

Exercice 1. Justifier l'existence des intégrales suivantes :

$$M = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} dx \quad ; \quad N = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} dx$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + x + 1)^{-\frac{3}{2}} dx \quad ; \quad L = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx \quad ; \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = |x \ln x|$.

1. Montrer que f est continue sur $]0 ; +\infty[$ et est prolongeable par continuité en 0.
2. Calculer alors $\int_0^2 f(x) dx$.

Exercice 3. On définit la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. Pour un entier naturel n non nul, quelle est la nature de l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(t) dt$? Exprimer I_n en fonction de n .
2. Donner un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Donner la nature de la série de terme général $f(k)$, où $k \geq 1$.
4. Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq I_n \leq \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$$

et en déduire un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. On définit la fonction f sur $[2 ; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t \ln^2(t)}$.

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$?
2. Etudier les variations de f .
3. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{k \ln^2(k)}$, où $k \geq 2$.
4. Pour $b \geq 1$, que dire de la série de terme général $\frac{1}{k \ln^b(k)}$, où $k \geq 2$?

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue par morceaux sur $[-1 ; 1]$.
2. Calculer $\int_{-1}^1 f(t) dt$.

Exercice 6. Pour un entier naturel non nul n , on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$.

1. Vérifier que I_1 est divergente.
2. Avec une intégration par parties, montrer que, pour $n \geq 2$, I_n converge et coïncide avec $\frac{1}{(n-1)^2}$.

3. Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2}$.
4. En déduire, grâce à I_2 , que la série de terme général $\frac{\ln(k)}{k^2}$, où $k \geq 2$, est convergente.

Exercice 7. Soit f une fonction périodique, de période 1, telle que, pour tout $x \in [0 ; 1[$, on a $f(x) = x$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [1 ; 2[$, on a $f(x) = x - 1$.
2. Donner l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in [-1 ; 0[$.
3. Montrer que f est continue par morceaux sur $[-1 ; 2[$.
4. Calculer $\int_{-1}^2 f(t) dt$.

Exercice 8. A l'aide du changement de variable $t = \operatorname{sh}(x)$, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} dx$.

Exercice 9. A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x}$, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + x + 1} dx$.

Exercice 10. A l'aide d'une ipp, calculer l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3} dx$.