

Table des matières

1	Logique et raisonnements	11
1.1	Prédicats, propositions et assertions	12
1.2	Quantificateurs	13
1.3	Opérations sur les prédicats	15
1.3.1	Conjonction ("et")	15
1.3.2	Disjonction ("ou")	16
1.3.3	Négation	16
1.3.4	Implication	17
1.3.5	Équivalence	19
1.4	Raisonnement par l'absurde	23
1.5	Raisonnements par récurrence	24
1.5.1	Récurrence simple	24
1.5.2	Récurrence double	25
1.5.3	Récurrence forte	26
1.6	Analyse-synthèse	26
1.7	Exercices	27
1.8	DM conducteur	32
2	Notions sur les ensembles	37
2.1	Rappels sur les ensembles usuels	38
2.2	Notions élémentaires sur les ensembles	38
2.2.1	Définitions	38
2.2.2	Opérations sur les ensembles	41
2.2.3	Recouvrements disjoints et partitions	46
2.3	Exercices	47
2.4	DM conducteur	48
3	Arithmétique	51
3.1	Diviseur, multiple	52
3.2	Division euclidienne	53
3.2.1	Parties non vides d'entiers relatifs	53
3.2.2	Théorème de la division euclidienne	53
3.3	PGCD, PPCM de deux entiers	54
3.3.1	PGCD	54
3.3.2	Algorithme d'Euclide	55
3.3.3	PPCM	56
3.4	Nombres premiers	57
3.5	Exercices	58
3.6	DM conducteur	60

4 Applications	63
4.1 Définitions	64
4.2 Injection, surjection, bijection	68
4.3 Composition d'applications	72
4.4 Applications réciproques	73
4.5 Restriction et prolongement	75
4.6 Fonctions indicatrices	76
4.7 Exercices	76
4.8 DM conducteur	79
5 Sommes et produits	83
5.1 Sommes et produits	84
5.1.1 Généralités	84
5.1.2 Sommes et produits à connaître	91
5.1.3 Sommes doubles	97
5.1.4 Formule du binôme	100
5.2 Exercices	106
5.3 DM conducteur	107
6 Petits systèmes linéaires	115
6.1 Définition et résolution d'un système linéaire	116
6.2 Interprétations géométriques	120
6.2.1 Dans le plan	120
6.2.2 Dans l'espace	121
6.3 Exercices	121
6.4 DM conducteur	125
7 Inégalités	133
7.1 Relations d'ordre réelles	134
7.1.1 Relations d'ordre usuelles	134
7.1.2 Intervalles	137
7.1.3 Inéquations et tableaux de signe	138
7.2 Valeur absolue	139
7.2.1 L'application valeur absolue	139
7.3 Parties bornées	144
7.4 Partie entière	147
7.5 Exercices	148
7.6 DM conducteur	150
8 Trigonométrie	155
8.1 Le cercle trigonométrique	156
8.1.1 Définition	156
8.1.2 Congruence	157
8.2 Fonctions circulaires	158
8.2.1 Définitions	158
8.2.2 Paramétrisation du cercle trigonométrique	160
8.2.3 Fonction tangente	163
8.3 Formulaire	165
8.3.1 Formules d'addition	165
8.3.2 Valeurs particulières des fonctions circulaires	169
8.4 Continuité et dérivabilité des fonctions circulaires	172

8.4.1	Rappels	172
8.4.2	Une inégalité fondamentale	173
8.4.3	Cosinus et sinus	174
8.5	Exercices	178
8.6	DM conducteur	181
9	Nombres complexes	187
9.1	Le corps des nombres complexes	188
9.1.1	Définition	188
9.1.2	Opérations sur les nombres complexes	192
9.1.3	Conjugué d'un nombre complexe	196
9.1.4	Module d'un nombre complexe	199
9.1.5	Formulaire	204
9.2	Nombres complexes, trigonométrie et exponentielle	206
9.2.1	Le retour du cercle trigonométrique	206
9.2.2	Exponentielle complexe	207
9.2.3	Nombres complexes et trigonométrie	209
9.3	Equations algébriques	220
9.3.1	Nombres complexes et polynômes	220
9.3.2	Racines de l'unité	222
9.3.3	Équations polynomiales du second degré	227
9.4	Nombres complexes et géométrie	230
9.4.1	Translations	230
9.4.2	Positions relatives de deux vecteurs	231
9.4.3	Rotations	232
9.4.4	Homothéties	234
9.5	Exercices	239
9.6	DM conducteur	246
10	Généralités sur les fonctions d'une variable réelle	253
10.1	Notion de fonction	254
10.1.1	Définitions	254
10.1.2	Transformations sur les courbes représentatives de fonctions	255
10.1.3	Monotonie	259
10.1.4	Parité	263
10.1.5	Périodicité	264
10.1.6	Réciproque	265
10.2	Opérations sur les fonctions	265
10.2.1	Les opérations sur les fonctions	265
10.2.2	Opérations sur les fonctions et monotonie	266
10.3	Fonctions bornées	268
10.4	Étude de fonction	270
10.4.1	Continuité	270
10.4.2	Dérivation	273
10.4.3	Étude des variations d'une fonction	278
10.4.4	Dérivées successives et fonctions continûment dérivables	282
10.4.5	Fonctions de référence	284
10.5	Extension au cas des fonctions à valeurs complexes	285
10.6	Exercices	287

11 Fonctions usuelles	289
11.1 Exponentielle et logarithme	290
11.1.1 Exponentielle	290
11.1.2 Logarithme	293
11.1.3 Logarithme en base quelconque	296
11.1.4 Fonctions puissances	297
11.1.5 Croissances comparées	302
11.2 Fonctions circulaires réciproques	304
11.3 Fonctions hyperboliques	308
11.4 Exercices	310
11.5 DM conducteur	312
12 Primitives et équations différentielles linéaires	321
12.1 Primitives	322
12.1.1 Définition et lien avec l'intégration	322
12.1.2 Techniques d'intégration	324
12.1.3 Primitives usuelles	328
12.1.4 Des exemples à connaître	330
12.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre	333
12.2.1 Définition	334
12.2.2 Ensemble des solutions	335
12.2.3 Résolution de l'équation homogène	336
12.2.4 Méthode de variation de la constante	337
12.2.5 Problème de Cauchy	338
12.3 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants	339
12.3.1 Définition	339
12.3.2 Ensemble des solutions	340
12.3.3 Équation homogène	341
12.3.4 Cas particuliers de solutions particulières	345
12.3.5 Problème de Cauchy	349
12.4 Exercices	351
12.5 DM conducteur	355
13 Nombres réels et suites	363
13.1 Borne supérieure ou inférieure d'un ensemble de réels	364
13.2 Généralités sur les suites	366
13.2.1 Définition	366
13.2.2 Monotonie	368
13.3 Limites de suites	370
13.3.1 Définition	370
13.3.2 Opérations sur les limites	374
13.3.3 Théorèmes de comparaison	378
13.3.4 Limites et inégalités	379
13.3.5 Théorème de la limite monotone	380
13.3.6 Suites extraites	381
13.3.7 Suites adjacentes	383
13.3.8 Extension au cas complexe	384
13.4 Suites usuelles	386
13.4.1 Suites arithmétiques	386
13.4.2 Suites géométriques	386

13.4.3	Suites arithmético-géométrique	388
13.4.4	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	389
13.4.5	Étude de suites définies par récurrence	393
13.5	Exercices	398
13.6	DM conducteur	402
14	Matrices	411
14.1	Notion de matrice	412
14.1.1	Définition	412
14.1.2	Opérations sur les matrices	413
14.1.3	Matrices élémentaires	420
14.2	Systèmes linéaires et opérations élémentaires	422
14.2.1	Lien entre les systèmes linéaires et les matrices	422
14.2.2	Opérations élémentaires	424
14.3	Matrices carrées	427
14.3.1	Matrices symétriques, antisymétriques	428
14.3.2	Matrices triangulaires et diagonales	429
14.3.3	Formule du binôme	430
14.3.4	Matrices inversibles	432
14.4	Exercices	440
14.5	DM conducteur	445
15	Limites et continuité	453
15.1	Limite d'une fonction en un point (fini ou non)	454
15.1.1	Notion de limite	454
15.1.2	Notion de voisinage	455
15.1.3	Caractérisation séquentielle de la limite	457
15.1.4	Opérations sur les limites	458
15.1.5	Limite à droite, limite à gauche	459
15.1.6	Limites et inégalités	461
15.2	Continuité d'une fonction	464
15.2.1	Continuité en un point	464
15.2.2	Continuité sur un intervalle	465
15.2.3	Théorèmes sur la continuité	465
15.2.4	Théorème des valeurs intermédiaires	465
15.3	Extension aux fonctions à valeurs complexes	470
15.4	Exercices	472
16	Dérivation	477
16.1	Dérivée d'une fonction	478
16.1.1	Nombre dérivé d'une fonction en un point	478
16.1.2	Développement limité à l'ordre 1	478
16.1.3	Relation entre la dérivabilité en un point et l'existence d'un développement limité à l'ordre 1	479
16.1.4	Dérivée d'une fonction sur un intervalle	481
16.1.5	Opérations sur les fonctions dérivables	482
16.2	Application à l'étude de fonctions	485
16.2.1	Extrema locaux	485
16.2.2	Théorème de Rolle	487
16.2.3	Égalité des accroissements finis	487
16.2.4	Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes	488

