

**Exercice 1.** Comparer les fonctions suivantes au voisinage de 0 :

1.  $x \mapsto x^3 \ln(x)$  et  $x \mapsto \ln(1 + 2x)$  ;
2.  $x \mapsto x^4 \ln(x)$  et  $x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x} \sin(x)$ .

**Exercice 2.** Déterminer, à l'aide d'équivalents, les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}$  ;
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-e^x)(1-\cos(x))}{3x^3 + 2x^4}$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$ .

**Exercice 3.** Donner des équivalents simples lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  pour :

1.  $(\ln(1 + e^{-n^2}))^{\frac{1}{n}}$  ;
2.  $\left( \frac{e^n}{1 + e^{-n}} \right)^n$ .

**Exercice 4.**

1. Calculer le  $DL_3(2)$  de  $x \mapsto \sqrt{x}$ .
2. La fonction racine carrée admet-elle un DL d'ordre  $n \geq 1$  en 0 ?

**Exercice 5.** Calculer les DL suivants :

1.  $x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$  à l'ordre 4 en 0 ;
2.  $x \mapsto (\ln(1+x))^2$  à l'ordre 4 en 0 ;
3.  $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}$  à l'ordre 3 en 0 ;
4.  $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$  à l'ordre 4 en 0 ;
5.  $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-2)}$  à l'ordre 3 en 0.

**Exercice 6.** On considère l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}.$$

1. Montrer qu'il existe trois nombres réels  $a, b$  et  $c$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Interpréter ce résultat.

**Exercice 7.** 1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction  $f$  donnée par  $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x(e^x - 1)}$ .

2. En déduire que  $f$  se prolonge en une fonction dérivable en 0. Donner la valeur du prolongement et de sa dérivée en 0.

3. Déterminer la limite de la suite  $n \frac{\frac{1}{n} - 1}{e^{1/n} - 1} - \frac{1}{2}$ .

**Exercice 8.** Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre indiqué au point indiqué :

1.  $f : x \mapsto \cos(x) \ln(1+x)$ ,  $f : x \mapsto e^x \ln(1+x)$ ,  $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}$  à l'ordre 4 en 0 ;
2.  $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ ,  $f : x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$ ,  $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ ,  $f : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{(e^x - 1)^2}$  à l'ordre 4 en 0 ;
3.  $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  ;
4.  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$  ;
5.  $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$  à l'ordre 4 en 0 (calculer d'abord le développement limité de  $f'$ ).

**Exercice 9.** Déterminer la limite de  $\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}$  quand  $x \rightarrow 1$ .