelle est la probabilité que le produit des chiffres de ce code soit pair ?

**Exercice 6.** Un supermarché dispose de 150 packs de lait dont 50 avariés. Les clients prennent chacun un pack au hasard, dans l'ordre de leur arrivée. Voulez-vous être le 1er, le 2ème,... ou le 150ème acheteur ?

**Exercice 7** (Le problème de Monty Hall). Ce problème s'inspire du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal* diffusé entre 1963 et 1977 et présenté par Monty Hall.

A la fin du jeu, un seul candidat reste en lice et celui-ci est face à 3 portes identiques. Derrière l'une d'entre elle se trouve une voiture, et derrière les deux autres une chèvre. Le candidat choisit alors une porte, mais il ne l'ouvre pas tout de suite : il annonce d'abord son choix au présentateur.

Ce dernier, qui connaît l'emplacement de la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes de façon à révéler systématiquement une des chèvres. Après cela, il ne reste plus que deux portes, l'une contenant la voiture et l'autre une chèvre.

Le présentateur propose alors au candidat de modifier son choix et donc de changer de porte. Le candidat ouvre alors la porte choisie et remporte le lot caché derrière celle-ci.

A la place du candidat, changeriez-vous de porte ?

**Exercice 8.**  $2n$  filles et  $2n$  garçons se sont inscrits en prépa ECE. On les répartit au hasard et de façon équiprobable en deux classes de même effectif. Quelle est la probabilité que ces deux classes contiennent autant de filles que de garçons ?

**Exercice 9.** On mélange un jeu de 32 cartes. Dans le tas de cartes obtenu, quelle est la probabilité que :

1. Les quatre as soient consécutifs ?
2. Au moins trois as soient consécutifs ?
3. Exactement 3 as soient consécutifs ?

**Exercice 10.** Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules de même parité lorsque :

1. On tire les deux boules simultanément.
2. On tire une boule, on ne la remet pas, on tire la deuxième boule.
3. On tire une boule, on la remet, on tire la deuxième boule.

**Exercice 11.** Trois étudiants passent une colle de maths, au début de laquelle les sujets sont choisis au hasard et de façon équiprobable par les étudiants. Supposons qu'un des trois sujets soit plus dur que les autres : vaut-il mieux laisser les autres choisir avant vous ?

**Exercice 12.** Chaque jour, un même bus scolaire a 1 chance sur 100 d'arriver en retard à sa destination.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $R_n$  l'événement "Le bus est en retard le  $n$ -ième jour".

On suppose que les  $R_n$  sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que le bus soit à l'heure pour chacun des 25 premiers jours ?
2. A partir de combien de jours le bus a-t-il au moins une chance sur deux d'avoir été au moins une fois en retard ?
3. Quelle est la probabilité qu'à partir du jour 1, le bus ne soit plus jamais en retard ?

**Exercice 13.** Un tiroir contient 6 paires de chaussettes (ces paires étant deux-à-deux différentes). On tire au hasard 4 chaussettes. Quelle est la probabilité des événements suivants ?

1. On obtient exactement deux paires complètes.
2. On obtient au moins une paire complète.
3. On obtient exactement une paire complète.

**Exercice 14.**

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On effectue  $n$  lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est  $p$  avec  $p \in ]0 ; 1[$ . Quelle est la probabilité qu'au cours de ces  $n$  lancers, Face ne soit jamais suivi de Pile ?
2. Si on admet que la pièce peut être lancée indéfiniment, est-il possible que Face ne soit jamais suivi de Pile ?

**Exercice 15.** Pour entrer dans un club d'échec, Alice doit faire ses preuves : elle doit affronter et remporter la victoire sur deux adversaires, l'un étant plus fort que l'autre. Si on note  $p$  la probabilité qu'Alice a de gagner contre l'adversaire le plus faible, et  $q$  celle de gagner contre l'adversaire le plus fort, on a donc  $p > q$ .

Sachant qu'Alice a droit à 3 parties en tout, doit-elle commencer par l'adversaire le plus faible ou le plus fort pour maximiser ses chances d'admission ?

**Exercice 16.** On lance un dé à 6 faces, éventuellement truqué, jusqu'à obtenir 6. Quelle est la probabilité de s'arrêter ?

**Exercice 17.** Une enquête a été réalisée auprès de français s'étant rendus à Londres pour des raisons touristiques.

Cette enquête révèle que, pour se rendre dans la capitale anglaise,

- 30 % de ces touristes ont utilisé l'avion,
- 50 % ont utilisé le train passant par le tunnel sous la Manche
- et les autres touristes ont traversé la Manche par bateau.

Sur l'ensemble de tous les touristes interrogés, 40 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine.

Parmi les touristes interrogés ayant utilisé l'avion, 20 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine et parmi ceux qui ont choisi le train, 60 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine.

On interroge au hasard un touriste ayant répondu à l'enquête. On suppose que chaque touriste avait la même probabilité d'être choisi.