16.2.5	Lien entre dérivée et sens de variation	490
16.2.6	Théorème de la limite de la dérivée	493
16.3	Dérivées successives	494
16.4	Convexité	498
16.5	Extension au cas complexe	500
16.6	Exercices	501
17	Polynômes	505
17.1	Notion de polynôme	506
17.1.1	Définition	506
17.1.2	Opérations sur les polynômes	506
17.2	Polynômes de degré plus petit que n	515
17.3	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	516
17.3.1	Diviseur, multiple	516
17.3.2	Division euclidienne	516
17.3.3	Racines d'un polynôme	518
17.4	Dérivation de polynômes	526
17.4.1	Définitions	526
17.4.2	Formule de Taylor polynomiale	529
17.5	Polynômes irréductibles	532
17.5.1	Définition	532
17.5.2	Avec les complexes	533
17.5.3	Avec les réels	534
17.6	Notions sur les fractions rationnelles	536
17.7	Exercices	537
17.8	DM conducteur	539
18	Comparaisons de fonctions	545
18.1	Relations de comparaison	546
18.1.1	Relation de négligeabilité	546
18.1.2	Relation de domination	552
18.1.3	Relation d'équivalence	554
18.2	Cas des suites	561
18.3	Développements limités	561
18.3.1	Définition	562
18.3.2	Opérations sur les développements limités.	565
18.3.3	Lien avec la dérivation	571
18.3.4	Développements limités de référence	572
18.4	Exemples d'applications	575
18.4.1	Extrema locaux	575
18.4.2	Détermination d'un développement limité	576
18.4.3	Calculer une dérivée et une dérivée seconde	576
18.4.4	Étude locale d'une fonction	577
18.4.5	Prolongement d'une fonction	577
18.4.6	Recherche d'une asymptote	577
18.4.7	Un développement asymptotique	577
18.5	Exercices	577
18.6	DM conducteur	583

19	Espaces vectoriels	593
19.1	Introduction	594
19.1.1	Première approche	594
19.2	Espaces vectoriels	595
19.2.1	Définition	595
19.2.2	Familles de vecteurs et combinaisons linéaires	599
19.2.3	Sous-espaces vectoriels	600
19.3	Familles génératrices, familles libres, bases	605
19.3.1	Familles génératrices	605
19.3.2	Opérations sur les familles génératrices	605
19.3.3	Familles liées, familles libres	607
19.3.4	Bases	611
19.3.5	Bases canoniques des espaces vectoriels de référence	612
19.3.6	Famille échelonnée de polynômes	613
19.4	Somme de deux sous-espaces vectoriels	614
19.5	Exercices	617
19.6	DM conducteur	621
20	Espaces vectoriels de dimension finie	625
20.1	Espaces vectoriels de dimension finie	626
20.2	Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie	628
20.2.1	Mise en place de la définition	628
20.2.2	Dimensions des espaces vectoriels de référence	630
20.2.3	Caractérisation des bases en dimension finie	631
20.2.4	Rang d'une famille de vecteurs	632
20.3	Sous-espaces vectoriels en dimension finie	633
20.3.1	Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie	633
20.3.2	Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie	634
20.4	Exercices	637
21	Applications linéaires	641
21.1	Applications linéaires	642
21.1.1	Définition	642
21.1.2	Opérations sur les applications linéaires	644
21.1.3	Noyau d'une application linéaire	647
21.1.4	Image d'une application linéaire	648
21.1.5	Caractérisation des applications linéaires surjectives, injectives, bijectives	649
21.1.6	Rang d'une application linéaire	650
21.2	Endomorphismes remarquables	653
21.2.1	Puissances d'un endomorphisme	653
21.2.2	Groupe linéaire	653
21.2.3	Homothéties	654
21.2.4	Projections	654
21.2.5	Symétries	656
21.3	Applications linéaires en dimension finie	659
21.3.1	Détermination d'une application linéaire	659
21.3.2	Isomorphismes en dimension finie	661
21.3.3	Théorème du rang	663
21.4	Équations linéaires	665
21.5	Formes linéaires et hyperplans	667

21.6 Exercices	669
21.7 DM conducteur	675
22 Dénombrement	685
22.1 Ensembles finis	686
22.1.1 Définition	686
22.1.2 Opérations	687
22.1.3 Cardinal et applications	691
22.2 Listes, arrangements et combinaisons	695
22.2.1 Listes	695
22.2.2 Arrangements	695
22.2.3 Combinaisons	697
22.3 Exercices	699
23 Intégration sur un segment	705
23.1 Fonctions en escalier	706
23.1.1 Définitions	706
23.1.2 Intégration et fonctions en escalier	709
23.2 Fonctions continues	711
23.2.1 Définition	711
23.2.2 Propriétés essentielles	712
23.2.3 Sommes de Riemann	716
23.3 Intégration et dérivation	720
23.3.1 Théorème fondamental de l'analyse	720
23.3.2 Parité et périodicité	722
23.3.3 Valeur moyenne d'une fonction	723
23.3.4 Formules de Taylor	724
23.4 Extension aux fonctions à valeurs complexes	727
23.5 Exercices	727
24 Séries numériques	731
24.1 Définitions	732
24.1.1 Notion de série numérique	732
24.1.2 Premiers exemples	735
24.2 Séries à termes positifs	737
24.2.1 Le cadre des séries à termes positifs	737
24.2.2 Comparaison par encadrement	738
24.2.3 Comparaison par domination	739
24.2.4 Comparaison par équivalence	739
24.2.5 Comparaison série-intégrale	740
24.2.6 Séries de Riemann	741
24.3 Convergence absolue	742
24.4 Exercices	743
24.5 DM conducteur	747
25 Matrices et applications linéaires	757
25.1 Matrices de vecteurs dans une base donnée	758
25.1.1 Matrices d'un vecteur dans une base donnée	758
25.1.2 Matrices d'une famille de vecteurs dans une base donnée	762
25.2 Matrices d'une application linéaire dans des bases données	762
25.2.1 Définition	762

25.2.2	Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$	765
25.2.3	Matrice d'une rotation, d'une homothétie	767
25.3	Utilisations pratiques d'une matrice d'application linéaire	767
25.3.1	Calcul d'images et composition	767
25.3.2	Noyau, image et rang d'une matrice	771
25.4	Changement de bases	776
25.4.1	Matrice de passage d'une base à une autre	776
25.4.2	Formule de changement de bases pour une application linéaire	777
25.4.3	Matrices semblables	778
25.5	Systèmes et matrices	780
25.6	Exercices	781
26	Probabilités sur un univers fini	789
26.1	Espaces probabilisés	790
26.1.1	Espaces probabilisables	790
26.1.2	Notion de probabilité	792
26.1.3	Probabilités conditionnelles	795
26.1.4	Indépendance d'événements	799
26.2	Variables aléatoires	802
26.2.1	Loi d'une variable aléatoire	802
26.2.2	Lois usuelles sur un univers fini	803
26.2.3	Loi d'une variable aléatoire conditionnée par un événement	806
26.2.4	Couples de variables aléatoires	806
26.2.5	Indépendance de variables aléatoires	807
26.2.6	Lemme des coalitions	810
26.3	Exercices	811
27	Espérance et variance	817
27.1	Notion d'espérance	818
27.1.1	Définition	818
27.1.2	Propriétés élémentaires	819
27.1.3	Lois usuelles	821
27.1.4	Variable aléatoire constante	821
27.1.5	Théorème de transfert	822
27.2	Variance, écart-type et covariance	824
27.2.1	Variance et écart-type	824
27.2.2	Variances pour les lois usuelles	826
27.2.3	Covariance	827
27.3	Inégalités probabilistes	830
27.4	Exercices	832
28	Déterminants	837
28.1	Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base	838
28.1.1	Définition	838
28.1.2	En dimension 2	840
28.1.3	En dimension 3	841
28.1.4	Déterminants et bases	842
28.2	Déterminant d'un endomorphisme	844
28.2.1	Définition	844
28.2.2	Composition	845

28.3	Déterminant d'une matrice carrée	846
28.4	Calcul effectif de déterminants	847
28.4.1	Opérations élémentaires	847
28.4.2	Développement par rapport à une ligne ou colonne	850
29	Fonctions à deux variables	853
29.1	Parties ouvertes	854
29.2	Continuité	856
29.3	Dérivation	857
29.3.1	Dérivées partielles	857
29.3.2	Plan tangent	859
29.3.3	Produit scalaire euclidien	861
29.3.4	Gradient	862
29.3.5	Dérivation selon un vecteur	863
29.3.6	Règle de la chaîne	866
29.3.7	Lignes de niveau	867
29.3.8	Composition	869
29.4	Extrema	871
30	Espaces préhilbertiens réels	875
30.1	Produits scalaires et normes	876
30.1.1	Notion de produit scalaire et d'espace préhilbertien réel	876
30.1.2	Exemples de produits scalaires	878
30.1.3	Norme associée à un produit scalaire	880
30.2	Orthogonalité	885
30.2.1	Vecteurs orthogonaux et orthogonal d'un ensemble	885
30.2.2	Bases orthonormées	894
30.3	Projections orthogonales	896
30.3.1	Relation entre un sous-espace vectoriel et son orthogonal	896
30.3.2	Projections orthogonales	897
30.3.3	Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel	900

Chapitre 1

Logique et raisonnements

1.1	Prédicats, propositions et assertions	12
1.2	Quantificateurs	13
1.3	Opérations sur les prédicats	15
1.3.1	Conjonction ("et")	15
1.3.2	Disjonction ("ou")	16
1.3.3	Négation	16
1.3.4	Implication	17
1.3.5	Équivalence	19
1.4	Raisonnement par l'absurde	23
1.5	Raisonnements par récurrence	24
1.5.1	Récurrence simple	24
1.5.2	Récurrence double	25
1.5.3	Récurrence forte	26
1.6	Analyse-synthèse	26
1.7	Exercices	27
1.8	DM conducteur	32

1.1 Prédicats, propositions et assertions

L'ingrédient de base d'un raisonnement mathématiques est la notion de *prédicat*.

Définition 1.1.1 – Prédicat

Un *prédicat* est un énoncé, pouvant dépendre d'éléments extérieurs, et qui ne peut avoir que deux états : vrai ou faux. L'état d'un prédicat est appelé *valeur de vérité* de ce prédicat.

Par exemple, la phrase

L'atmosphère terrestre est composée à plus de 75% d'azote.

est un prédicat, qui ne dépend ici d'aucun paramètre. L'atmosphère contient aujourd'hui environ 78% d'azote : on dit alors que la valeur de vérité de ce prédicat est vraie, ou tout simplement que ce prédicat est vrai.

