

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx;$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 + nx}{(1+x)^n} dx;$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx;$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx;$

Exercice 2. Montrer que l'application $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{1+xt^2}$ est continue sur $] -1 ; +\infty[$ et calculer sa limite en $+\infty$.

Exercice 3. Montrer que l'application $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée. A l'aide d'une i.p.p., trouver une équation différentielle que vérifie f et donner son expression explicite. On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4. Montrer que l'application $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est continue sur $[0 ; +\infty[$ et calculer sa limite en $+\infty$.

Exercice 5 (Intégration terme à terme en passant par la suite des sommes partielles). Nous allons montrer que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}.$$

1. Justifier l'existence de l'intégrale et de la somme de la série.
2. Préciser le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $] -1 ; 1[$.
3. Constater que les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme ne sont pas satisfaites.
4. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n par :

$$\forall x \in [0 ; 1[, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k.$$

Appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et conclure.

Exercice 6 (Intégration terme à terme en passant par la suite des restes). Nous allons montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

1. Justifier l'existence des deux membres de cette égalité.
2. Constater que les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme ne sont pas satisfaites.
3. On considère alors la somme S et le reste d'ordre n R_n de la série de fonctions $\sum (-1)^n e^{-nx}$:

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-nx} \quad ; \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-kx}.$$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $R_n(x)$.

(b) A l'aide du théorème de convergence dominée, vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} R_n(t) dt = 0$.

(c) Conclure.

Exercice 7. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} dx ;$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n}{nx^2 + e^x} dx.$

Exercice 8. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0 ; 1]$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$

Exercice 9. Montrer que l'application $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée. Que dire de f ?

Exercice 10. Montrer que l'application $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1 ; +\infty[$ et préciser sa dérivée.

Exercice 11. Montrer que l'application $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^3} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser sa dérivée.

Exercice 12. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$

Exercice 13. Ecrire $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ sous forme d'une série numérique.

Exercice 14. Ecrire $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$ sous forme d'une série numérique.