

**Exercice 1.** On considère l'espace vectoriel normé réel  $\mathbb{R}$ . On définit les ensembles  $A$  et  $B$  par

$$A = \mathbb{Z} \quad ; \quad B = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Montrer que  $A$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ .  $B$  est-il ouvert ou fermé ?

**Exercice 2.** Soit  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty : u \mapsto \max(|u_i|, i \in [1; n])$ . On désigne par  $U$  le vecteur de  $E$  dont toutes les coordonnées sont égales à 1 et on définit l'ensemble suivant

$$F = \{u \in E, \forall i \in [1; n], u_i \geq 0\}.$$

Montrer que  $U$  est intérieur à  $F$ .

**Exercice 3.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie, muni de sa norme  $\|\cdot\|$ . On désigne par  $d$  la distance associée à cette norme.

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . Montrer que

$$d(x, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bar{A}$$

où  $\bar{A}$  désigne l'adhérent de  $A$ .

**Exercice 4.**  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé. Soit  $a \in E, a \neq 0_E$ . Montrer que l'application  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in E$ , par

$$f(x) = \begin{cases} \|x - a\| & \text{si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue en  $a$  et n'est pas continue en  $-a$ . On pourra utiliser la suite  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)a$ .

**Exercice 5.** Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues et bornées sur  $[1; +\infty]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On considère l'application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $f \in E$ , par  $N(f) = \sup_{x \in [1; +\infty[} \left( \frac{|f(x)|}{x} \right)$ .

Montrer que  $E$  muni de  $N$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

**Exercice 6.** Soit  $E$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On considère l'application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $f \in E$ , par  $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)| dx$ .

Montrer que  $E$  muni de  $N$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

**Exercice 7.** Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[0; 1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On considère l'application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $f \in E$ , par  $N(f) = \sup_{x \in [0; 1]} (x |f(x)|)$ .

Montrer que  $E$  muni de  $N$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

**Exercice 8.**  $E$  désigne  $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$ . Soit  $T : E \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $f \in E$ , par  $T(f) = \int_0^1 xf(x) dx$ . Montrer que  $T$  est linéaire, continue et calculer  $\sup_{f \in E \setminus \{0\}} \left( \frac{|T(f)|}{\|f\|_\infty} \right)$ . On pourra considérer la fonction  $f$  constante, égale à 1.

**Exercice 9.**  $E$  désigne  $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$ . Soit  $T : E \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $f \in E$ , par  $T(f) = \int_{-1}^1 xf(x) dx$ . Montrer que  $T$  est linéaire, continue et calculer  $\sup_{f \in E \setminus \{0\}} \left( \frac{|T(f)|}{\|f\|_\infty} \right)$ . On pourra considérer la fonction  $f_n$  définie sur  $[0; 1]$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -1 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}.$$