Par contre, les phrases

Passe-moi le sel, s'il te plaît.

Quelle heure est-il ?

ne sont pas des prédicats (dire qu'ils sont vrais ou faux n'a pas de sens).

Bien sûr, la valeur de vérité d'un prédicat peut être difficile à évaluer, comme par exemple pour le prédicat suivant :

Sur Terre, il y a au moins une personne qui mesure exactement 1,83 mètres, pèse 76,34 kg et est guitariste de jazz.

Ce prédicat ne dépend à nouveau d'aucun paramètre extérieur, mais bien malin celui qui arrive à décider s'il est vrai ou faux.

La plupart du temps, les prédicats dépendent d'un ou plusieurs paramètres. Par exemple :

$$x + 5 \geq 10$$

est un prédicat, dont on ne peut pas connaître la valeur de vérité sans plus d'informations à propos de x . En notant P ce prédicat, sa valeur de vérité pour un x donné peut être notée $P(x)$. Avec cette notation, on peut voir le prédicat « $x + 5 \geq 10$ » comme la fonction

$$P : x \mapsto \begin{cases} \text{Vrai} & \text{si } x + 5 \geq 10 \\ \text{Faux} & \text{sinon} \end{cases}$$

À partir de ce prédicat, on peut en construire un autre en définissant, d'une manière ou d'une autre, le paramètre x . Par exemple :

Soit $x = 6$. Alors $x + 5 \geq 10$.

Il existe un réel x tel que $x + 5 \geq 10$.

Pour tout réel x , on a $x + 5 \geq 10$.

Ces trois derniers prédicats ne dépendent plus d'aucun paramètre extérieur et sont alors des *propositions*.

Définition 1.1.2 – Proposition (ou assertion)

Une *proposition* (ou *assertion*) est un prédicat ne dépendant plus d'aucun paramètre.

Par exemple, les phrases suivantes sont des propositions :

Saint-Quentin est situé dans l'Aisne.

Pour tout réel x , on a $x^2 + 1 \geq 2x$.

Il existe un entier naturel n tel que $\frac{2n+1}{n+1} = 5$.

Les deux derniers exemples peuvent aussi se réécrire en utilisant les *quantificateurs*.

1.2 Quantificateurs

Considérons le prédicat suivant, de paramètre $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$x + y \geq 2$$

Il est par exemple vrai pour le couple $(1, 3)$ (puisque $1 + 3 \geq 2$) et faux pour le couple $(1, \frac{1}{2})$ (puisque $1 + \frac{1}{2} < 2$).

À partir de ce prédicat, on peut en construire d'autres, comme par exemple :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \text{ on a } x + y \geq 2$$

Remarquons que ce prédicat a un paramètre de moins : il ne dépend plus que de y . Par exemple, avec $y = 3$, il est vrai : pour tout réel positif x , on a bien $x + 3 \geq 2$.

Avec $y = 1$, il est faux : nous avons un contre-exemple : 0 est positif mais $0 + 1$ n'est pas supérieur ou égal à 2.

Ce prédicat peut être réécrit avec les *quantificateurs*, en particulier le *quantificateur universel* :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x + y \geq 2$$

On pourrait aussi créer le prédicat suivant :

$$\text{Il existe } x \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } x + y \geq 2$$

De la même façon, ce prédicat ne dépend plus que de y et peut se réécrire avec le *quantificateur existentiel* :

$$\exists x \in \mathbb{R}_+, x + y \geq 2$$

Remarquons que ce dernier prédicat est vrai pour tout $y \in \mathbb{R}_+$. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe bien au moins un réel positif x tel que $x + y \geq 2$: il suffit de prendre, par exemple, $x = 2$.

Les deux définitions suivantes sont là pour formaliser ces deux quantificateurs : elles ne sont pas à apprendre par cœur.

Notation

On considère un prédicat P , de paramètre $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, n étant un entier naturel non nul. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Pour tout $x \in E_i$, on note $P_{|x_i=x}$ le prédicat obtenu en considérant P avec x_i constant et égal à x . Autrement dit, pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$, on a

$$P_{|x_i=x}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = P(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Définition 1.2.1 – Quantificateur universel

On considère un prédicat P , de paramètre $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, n étant un entier naturel non nul.

On définit alors le prédicat

$$\forall x \in E_i, P_{|x_i=x}$$

de paramètre $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$, vrai uniquement lorsque $P(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$ est vrai pour tout élément x de E_i .

Définition 1.2.2 – Quantificateur existentiel

On considère un prédicat P , de paramètre $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, n étant un entier naturel non nul.

On définit alors le prédicat

$$\exists x \in E_i, P_{|x_i=x}$$

de paramètre $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$, vrai uniquement lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $P(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$ soit vrai.

La proposition "Pour tout réel x , on a $x^2 + 1 \geq 2x$ " peut donc se réécrire ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$$

Quant à elle, la proposition "Il existe un entier naturel n tel que $\frac{2n+1}{n+1} = 5$ " peut se réécrire :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \frac{2n+1}{n+1} = 5$$

Exercice 1.2.3

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}_+, x + y \geq 2$
2. $\forall y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, x + y \geq 2$
3. $\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, x + y \geq 2$
4. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, a \leq b$
5. $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a \leq b$

Correction.

1. Soit $y \in \mathbb{R}_+$ et posons $x = 2$. x est bien dans \mathbb{R}_+ et on a bien $x + y \geq 2$. Il est donc vrai que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x + y \geq 2$. La proposition « $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}_+, x + y \geq 2$ » est donc vraie.
2. La proposition « $\forall y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, x + y \geq 2$ » se lit « Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x + y \geq 2$ ». Elle est fausse : en posant par exemple $y = 0$ et $x = 0$, y et x sont bien deux éléments de \mathbb{R}_+ mais $x + y < 2$.
3. La proposition « $\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, x + y \geq 2$ » se lit « Il existe $y \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x + y \geq 2$ ». Cette propriété est vraie : si l'on pose, par exemple, $y = 2$, on a bien $x + y \geq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe bien un réel b tel que $a \leq b$: on peut choisir, par exemple, de prendre $b = a$. La propriété « $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, a \leq b$ » est donc vraie.
5. La propriété « $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a \leq b$ » se lit « Il existe un réel b tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $a \leq b$ »^a. Elle est fausse, un tel b n'existe pas. En effet, pour tout $b \in \mathbb{R}$, il existe toujours un réel a tel que a ne soit pas inférieur ou égal à b : il suffit de prendre $a = b + 1$. La propriété « $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a \leq b$ » est donc fausse.

a. Autrement dit, \mathbb{R} serait un ensemble majoré, ce qui est évidemment faux.

Remarque 1.2.4 : Ordre des quantificateurs

Dans la proposition 2 de l'exercice précédent, remarquons que x et y ne dépendent pas l'un de l'autre. La proposition « $\forall y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, x + y \geq 2$ » peut donc aussi se réécrire « $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, x + y \geq 2$ ».

Par contre, les propositions 4 et 5 montrent que permuter des quantificateurs de type différents peut complètement changer le sens d'un prédicat.

Il existe aussi un pseudo-quantificateur permettant de préciser l'existence et l'unicité d'un élément :

Définition 1.2.5 – Pseudo-quantificateur d'existence et d'unicité

On considère un prédicat P , de paramètre $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, n étant un entier naturel non nul. On définit alors le prédicat

$$\exists! x \in E_i, P_{|_{x_i=x}}$$

de paramètre $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$, vrai uniquement lorsqu'il existe **un, et un seul** $x \in E$ tel que $P(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$ soit vrai.

Remarque 1.2.6 : Les (pseudo-)quantificateurs ne sont pas des abréviations !

Ces (pseudo-)quantificateurs ont pour objectif de nous permettre de formaliser le plus précisément possible les prédicats auxquels nous aurons affaire. Ils ne doivent jamais servir d'abréviation : en particulier, ils ne doivent pas apparaître en plein milieu d'un paragraphe dont le but n'est pas de formaliser un prédicat.

Par exemple, il serait incorrect d'écrire « f est une fonction bornée sur \mathbb{R} donc $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x$ dans \mathbb{R} , $f(x) \leq M$ ». Dans ce cas, il faut écrire la phrase en toutes lettres :

f est une fonction bornée, donc il existe un réel M tel que pour tout réel x on a $f(x) \leq M$.

Remarque 1.2.7 : Variables muettes

Supposons définies deux fonctions f et g , définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

Considérons les prédicats suivants :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M \quad (1.1)$$

$$\exists S \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq S \quad (1.2)$$

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq M \quad (1.3)$$

Les propositions (1.1) et (1.2) ont même valeur de vérité (on dit qu'elles sont *équivalentes*) : elle disent toutes deux qu'il existe un réel que f ne peut pas dépasser, peu importe le nom de ce réel. Les variables M et S peuvent donc être renommées à loisir, sans changer le sens de la proposition : on parle alors de *variables muettes*.

Cela a aussi pour conséquence que M et S n'ont aucune existence propre en dehors des propositions (1.1) et (1.2) respectivement. Par exemple, le paragraphe suivant n'est pas correctement formulé.

Incorrect !

On sait que

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

donc $\underbrace{f(10) \leq M}_{M \text{ n'est pas défini !}} .$

A la place, on peut donner à M une existence globale en le définissant dans le contexte du paragraphe.

Correct !

On sait qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \leq M$. Alors $f(10) \leq M$.

La proposition (1.3) n'est a priori équivalente ni à la proposition (1.1), ni à la proposition (1.2) puisqu'elle ne concerne pas la même fonction, et rien ne dit que f et g sont identiques.

1.3 Opérations sur les prédicats

1.3.1 Conjonction ("et")

Définition 1.3.1 – Conjonction

Soient P et Q deux prédicats, de paramètre variant dans un ensemble E .

La *conjonction* de P et Q , notée P et Q , est un prédicat dont les valeurs de vérité sont données par le tableau suivant :

P	Q	$P \text{ et } Q$
Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai

Autrement dit, le prédicat « $P \text{ et } Q$ » est vrai uniquement lorsque P et Q sont simultanément vrais.

