

Exercice 1.

1. Soient a et b deux vecteurs non colinéaires d'un espace vectoriel E . Montrer que $\text{Vect}(a)$ et $\text{Vect}(b)$ sont en somme directe.
2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et soit $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit u une application linéaire de E dans F où E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies.

Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a :

$$\dim(u(G)) = \dim(G) - \dim(G \cap \ker(u)).$$

Exercice 3.

1. Rappeler la formule de Grassmann et le théorème du rang.
2. On considère un espace vectoriel de dimension finie E , ainsi deux applications endomorphismes f et g de E tels que

$$E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g).$$

Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E , tout comme $\ker(f)$ et $\ker(g)$.

Exercice 4. Soit (E_1, E_2, \dots, E_n) une famille de n sous-espaces vectoriels de E . Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- E_1, E_2, \dots, E_n sont en somme directe ;
- E_1, E_2, \dots, E_{n-1} sont en somme directe et $\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i\right) \cap E_n = \{0_E\}$.

Exercice 5. E est un espace vectoriel de dimension finie. p et q désignent deux projecteurs de E qui commutent : $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.
3. Montrer que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.

Exercice 6. E est un espace vectoriel de dimension finie et u est un endomorphisme de E . Montrer que :

$$E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u) \quad \Leftrightarrow \quad \ker(u) = \ker(u^2) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(u) = \text{Im}(u^2).$$

Exercice 7. E est un espace vectoriel de dimension finie et u désigne un endomorphisme de E tel que $u + u^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Grâce à un raisonnement du type analyse/synthèse, montrer que :

$$\text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + Id_E) = E.$$

Exercice 8. Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que l'on peut trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n scalaires deux à deux distincts ($n \geq 2$). On pose $F_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$, pour tout $i \in [1 ; n]$.

Montrer par récurrence que F_1, F_2, \dots, F_n sont en somme directe.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$. A est-elle inversible ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$, donner le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$.
3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n .

Exercice 11. Toutes les matrices seront des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B telles que $AB - BA = I_n$.
2. Montrer que s'il existe deux matrices A et B telles que $AB - BA = A$ alors A n'est pas inversible.
3. Montrer que si A est de rang 1, alors $A^2 = \text{tr}(A)A$.
4. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que si $\text{tr}({}^tAA) = 0$ alors $A = 0 = {}^tA = 0_n$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$t_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad X \mapsto \text{tr}(AX)$$

est une forme linéaire.

Montrer enfin que l'application $t : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -ev.

$$A \mapsto t_A$$

Exercice 13. Dans un espace vectoriel de dimension finie, montrer que la trace d'une projection est égale à son rang.

Exercice 14. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit la matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ définie par blocs de la manière suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M en fonction de ceux de A et $B - A$.
2. En déduire que, si M est inversible, alors A et $B - A$ le sont aussi.
3. Calculer M^{-1} quand elle existe. On essaiera pour cela de résoudre le système par blocs

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$