On note :

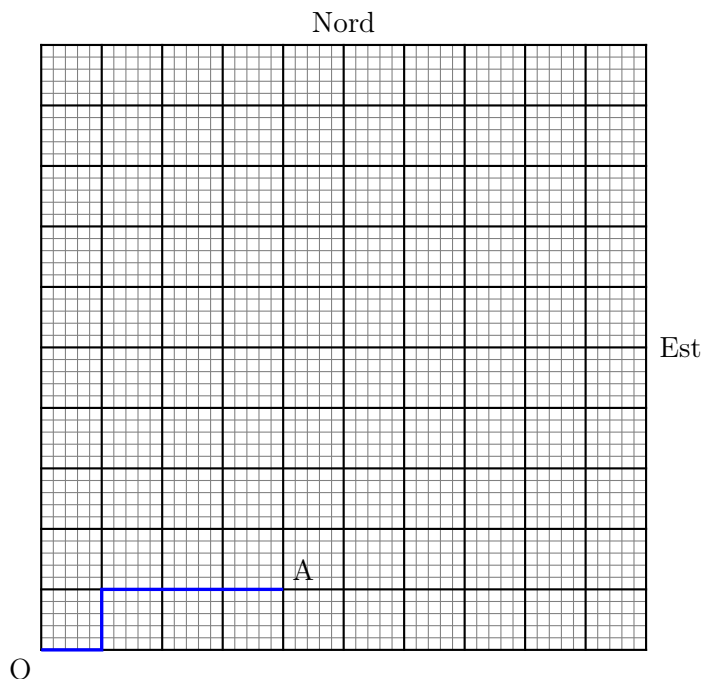
- $A$  l'événement « Le touriste interrogé a voyagé en avion ».

- $T$  l'évènement « Le touriste interrogé a voyagé en train ».
  - $B$  l'évènement « Le touriste interrogé a voyagé en bateau ».
  - $S$  l'évènement « Le touriste interrogé est resté en Angleterre plus d'une semaine ».
1. Déterminer la probabilité que le touriste interrogé ait voyagé en bateau pour se rendre en Angleterre.
  2. (a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'évènement  $A \cap S$ .  
(b) Déterminer les probabilités  $p(A \cap S)$  et  $p(T \cap S)$ . (On pourra utiliser un arbre pondéré).
  3. Montrer que  $P(B \cap S) = 0,04$ .
  4. Déterminer la probabilité que le touriste interrogé ait voyagé en bateau sachant qu'il est resté plus d'une semaine en Angleterre.
  5. On interroge au hasard 3 touristes ayant répondu à l'enquête de façon indépendante. On suppose que le nombre de personnes ayant répondu à l'enquête est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard à un tirage avec remise.  
Déterminer la probabilité que parmi ces trois touristes se trouve un seul touriste étant resté en Angleterre plus d'une semaine.

**Exercice 18.**

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.  
On prélève au hasard une boule de l'urne.  
Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.  
Si la première boule est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la boule tirée.  
(a) Quelle est la probabilité que les boules tirées soient rouges ?  
(b) Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.  
Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.
2. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.  
Une urne contient quatre boules rouges et  $n$  boules noires indiscernables au toucher.  
On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.  
La variable aléatoire  $X$  donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et  $p$ .  
(a) Donner l'expression de  $p$  en fonction de  $n$ .  
(b) Démontrer que la probabilité  $q_n$  que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que  $q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$ .  
(c) Quel est le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel la probabilité  $q_n$  est supérieure ou égale à 0,9999 ?

**Exercice 19.** Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les pâtés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires. On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours :



Le point O a pour coordonnées  $(0; 0)$ , le point A a pour coordonnées  $(4; 1)$ .

On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point  $M$  de coordonnées  $(p; q)$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels tels que  $p \leq 10$  et  $q \leq 10$ .

**À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).**

Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.

On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.

Par exemple :

Pour se rendre en A, on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en gras sur la figure); ces deux chemins ont une longueur égale à 5.

### Partie A - Dénombrement

1. Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.
2. Soit  $M$  un point de coordonnées  $(p; q)$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels tels que  $p \leq 10$  et  $q \leq 10$ .  
Exprimer, en fonction de  $p$  et  $q$ , la longueur des chemins qui permettent d'arriver en  $M$ .
3. Montrer qu'il y a  $\binom{p+q}{p}$  chemins différents qui permettent d'arriver en  $M$ .
4. Dénombrer les chemins pour arriver au point C de coordonnées  $(7; 5)$ .
5. Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A.

### Partie B - Étude d'une variable aléatoire

Tous les chemins considérés dans la suite de l'exercice vérifient les deux propriétés suivantes :

- ils sont de longueur 5 ;
- un promeneur part de O et à chaque intersection la probabilité qu'il aille vers le Nord est de  $\frac{2}{3}$  (et donc de  $\frac{1}{3}$  vers l'Est), indépendamment de son choix précédent.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le Nord.

1. Énumérer, en donnant la liste de leurs coordonnées, tous les points sur lesquels peut aboutir un chemin.
2. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
3. Calculer la probabilité que le promeneur arrive en A.