Exemple 1.3.2

Le prédicat "Cette personne est musicienne et sait faire du vélo" est vrai uniquement lorsque la personne sous-entendue remplit les deux critères suivants :

- Elle est musicienne.
- Elle sait faire du vélo.

Si une personne donnée sait faire du vélo mais n'est pas musicienne, alors ce prédicat est faux pour cette personne.

1.3.2 Disjonction ("ou")

Définition 1.3.3 – Disjonction

Soient P et Q deux prédicats de même paramètre.

La *disjonction* de P et Q , notée « $P \text{ ou } Q$ », est un prédicat dont les valeurs de vérité sont données par le tableau suivant :

P	Q	$P \text{ ou } Q$
Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Vrai	Vrai

Autrement dit, le prédicat $P \text{ ou } Q$ est vrai uniquement lorsqu'au moins l'un des prédicats P et Q est vrai.

Remarque 1.3.4

Remarquons que la disjonction n'est pas exclusive : elle est vraie dès lors qu'au moins l'un des prédicats concernés est vrai, ce qui inclut le cas où ils sont tous deux vrais.

1.3.3 Négation

Définition 1.3.5 – Négation

Soit P un prédicat dépendant d'un paramètre variant dans un ensemble E .

La *négation* de P , notée $\text{non } P$, est un prédicat dont les valeurs de vérité sont données par le tableau suivant :

P	$\text{non } P$
Faux	Vrai
Vrai	Faux

Il est important de savoir écrire la négation d'un prédicat écrit avec des quantificateurs. Par exemple, la négation du prédicat « Tous les chats sont gris » est « Il existe un chat qui n'est pas gris ». Autrement dit, si l'on note \mathcal{C} l'ensemble de

tous les chats, la négation de « $\forall c \in \mathcal{C}, c$ est gris » est « $\exists c \in \mathcal{C}, \text{non}(c \text{ est gris})$ ».

De la même façon, la négation du prédicat « Il existe une guitare à plus de 13 cordes » est « Toutes les guitares ont strictement moins de 13 cordes ». Autrement dit, en notant \mathcal{G} l'ensemble des guitares, la négation de « $\exists g \in \mathcal{G}, g$ a plus de 13 cordes » est « $\forall g \in \mathcal{G}, \text{non}(g \text{ a plus de 13 cordes})$ ».

Plus généralement, on a la propriété suivante :

Propriété 1.3.6 – Négation et quantificateurs

On considère un prédicat P , de paramètre $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, n étant un entier naturel non nul.

On fixe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Alors :

- La négation de « $\forall x \in E_i, P_{|x_i=x}$ » est « $\exists x \in E_i, \text{non}(P_{|x_i=x})$ ».
- La négation de « $\exists x \in E_i, P_{|x_i=x}$ » est « $\forall x \in E_i, \text{non}(P_{|x_i=x})$ ».

Exercice 1.3.7

Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2+2} > 2$.
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [A; +\infty[, \frac{1}{x} < \varepsilon$.

1.3.4 Implication

Considérons les deux prédicats P et Q définis en posant, pour tout $x \in \mathbb{N}$:

$P(x)$: "x est un multiple de 3"

$Q(x)$: "x est un entier pair"

À partir de ces deux prédicats, on peut en construire un nouveau : "Si P est vrai, alors Q est vrai". Il s'agit d'un nouveau prédicat, lui aussi dépendant d'un entier naturel, qui est appelé *implication de Q par P* . Cette implication n'est pas toujours vraie : par exemple, si l'on choisit de poser $x = 3$, alors x est bien un multiple de 3 (donc $P(3)$ est vrai) mais n'est pas un entier pair (donc $Q(3)$ est faux).

Considérons maintenant le prédicat défini en posant, pour tout $x \in \mathbb{N}$:

$R(x)$: "x est un multiple de 4"

Cette fois, l'implication de Q par R n'est jamais fautive : il est impossible de trouver un multiple de 4 qui ne soit pas pair. L'implication de Q par R est donc toujours vraie : on dit que *R implique Q* .

Finalement, si P et Q sont deux prédicats dépendant d'un paramètre variant dans un ensemble E , alors l'implication de Q par P n'est fautive que dans le cas où P est vraie sans que Q ne le soit.

Cela nous permet de définir l'implication logique :

Définition 1.3.8 – Implication et réciproque

Soient P et Q deux prédicats, de paramètre variant dans un ensemble donné E . Alors l'implication de Q par P est un prédicat, noté " $P \implies Q$ ", dont les valeurs de vérité sont données par le tableau suivant :

P	Q	$P \implies Q$
Faux	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai

Si le prédicat $P \implies Q$ est vrai pour tout élément de E , on dit que P implique Q .
Le prédicat $Q \implies P$ est appelé *réciroque* de $P \implies Q$.

Remarque 1.3.9

Il n'y a qu'un seul cas où l'implication $P \implies Q$ est fausse : quand P est vrai mais Q est faux.
Cela signifie aussi que si P est faux, l'implication $P \implies Q$ est automatiquement vraie. D'un point de vue purement logique, l'implication

$$2 = -13 \implies 6 < -1$$

est donc vraie (bien que les deux prédicats qui la composent soient évidemment faux).

Méthode 1.3.10 : Déterminer si un prédicat en implique un autre

Considérons deux prédicats P et Q , de paramètre variant dans un ensemble E .

Si l'on souhaite prouver que P implique Q , il suffit que montrer que pour tout paramètre x de E , si $P(x)$ est vrai, alors $Q(x)$ l'est aussi.

Au contraire, si on souhaite montrer que l'implication $P \implies Q$ n'est pas toujours vraie, il suffit de prouver l'existence d'un élément x de E tel que $P(x)$ soit vrai sans que $Q(x)$ ne le soit, par exemple en cherchant un *contre-exemple*.

Exemple 1.3.11

Beaucoup de théorèmes peuvent être écrits sous forme d'implication : par exemple, le théorème de Pythagore dit que pour tout triangle ABC du plan euclidien, l'implication suivante est toujours vraie :

$$ABC \text{ est rectangle en } B \implies AB^2 + BC^2 = AC^2$$

La réciproque du théorème de Pythagore est aussi vraie :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \implies ABC \text{ est rectangle en } B$$

Exercice 1.3.12

On considère une fonction f définie sur $[0; 1]$, à valeurs dans \mathbb{R} et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que :

$$f \text{ est croissante sur } [0; 1] \implies \forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1]$$

La réciproque est-elle vraie ?

Correction. Supposons que f est croissante sur $[0; 1]$. Alors, pour tout $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq x \leq 1$. f étant croissante sur $[0; 1]$, on obtient par définition

$$0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1$$

et $f(x) \in [0; 1]$.

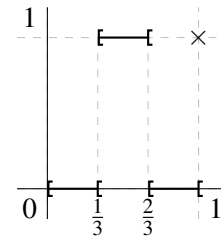
On a donc bien l'implication

$$f \text{ est croissante sur } [0; 1] \implies \forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1]$$

Cependant, sa réciproque est fausse. En effet, considérons la fonction f définie par

$$f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; \frac{1}{3}[\\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[\\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{3}; 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Représentation graphique de f

Alors :

- f est bien définie sur $[0; 1]$, à valeurs dans \mathbb{R} .
- $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
- Pour tout $x \in [0; 1]$, on a bien $f(x) \in [0; 1]$ puisque $f(x)$ vaut 0 ou 1.

Cependant, f n'est pas croissante : en effet, $f(\frac{1}{3}) = 1 > f(\frac{2}{3}) = 0$ alors que $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$.

Il existe donc une fonction f définie sur $[0; 1]$, à valeurs dans \mathbb{R} , telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ pour laquelle on a

$$\forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1]$$

alors que f n'est pas croissante sur $[0; 1]$.

L'implication

$$\forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1] \implies f \text{ est croissante sur } [0; 1]$$

n'est donc pas toujours vraie.

1.3.5 Équivalence

Il arrive fréquemment que deux prédicats P et Q , dépendant d'un même paramètre x dans un ensemble E , aient les mêmes valeurs de vérité : on dit alors qu'ils sont *équivalents*. Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, les prédicats « n est un multiple de 3 » et « $\frac{n}{3}$ est un entier » sont équivalents : si l'un est vrai, l'autre aussi.

Définition 1.3.13 – Équivalence

Soient P et Q deux prédicats, de paramètre variant dans un ensemble E .

L'*équivalence* de P et Q , notée $P \iff Q$, est un prédicat dont les valeurs de vérité sont données par le tableau suivant :

P	Q	$P \iff Q$
Faux	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai

Autrement dit, le prédicat $P \iff Q$ est vrai uniquement lorsque P et Q sont tous deux vrais ou tous deux faux.

Si le prédicat $P \iff Q$ est vrai pour tout élément de E , on dit que P et Q sont *équivalents*.

Propriété 1.3.14 – Double implication

Soient P et Q deux prédicats de même paramètre. Alors :

$$(P \iff Q) \iff ((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P))$$

Démonstration. Étudions les valeurs de vérité des prédicats $P \iff Q$ et $((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P))$:

P	Q	$P \iff Q$	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)$
Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Faux	Vrai	Faux	Faux
Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai

Les prédicats $P \iff Q$ et $((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P))$ ont mêmes valeurs de vérité et sont donc équivalents. \square

Méthode 1.3.15 : Étudier une équivalence

onsidérons deux prédicats P et Q de même paramètre.

- Si l'on veut montrer que P et Q sont équivalents, il suffit de montrer que P implique Q et que Q implique P .
- A contrario, si l'on souhaite prouver que P et Q ne sont pas équivalents, il suffit de trouver un cas pour lequel l'un est vrai sans que l'autre ne le soit.

Exemple 1.3.16

Le théorème de Pythagore et sa réciproque peuvent être synthétisés en une équivalence. Pour tout triangle ABC du plan euclidien :

$$ABC \text{ est rectangle en } B \iff AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Exercice 1.3.17

Montrer que l'équivalence suivante est vraie pour tout réel x :

$$\frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2} = 1 \iff x = 1$$

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2} = 1 \iff 2x^2 - 2x + 3 = x^2 + 2$$

En effet, l'implication de gauche à droite s'obtient en multipliant par $x^2 + 2$, et celle de droite à gauche s'obtient en divisant par ce même terme.

