

Exercice 1. Montrer que

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \quad (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Exercice 2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E . Montrer que

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{puis que} \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 3. Dans \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique, on considère le sous-espace vectoriel F défini par le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

1. Donner une base orthonormée de F .
2. En déduire, dans la base canonique de \mathbb{R}^4 , la matrice de la projection orthogonale sur F .

Exercice 4. Soit E un espace euclidien et soient f, g deux endomorphismes de E tels que, dans une base orthonormée de E , la matrice A de f soit symétrique et la matrice B de g soit antisymétrique.

1. Montrer que, pour tout x et tout $y \in E$, $\langle f(x)|y \rangle = \langle x|f(y) \rangle$ et que $\langle g(x)|y \rangle = -\langle x|g(y) \rangle$.
2. On suppose de plus que f et g commutent.
Montrer que, pour tout $x \in E$, $\langle f(x)|g(x) \rangle = 0$ puis que $\|f(x) - g(x)\| = \|f(x) + g(x)\|$.

Exercice 5. On se place dans \mathbb{R}^n muni de sa base canonique et de sa structure euclidienne canonique.

1. Pour $a \in \mathbb{R}^n$, a non nul, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad p_{\text{Vect}(a)}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i a_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2} a$$

(où x_i est la coordonnée numéro i de x dans la base canonique de \mathbb{R}^n).

2. Soit H un hyperplan de \mathbb{R}^n . Vérifier que $\text{Id}_E = p_H + p_{H^\perp}$. En considérant une base orthonormée du supplémentaire orthogonal de H , donner une expression très simple permettant de calculer $p_H(x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 6. Soit E un espace euclidien et soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Nous allons montrer que

$$p \text{ est une projection orthogonale} \quad \Leftrightarrow \quad p \circ p = p \text{ et } \forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

1. Vérifier qu'une implication est immédiate.
2. Pour la réciproque, considérons une projection p sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$. Il s'agit donc de montrer que $F^\perp = G$.
Soient donc $y \in F$ et $z \in G$.
 - (a) Vérifier que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad p(y + \lambda z) = y$.
 - (b) En déduire que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|y\|^2 \leq \|y + \lambda z\|^2$.
 - (c) Que dire du signe de la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \lambda^2 \|z\|^2 + 2\lambda \langle y|z \rangle$?
 - (d) En déduire que $y \perp z$.
 - (e) Conclure.

Exercice 7. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques sur \mathbb{R} .

1. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire sur E .

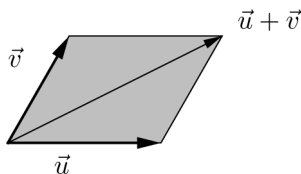
- Vérifier que la famille des fonctions $f_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $g_k : x \mapsto \sin(kx)$, où $k \in \mathbb{N}^*$, est une famille orthonormée.
- Soit φ la fonction continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} telle que, sur $[0 ; 2\pi]$, $\varphi(x) = x^2 - 2\pi x$. Donner le projeté orthogonal de φ sur $\text{Vect}(f_1, g_1)$.

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.

Donner la distance de $X^3 + 1$ à $\mathbb{R}_2[X]$. Préciser $\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \{\|X^3 - aX^2 - bX - c + 1\|\}$.

Exercice 9.

- Montrer que la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ coïncide avec l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}(x_1, y_1)$ et $\vec{v}(x_2, y_2)$, dans un repère orthonormé direct du plan.



- De même, montrer que la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ coïncide avec le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{w}(x_3, y_3, z_3)$, dans un repère orthonormé direct de l'espace.