Continuons :

$$2x^2 - 2x + 3 = x^2 + 2 \iff 2x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2 = 0$$

L'implication de droite à gauche s'obtient en soustrayant $x^2 + 2$ des deux membres de l'égalité, l'implication réciproque s'obtient en ajoutant ce même terme.

On continue ainsi, en s'assurant que toutes les implications et toutes les réciproques sont justifiées :

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2} = 1 &\iff 2x^2 - 2x + 3 = x^2 + 2 \\ &\iff 2x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2 = 0 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff (x - 1)^2 = 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

Finalement, on a bien l'équivalence

$$\frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2} = 1 \iff x = 1$$

Propriété 1.3.18 – Équivalence et négation

— Soit P un prédicat. Alors

$$\text{non}(\text{non}P) \iff P$$

— Soient P et Q deux prédicats de mêmes paramètres. Alors :

$$(P \iff Q) \iff ((\text{non}P) \iff (\text{non}Q))$$

Démonstration. Pour un prédicat P :

P	$\text{non}P$	$\text{non}(\text{non}P)$
Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Vrai

donc P et $\text{non}(\text{non}P)$ ont mêmes valeurs de vérité et sont équivalents.

Soient P et Q deux prédicat de même paramètre.

P	Q	$P \iff Q$	$\text{non}P$	$\text{non}Q$	$(\text{non}P) \iff (\text{non}Q)$
Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Faux	Vrai	Faux	Faux
Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux	Vrai

Les prédicats $P \iff Q$ et $(\text{non}P) \iff (\text{non}Q)$ ont mêmes valeurs de vérité et sont équivalents. □

Méthode 1.3.19

Pour montrer que deux prédicats P et Q , dépendant d'un même paramètre, sont équivalents, on peut choisir de montrer que leurs négations sont équivalentes.

Exercice 1.3.20

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$x^2 + 3x + 3 \neq 1 \iff (x \neq -1 \text{ et } x \neq -2)$$

Propriété 1.3.21 – Raisonnement par contraposée

Soient P et Q deux prédicat de même paramètre. Alors

$$(P \implies Q) \iff ((\text{non}Q) \implies (\text{non}P))$$

Démonstration. Nous avons les valeurs de vérité suivantes :

P	Q	$P \implies Q$	$\text{non}P$	$\text{non}Q$	$(\text{non}Q) \implies (\text{non}P)$
Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux	Vrai

Les prédicats $P \implies Q$ et $(\text{non}Q) \implies (\text{non}P)$ ont mêmes valeurs de vérité et sont équivalents. □

Exercice 1.3.22

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \implies (a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ et } c = 0)$$

Correction. Raisonnons par contraposée et supposons que le prédicat $a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ et } c = 0$ soit faux. Autrement dit, on suppose que a, b et c ne sont pas tous les trois nuls : au moins l'un d'eux est non nul.

Supposons que $a \neq 0$. Alors $a^2 + \underbrace{b^2 + c^2}_{\geq 0} \geq a^2 > 0$. De même, si $b \neq 0$, alors $a^2 + b^2 + c^2 \geq b^2 > 0$. Enfin, si $c \neq 0$, alors

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq c^2 > 0.$$

On a donc bien

$$\text{non}(a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ et } c = 0) \implies a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

et par contraposée

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \implies (a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ et } c = 0)$$

Lois de Morgan

Considérons le prédicat « Cette personne aime les films d'aventure ou les films d'action ». Ce prédicat est faux pour une personne donnée si et seulement si cette personne n'aime ni les films d'aventure, ni les films d'action : sa négation est donc « Cette personne n'aime pas films d'aventure et n'aime pas les films d'action ».

De la même façon la négation du prédicat « Cette personne aime les romans et les bandes dessinées » est « Cette personne n'aime pas les romans ou n'aime pas les bandes dessinées ».

Cela nous conduit aux *lois de Morgan* :

Propriété 1.3.23 – Lois de Morgan

Soient deux prédicats P et Q de mêmes paramètres. Alors :

$$\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$$

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$$

Démonstration. Il suffit d'étudier les valeurs de vérité des prédicats mis en jeu :

P	Q	$P \text{ ou } Q$	$\text{non}(P \text{ ou } Q)$	$\text{non } P$	$\text{non } Q$	$(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
Faux	Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Faux	Faux
Vrai	Faux	Vrai	Faux	Faux	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux	Faux	Faux

Ainsi, « $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ » et « $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$ » ont même valeurs de vérité et sont équivalents.

Pour le deuxième résultat, on peut raisonner de la même façon ou appliquer ce qui précède à $\text{non } P$ et $\text{non } Q$:

$$\begin{aligned} P \text{ et } Q &\iff (\text{non}(\text{non } P)) \text{ et } (\text{non}(\text{non } Q)) \\ &\iff \text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)) \end{aligned}$$

et par négation :

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$$

□

Exercice 1.3.24

Montrer la proposition suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \neq 0 \implies (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$$

Correction. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Raisonnons par contraposée et montrons que

$$\text{non}(a \neq 0 \text{ et } b \neq 0) \implies \text{non}(ab \neq 0)$$

D'après les lois de Morgan, ce dernier prédicat est équivalent à :

$$(a = 0 \text{ ou } b = 0) \implies ab = 0$$

qui est évidemment vrai.

On a donc bien

$$ab \neq 0 \implies (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$$

Exercice 1.3.25

On considère la fonction

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

La proposition « f est croissante sur \mathbb{R} » ou « f est décroissante sur \mathbb{R} » est-elle vraie ou fausse ?

Dire que f est croissante sur \mathbb{R} revient à dire que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$$

C'est faux : avec $a = -1$ et $b = 0$, on a bien $a \leq b$ et pourtant

$$1 = f(a) > f(b) = 0$$

De la même façon, dire que f est décroissante sur \mathbb{R} revient à dire que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$$

C'est faux : avec $a = 0$ et $b = 1$, on a bien $a \leq b$ et pourtant

$$0 = f(a) < f(b) = 1$$

La proposition « f est croissante sur \mathbb{R} » ou « f est décroissante sur \mathbb{R} » est donc fausse puisque sa négation, « f n'est pas croissante et n'est pas décroissante sur \mathbb{R} » est vraie.

1.4 Raisonnement par l'absurde

Propriété 1.4.1 – Raisonnement par l'absurde

Soit P un prédicat, et F un prédicat toujours faux, sur le même espace de paramètres que P .

Alors :

$$P \iff ((\text{non} P) \implies F)$$

■ *Démonstration.* Voici les valeurs de vérité des prédicats concernés :

P	$\text{non } P$	F	$(\text{non } P) \implies F$
Faux	Vrai	Faux	Faux
Vrai	Faux	Faux	Vrai

P et $(\text{non } P) \implies F$ ont bien les mêmes valeurs de vérité et sont équivalents. □

Méthode 1.4.2 : Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'un prédicat P est vrai, il suffit de montrer que si P est faux, alors une contradiction apparaît.

Exercice 1.4.3

On considère 60 billes, réparties (pas forcément de manière équitable) dans trois sacs.
Montrer qu'au moins un des trois sacs contient moins de 20 billes.

Correction. Supposons que le prédicat « Au moins un des trois sacs contient moins de 20 billes » soit faux, c'est-à-dire que chacun des trois sacs contient strictement plus de 20 billes. Alors, en notant s_1 (respectivement s_2 et s_3) le nombre dans le premier sac (respectivement le deuxième et troisième), on a

$$60 = \underbrace{s_1}_{>20} + \underbrace{s_2}_{>20} + \underbrace{s_3}_{>20} > 20 + 20 + 20 = 60$$

et en particulier, $60 > 60$, ce qui est manifestement faux.

Il est toujours toujours vrai qu'au moins un des trois sacs contient moins de 20 billes.

1.5 Raisonnements par récurrence

1.5.1 Récurrence simple

Propriété 1.5.1 – Récurrence simple

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

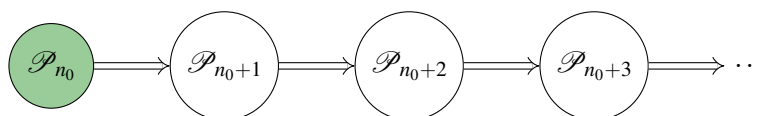
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on considère une proposition notée \mathcal{P}_n . On suppose que :

Initialisation : \mathcal{P}_{n_0} est vraie.

Hérédité : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on a $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.

Alors \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

Si \mathcal{P}_{n_0} est vraie et si $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$...



... alors \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$

Exercice 1.5.2

On se place dans le plan euclidien.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'intersections dans un système formé de n droites est inférieur ou égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons \mathcal{P}_n la propriété « Le nombre d'intersections dans un système formé de n droites est inférieur ou égal à n » et raisonnons par récurrence.

Initialisation : Si aucune droite n'est tracée, il n'y a aucun point d'intersection. Or $\frac{0 \times (0-1)}{2} = 0 = D_0$, et \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons \mathcal{P}_n vraie. Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que le nombre d'intersections dans un système formé de $n+1$ droites est inférieur ou égal à $\frac{(n+1)n}{2}$.

Considérons alors $n+1$ droites. Notons \mathcal{D} l'une d'entre elles. Par hypothèse de récurrence, les n autres droites génèrent moins de $\frac{n(n-1)}{2}$ points d'intersection. De plus, \mathcal{D} peut couper chacune des n autres droites au plus une fois, ce qui génère moins de n points d'intersection.

Le nombre de points d'intersection dans un système formé de $n+1$ droites est donc inférieur ou égal à $\frac{n(n-1)}{2} + n$. Or :

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} + n &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n(n-1+2)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{P}_{n+1} est vraie, ce qui achève la récurrence.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'intersections dans un système formé de n droites est inférieur à $\frac{n(n-1)}{2}$.

1.5.2 Récurrence double

Propriété 1.5.3 – Récurrence double

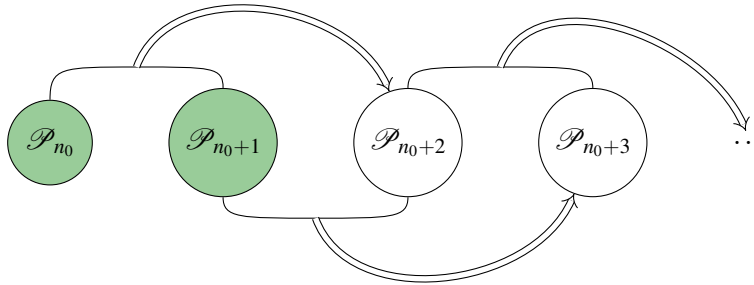
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on considère une proposition notée \mathcal{P}_n . On suppose que :

Initialisation : \mathcal{P}_{n_0} et \mathcal{P}_{n_0+1} sont vraies.

Hérédité : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on a $(\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}) \implies \mathcal{P}_{n+2}$.

Alors \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.



Exercice 1.5.4

On définit une suite (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 - 3 \times 2^n$$

1.5.3 Récurrence forte

Propriété 1.5.5 – Récurrence forte

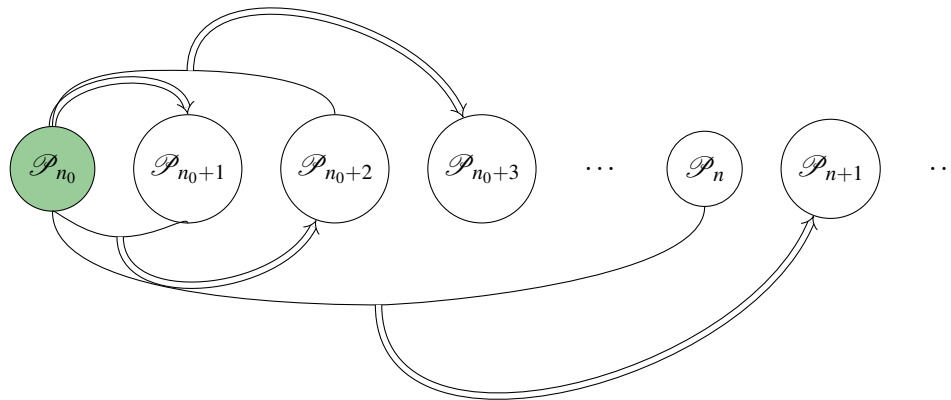
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n_0 \geq n$, on considère une proposition notée \mathcal{P}_n . On suppose que :

Initialisation : \mathcal{P}_{n_0} est vraie.

Hérédité : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on a $(\mathcal{P}_0 \text{ et } \mathcal{P}_1 \text{ et } \dots \text{ et } \mathcal{P}_n) \implies \mathcal{P}_{n+1}$.

Alors \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.



Exercice 1.5.6

Montrer que tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 peut être décomposé en produit de nombres premiers.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, posons \mathcal{P}_n : « n peut être décomposé en produit de nombres premiers ». Raisonnons par récurrence forte.

Initialisation : 2 est lui-même un nombre premier, donc \mathcal{P}_2 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots, \mathcal{P}_n$ soient vraies. Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $n+1$ peut être décomposé en produit de nombres premiers. Deux cas peuvent se présenter :

- Si $n+1$ est lui-même premier, il s'écrit de manière triviale comme produit d'un seul nombre premier : lui-même.
- Si $n+1$ n'est pas premier, alors il admet un diviseur k différent de 1 et de $n+1$. En particulier, $\frac{n+1}{k}$ est un entier compris entre 2 et n , ainsi que k . Or, puisque $\mathcal{P}_{\frac{n+1}{k}}$ et \mathcal{P}_k ont été supposées vraies, $\frac{n+1}{k}$ et k peuvent s'écrire en tant que produit de nombres premiers. Il en est donc de même pour $n+1 = \frac{n+1}{k} \times k$ (en tant que produit de produits de nombres premiers).

Par récurrence forte, on a bien prouvé que tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme produit de nombres premiers.

1.6 Analyse-synthèse

Méthode 1.6.1 : Analyse-synthèse

Lorsque l'on souhaite trouver les objets mathématiques vérifiant un ensemble de conditions données, on peut raisonner par *analyse-synthèse*. Ce raisonnement se déroule en deux temps :

Analyse : On suppose qu'un objet mathématiques vérifie les conditions données et on essaie de le caractériser au maximum.

Synthèse : On vérifie si les caractérisations trouvées à l'étape précédente sont suffisantes pour que toutes les conditions du problème soient vérifiées.

Exercice 1.6.2

Déterminer les fonctions numériques paires et croissantes sur \mathbb{R} .

Correction. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Supposons que f est paire et croissante sur \mathbb{R} .

Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$ par définition d'une fonction croissante. Or, puisque $a \leq b$, on a $-b \leq -a$ donc $f(-b) \leq f(-a)$, toujours par croissance de f sur \mathbb{R} . Cependant, f est paire donc $f(-b) = f(b)$ et $f(-a) = f(a)$, et l'inégalité précédente devient $f(b) \leq f(a)$.

On a donc $f(a) \leq f(b)$ et $f(b) \leq f(a)$, ainsi $f(a) = f(b)$, et ceci pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$.

On en déduit que la fonction f est nécessairement constante sur \mathbb{R} .

Synthèse : Soit f une fonction constante sur \mathbb{R} . En particulier, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k$. Alors :

— f est bien croissante, puisque pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq b$, on a

$$k = f(a) \leq f(b) = k$$

— f est bien paire, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = k = f(x)$$

Conclusion : les fonctions numériques paires et croissantes sur \mathbb{R} sont les fonctions constantes sur \mathbb{R} .

1.7 Exercices

Exercice 1.7.1

Réécrire les assertions suivantes en utilisant les quantificateurs :

1. L'opposé de tout entier naturel est un entier négatif.
2. Pour tout entier relatif, il existe un entier relatif qui lui est strictement supérieur.
3. Pour tout réel x , il existe un entier relatif n tel que $n \leq x$ et $x < n + 1$.
4. Le carré de tout entier relatif impair est un entier naturel pair.
5. f est une fonction croissante sur \mathbb{R} (f étant une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}).
6. Il existe un polynôme à coefficients réels de degré 2 admettant deux racines réelles distinctes.
7. Il existe un polynôme à coefficients réels de degré 3 n'ayant aucune racine réelle.

Correction. 1. " $\forall n \in \mathbb{N}, -n \in \mathbb{Z}$ et $-n \leq 0$ " ou " $\forall n \in \mathbb{N}, -n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$ ".

2. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, m > n$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$.

4. $\forall k \in \mathbb{Z}, \exists k' \in \mathbb{Z}, (2k + 1)^2 = 2k' + 1$.

5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))$.

6. Par exemple :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \neq 0, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \\ a\beta^2 + b\beta + c = 0 \end{cases}$$

7. Par exemple :

$$\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, ax^3 + bx^2 + cx + d \neq 0$$

Exercice 1.7.2

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier. Montrer que ^a

$$\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \text{ est un entier}$$

a. On pourra considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit $(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}})(x + \frac{1}{x})$.

Correction. On peut raisonner par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons \mathcal{P}_n : « $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier ».

Initialisation : On a $x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2$ est un entier donc \mathcal{P}_0 est vrai. De même, $x^1 + \frac{1}{x^1} = x + \frac{1}{x}$ est un entier par hypothèse de l'énoncé, donc \mathcal{P}_1 est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} soient vrais, c'est-à-dire tels que $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ soient des entiers.

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \times \left(x + \frac{1}{x}\right) &= x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}} \\ &= x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} + x^n + \frac{1}{x^n} \end{aligned}$$

donc

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$$

Or, par hypothèse de récurrence, $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sont des entiers, ainsi que $x + \frac{1}{x}$ par hypothèse de l'énoncé.

Ainsi, $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$ est un entier, et \mathcal{P}_{n+2} est vraie.

Finalement, par récurrence double, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \text{ est un entier}$$

Exercice 1.7.3

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \end{cases}$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .

Exercice 1.7.4

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n$$

Exercice 1.7.5

Déterminer les fonctions numériques paires et strictement croissantes sur \mathbb{R} .

Exercice 1.7.6

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 1.7.7

Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} (x-y)(x-z) = 0 \\ (y-x)(y-z) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Exercice 1.7.8 – Raisonnement par l'absurde et TVI

Une voiture a parcouru 60 km en une heure.

Pour tout $t \in [0; 60]$, on note $d(t)$ la distance parcourue, en km, par la voiture à l'instant t (en minutes), depuis l'instant 0.

Pour tout $t \in [0; 40]$, on pose $\Delta(t) = d(t+20) - d(t)$.

On suppose que d est une fonction continue.

1. Soit $t \in [0; 40]$. Que représente $\Delta(t)$?
2. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 20 minutes pendant lequel la voiture a parcouru une distance inférieure ou égale à 20 km.
3. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 20 minutes pendant lequel la voiture a parcouru une distance supérieure ou égale à 20 km.
4. En déduire l'existence de t_0 et t_1 dans $[0; 40]$ tels que $\Delta(t_0) \leq 20$ et $\Delta(t_1) \geq 20$.
5. Prouver qu'il existe un intervalle de temps de 20 minutes pendant lequel la voiture a parcouru exactement 20 km.

Correction. 1. Pour tout $t \in [0; 40]$, $\Delta(t)$ représente la distance parcourue entre les instants t et $t+20$ minutes.
 2. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il n'existe aucun intervalle de temps de 20 minutes pendant lequel la voiture a parcouru une distance inférieure ou égale à 20 km. En particulier, la distance parcourue entre les instants 0 et 20 minutes est strictement supérieure à 20 km, ainsi $\Delta(0) > 20$. De même, $\Delta(20) > 20$ et $\Delta(40) > 20$, ainsi :

$$\Delta(0) + \Delta(20) + \Delta(40) > 60$$

C'est impossible, puisque :

$$\begin{aligned} \Delta(0) + \Delta(20) + \Delta(40) &= d(20) - d(0) + d(40) - d(20) + d(60) - d(40) \\ &= d(60) - d(0) \\ &= 60 \end{aligned}$$

Il existe donc bien un intervalle de temps de 20 minutes pendant lequel la voiture a parcouru une distance inférieure ou égale à 20 km.

3. Le raisonnement est le même : s'il n'existe aucun intervalle de 20 minutes pendant lequel la voiture a parcouru une distance supérieure ou égale à 20 km, alors :

$$60 = \Delta(0) + \Delta(20) + \Delta(40) < 20 + 20 + 20 = 60$$

ce qui est absurde.

Il existe donc bien un intervalle de 20 minutes pendant lequel la voiture a parcouru une distance supérieure ou égale à 20 km.

4. La question 2 dit qu'il existe un intervalle de temps de 20 minutes pendant lequel la voiture a parcouru une distance inférieure ou égale à 20 km : autrement dit, il existe bien un instant $t_0 \in [0; 40]$ tel que la distance parcourue entre les instants t_0 et $t_0 + 20$ soit inférieure ou égale à 20 km. Ainsi, il existe bien $t_0 \in [0; 40]$ tel que $\Delta(t_0) \leq 20$.

La question 3 prouve l'existence de $t_1 \in [0; 40]$ tel que $\Delta(t_1) \geq 20$.

5. Résumons : Δ est continue sur $[0; 40]$ (car d l'est), t_0 et t_1 sont deux réels de $[0; 40]$ vérifiant $\Delta(t_0) \leq 20$ et $\Delta(t_1) \geq 20$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il donc un réel t_2 entre t_0 et t_1 tel que $\Delta(t_2) = 20$: autrement dit, il existe un intervalle de 20 minutes (il s'agit de $[t_2; t_2 + 20]$) pendant lequel la voiture a parcour exactement 20 km.

Exercice 1.7.9 – Analyse-synthèse

On cherche les fonctions f à valeurs dans \mathbb{R} , définies et dérivables sur \mathbb{R} , telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2xf(x) = 0 \quad (\star)$$

1. **Analyse** : Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

On suppose que f vérifie la propriété (\star) .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = f(x)e^{-x^2}$.

- (a) Montrer que φ est dérivable sur \mathbb{R} et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = 0$$

- (b) En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{x^2}$$

Ainsi, nous avons montré que si f est solution du problème, alors f est de la forme $x \mapsto Ce^{x^2}$ où C est une constante réelle. Cela achève la phase d'analyse : on a supposé que f était solution du problème pour essayer de la caractériser.

Passons maintenant à la **synthèse** : on vérifie que les potentielles solutions trouvées sont réellement solutions du problème.

2. **Synthèse** : soit C un réel et $f : x \mapsto Ce^{x^2}$. Montrer que f est dérivable et vérifie la propriété (\star) .
3. **Conclusion** : Écrire l'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant la propriété (\star) .

Correction. 1. (a) La fonction $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} car polynomiale, et la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} , ainsi $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur \mathbb{R} .

De plus, f est par hypothèse dérivable sur \mathbb{R} , donc φ est dérivable sur \mathbb{R} . De plus, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= f'(x)e^{-x^2} + f(x) \times (-2xe^{-x^2}) \\ &= f'(x)e^{-x^2} - 2xf(x)e^{-x^2} \\ &= \underbrace{(f'(x) - 2xf(x))}_{=0} e^{-x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque f vérifie la propriété (\star) .

- (b) D'après la question précédente, la fonction φ est constante puisque sa dérivée est nulle. Il existe donc un réel

C tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = C$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)e^{-x^2} = C$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{x^2}$$

2. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto Ce^{x^2}$. En tant que composées de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ est dérivable sur \mathbb{R} : il en est donc de même pour f puisque C est une constante.

De plus, pour tout réel x :

$$f'(x) = 2Cxe^{x^2}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) - 2xf(x) &= 2Cxe^{x^2} - 2x \times Ce^{x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

f vérifie donc bien la propriété (\star) .

3. L'ensemble des fonctions numériques dérivables sur \mathbb{R} vérifiant (\star) est donc

$$\left\{ x \mapsto Ce^{x^2}, C \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 1.7.10

Réécrire les assertions suivantes avec les quantificateurs, ainsi que leurs négations.

- Il existe un réel M tel que, pour tout réel x , si x est supérieur à M alors x^2 est supérieur à M .
- Pour tout réel strictement positif A , il existe un réel M tel que pour tout réel strictement positif x , si x est strictement supérieur à M alors $\frac{1}{x} \leq A$.
- Il existe trois réels a, b et c non tous nuls tels que pour tout réel x on ait $ax + be^x + c \ln(1 + x^2) = 0$.
- Tout élément de $]-\infty; 1]$ est inférieur à tous les éléments de $[-1; +\infty[$.
- La somme de deux éléments quelconques de \mathbb{R}_+ est encore dans \mathbb{R}_+ .
- Le produit de deux réels est nul si et seulement si au moins l'un des deux réels est nul.
- L'équation $x^2 + x = 0$, d'inconnue $x \in [0; +\infty[$, admet deux solutions distinctes.

Exercice 1.7.11

Les assertions de l'exercice 1.7.10 sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 1.7.12

Montrer que :

$$\forall \varepsilon \in]0; +\infty[, \exists n_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \frac{n}{n^2 + 1} < \varepsilon$$

Correction. Soit $\varepsilon \in]0; +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. Remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^2+1} < \varepsilon &\iff \frac{n^2+1}{n} > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\iff n + \frac{1}{n} > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

En particulier, si $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, alors $n + \frac{1}{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $\frac{n}{n^2+1} < \varepsilon$.

En posant $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \frac{n}{n^2+1} < \varepsilon$$

L'assertion

$$\forall \varepsilon \in]0; +\infty[, \exists n_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \frac{n}{n^2+1} < \varepsilon$$

est donc vraie.

Exercice 1.7.13

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} - 2\frac{n+2}{n+1}u_{n+1} + \frac{n+2}{n}u_n = 0$$

Montrer qu'il existe un unique couple de réels (α, β) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \alpha n + \beta n^2$$

1.8 DM conducteur

Exercice 1

Pour chacune des assertions suivantes :

- La réécrire avec les quantificateurs.
- Écrire sa négation avec les quantificateurs.
- Décider de sa véracité, en justifiant votre affirmation.

PTS 0,5+0,5+1 pour chaque question

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{3}{p} \geq 1$.
2. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2p} \in \mathbb{N}^*$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1+n}{2+n} - \frac{1}{2} \geq 0$.
4. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1+n}{2+n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{100}$.
5. Il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq \eta$, alors $\frac{1+n}{2+n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{100}$.
6. Si la somme de trois entiers naturels est inférieure ou égale à 3, alors ces trois entiers sont inférieurs ou égaux à 1.
7. Si la somme de trois entiers naturels est supérieure ou égale à 4, alors au moins l'un d'entre eux est supérieur ou égal à 2.

Correction. 1. — Assertion d'origine : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{p} \geq 1$.

— Négation : $\exists p \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{p} < 1$.

— La négation est vraie puisque, par exemple, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < 1$. L'assertion d'origine est donc fausse.

2. — Assertion d'origine : $\exists p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2p} \in \mathbb{N}^*$.

— Négation : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2p} \notin \mathbb{N}^*$.

— La négation est vraie. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $p \geq 1$ donc $2p \geq 2$ et $0 < \frac{1}{2p} < 1$. $\frac{1}{2p}$ ne peut donc pas être un entier. L'assertion d'origine est donc fausse.

3. — Assertion d'origine : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} - \frac{1+n}{2+n} > 0$.

— Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} - \frac{1+n}{2+n} \leq 0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1+n}{2+n} - \frac{1}{2} &= \frac{2 \times (1+n) - (2+n) \times 1}{2(2+n)} \\ &= \frac{2+2n-2-n}{2(2+n)} \\ &= \frac{n}{2(2+n)} \geq 0 \end{aligned}$$

L'assertion d'origine est donc vraie.

4. — Assertion d'origine : $\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1+n}{2+n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{100}$.

— Négation : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1+n}{2+n} - \frac{1}{2} > \frac{1}{100}$.

— L'assertion de départ est vraie (elle est triviale avec $n = 0$).

5. — Assertion d'origine : $\exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq \eta \implies \frac{1+n}{2+n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{100} \right)$.

— Négation : $\forall \eta \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \left(n \geq \eta \text{ et } \frac{1+n}{2+n} - \frac{1}{2} > \frac{1}{100} \right)$

— On peut chercher à résoudre cette inéquation. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{1+n}{2+n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{100} &\iff \frac{1+n}{2+n} \leq \frac{1}{100} + \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{1+n}{2+n} \leq \frac{51}{100} \\ &\iff 1+n \leq \frac{51}{100}(2+n) \text{ car } 2+n \geq 0 \\ &\iff n \leq \frac{2 \times 51}{100} + \frac{51}{100}n - 1 \\ &\iff n - \frac{51}{100}n \leq \frac{102}{100} - 1 \\ &\iff \frac{49}{100}n \leq \frac{2}{100} \\ &\iff n \leq \frac{100}{49} \times \frac{2}{100} = \frac{2}{49} \\ &\iff n = 0 \end{aligned}$$

puisque n est un entier naturel et $\frac{2}{49} \in]0; 1[$.

L'assertion de départ est donc fausse. En effet, pour tout $\eta \in \mathbb{N}$, il suffit de considérer un entier naturel n plus grand que η et 1 (par exemple, $\eta + 1$) pour avoir $\frac{1+n}{2+n} - \frac{1}{2} > \frac{1}{100}$.

6. — Assertion d'origine :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^3, (a + b + c \leq 3 \implies a \leq 1 \text{ et } b \leq 1 \text{ et } c \leq 1)$$

— Négation :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{N}^3, (a + b + c \leq 3 \text{ et } (a > 1 \text{ ou } b > 1 \text{ ou } c > 1))$$

— L'assertion de départ est fausse : $0 + 0 + 2 = 2 \leq 3$ alors que $2 > 1$.

7. — Assertion d'origine :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^3, (a + b + c \geq 4 \implies (a \geq 2 \text{ ou } b \geq 2 \text{ ou } c \geq 2))$$

— Négation :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{N}^3, (a + b + c \geq 4 \text{ et } a < 2 \text{ et } b < 2 \text{ et } c < 2)$$

— Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. On va raisonner par contraposée : supposons donc que $a < 2$ et $b < 2$ et $c < 2$. Puisque a, b et c sont des entiers naturels, on a donc $a \leq 1, b \leq 1$ et $c \leq 1$. En sommant, on obtient donc $a + b + c \leq 1 + 1 + 1 < 4$. Ainsi :

$$(a < 2 \text{ et } b < 2 \text{ et } c < 2) \implies a + b + c < 4$$

et par contraposée

$$a + b + c \geq 4 \implies (a \geq 2 \text{ ou } b \geq 2 \text{ ou } c \geq 2)$$

et ceci pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$.

L'assertion de départ est donc vraie.

Exercice 2 – PTS 3

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N}$ tels que

$$(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$$

On rappelle pour tout réel x , on a $x^0 = 1$.

Correction. On peut raisonner par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{P}_n la propriété « Il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ ».

— Initialisation : \mathcal{P}_0 est vraie puisque $(1 + \sqrt{3})^0 = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{3}$. Il suffit donc de prendre $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, qui sont bien des entiers naturels.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons \mathcal{P}_n vraie. Autrement dit, on suppose qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie, c'est-à-dire qu'il existe $(a_{n+1}, b_{n+1}) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$(1 + \sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$. On a :

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3})^{n+1} &= (1 + \sqrt{3})^n \times (1 + \sqrt{3}) \\ &= (a_n + b_n\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= a_n + a_n\sqrt{3} + b_n\sqrt{3} + b_n\sqrt{3}^2 \\ &= a_n + 3b_n + (a_n + b_n)\sqrt{3} \\ &= a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3} \end{aligned}$$

en posant $a_{n+1} = a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. Puisque a_n et b_n sont des entiers naturels, a_{n+1} et b_{n+1} le sont aussi, et \mathcal{P}_{n+1} est bien vérifiée, ce qui achève la récurrence.

Exercice 3 – PTS 3

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{nu_n}{n+2} + \frac{2u_{n+1}(-n-1)}{n+2} + u_{n+2} = 0$$

Montrer qu'il existe un unique couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = a + \frac{b}{n}$$

Correction. Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

— **Analyse :** supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $u_n = a + \frac{b}{n}$. En particulier, avec $n = 1$ et $n = 2$, on obtient le système suivant, que l'on peut résoudre :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b &= u_1 \\ a + \frac{1}{2}b &= u_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} b = u_1 - a \\ a + \frac{1}{2}(u_1 - a) = u_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = u_0 - a \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}u_1 = u_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = u_0 - (2u_2 - u_1) \\ a = 2u_2 - u_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 2u_1 - 2u_2 \\ a = 2u_2 - u_1 \end{cases} \end{aligned}$$

a et b sont donc bien déterminés de manière unique.

— **Synthèse :** posons $a = 2u_2 - u_1$ et $b = 2u_1 - 2u_2$. On va raisonner par récurrence double : pour tout $n \in \mathbb{N}^n$, on considère la propriété $\mathcal{P}_n : \ll u_n = a + \frac{b}{n} \gg$.

— **Initialisation :** \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont vraies : a et b ont justement été choisis pour cela !

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} sont vraies et montrons que \mathcal{P}_{n+2} est vraie. Par définition

de la suite (u_n) , on a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} &= -\frac{n}{n+2}u_n + \frac{2(n+1)}{n+2}u_{n+1} \\
 &= \frac{1}{n+2}(-nu_n + 2(n+1)u_{n+1}) \\
 &= \frac{1}{n+2}\left(-n\left(a + \frac{b}{n}\right) + 2(n+1)\left(a + \frac{b}{n+1}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{n+2}(-an - b + 2(n+1)a + 2b) \\
 &= \frac{1}{n+2}(-an + 2na + 2a + b) \\
 &= \frac{1}{n+2}(a(n+2) + b) \\
 &= a + \frac{b}{n+2}
 \end{aligned}$$

donc \mathcal{P}_{n+2} est vraie, ce qui achève la récurrence.

Conclusion : il existe bien un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + \frac{b}{n}$$

Chapitre 2

Notions sur les ensembles

2.1	Rappels sur les ensembles usuels	38
2.2	Notions élémentaires sur les ensembles	38
2.2.1	Définitions	38
2.2.2	Opérations sur les ensembles	41
2.2.3	Recouvrements disjoints et partitions	46
2.3	Exercices	47
2.4	DM conducteur	48

2.1 Rappels sur les ensembles usuels

Rappelons les ensembles essentiels, vus au lycée, avec lesquels nous allons continuellement travailler.

- \mathbb{N} est l'ensemble des *entiers naturels*, c'est-à-dire des entiers positifs : $0, 1, 2, 3, \dots$
- \mathbb{Z} est l'ensemble des *entiers relatifs*, c'est-à-dire des entiers positifs ou négatifs : $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
- \mathbb{D} est l'ensemble des *nombre décimaux*, c'est-à-dire des nombres x pour lesquels existe un entier naturel p tel que $10^p \times x$ soit un entier relatif¹. Par exemple, -5.237 est un nombre décimal, puisque $10^3 \times (-5.237) = -5237$ est un entier relatif.
- \mathbb{Q} est l'ensemble des *nombre rationnels*, c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier naturel non nul. Par exemple, $\frac{3}{7}$ est un rationnel, ainsi que $\frac{-12}{134}$.
- \mathbb{R} est l'ensemble des *nombre réels*, incluant les nombres rationnels et les nombres irrationnels, comme $\sqrt{2}$.
- \mathbb{C} est l'ensemble des *nombre complexes*, auxquels est consacré tout un chapitre.

On a la chaîne d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

À ces ensembles, on peut ajouter un astérisque (*) en exposant pour préciser que l'on exclut 0, ou un + (respectivement un -) en indice pour préciser, lorsque cela a un sens, que l'on ne garde que les termes positifs (respectivement négatifs).

Par exemple, \mathbb{R}_+ est l'ensemble des réels positifs, et \mathbb{Q}_-^* est l'ensemble des rationnels strictement négatifs.

2.2 Notions élémentaires sur les ensembles

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1 – Ensemble

- Un *ensemble* est une collection d'objets, appelé *éléments*.
- Soit A un ensemble. Si x est un élément de A , on dit que x *appartient* à A , ce que l'on note $x \in A$. Sinon, on note $x \notin A$.
- Un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé *ensemble vide* et est noté \emptyset .

Un ensemble peut être défini en énumérant tous ses éléments, comme par exemple l'ensemble

$$A = \{1, 3, 5, 9\}$$

On dit alors que cet ensemble est défini par *extension*.

On peut aussi le définir en citant les conditions que doivent vérifier ses éléments, comme par exemple :

$$B = \{n \in \mathbb{N}, 7 \text{ divise } n\}$$

qui est l'ensemble des entiers naturels divisibles par 7. Dans ce cas, on dit que cet ensemble a été défini par *compréhension*.

Remarque 2.2.2

Lorsque l'on définit un ensemble par extension ou par compréhension, cet ensemble se note avec des accolades. L'ordre des éléments n'a alors aucune importance : les ensembles $\{1, 2, 3\}$ et $\{3, 1, 2\}$ sont exactement les mêmes. De même, le nombre d'occurrences d'un élément dans l'écriture d'un ensemble est sans importance : si un élément apparaît plusieurs fois, on peut n'en conserver qu'une seule occurrence sans modifier l'ensemble en question. Ainsi, les ensembles $\{1, 2, 3, 2\}$ et $\{1, 2, 3\}$ sont identiques.

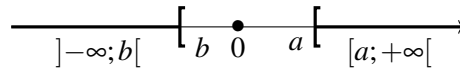
1. Plus simplement, un nombre est *décimal* s'il comporte un nombre fini de chiffres après la virgule.

Définition 2.2.3 – Intervalles non bornés - notation

Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

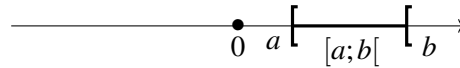
- On note $]a; +\infty[$ l'ensemble des réels strictement supérieurs à a .
- On note $]-\infty; a[$ l'ensemble des réels strictement inférieurs à a .
- Les deux *intervalles* précédents sont dits *ouverts* en a (ils ne contiennent pas a).
- On note $[a; +\infty[$ l'ensemble des réels supérieurs ^a à a .
- On note $]-\infty; a]$ l'ensemble des réels inférieurs à a .
- Les deux *intervalles* précédents sont dits *fermés* en a (ils contiennent a).
- $]-\infty; +\infty[$ est l'ensemble \mathbb{R} tout entier.

a. On remarquera que « supérieur », sans préciser « strictement », signifie « supérieur ou égal ». Il en est de même pour « inférieur ».

**Définition 2.2.4 – Intervalles bornés - notation**

Pour tous réels a et b :

- On note $[a; b]$ l'ensemble des réels supérieurs à a et inférieurs à b . Cet intervalle est dit *fermé*.
- On note $]a; b[$ l'ensemble des réels strictement supérieurs à a et inférieurs à b . Cet *intervalle* est dit *ouvert* en a et *fermé* en b .
- On note $[a; b[$ l'ensemble des réels supérieurs à a et strictement inférieurs à b . Cet *intervalle* est dit *fermé* en a et *ouvert* en b .
- On note $]a; b]$ l'ensemble des réels strictement supérieurs à a et strictement inférieurs à b . Cet *intervalle* est dit *ouvert*.

**Remarque 2.2.5**

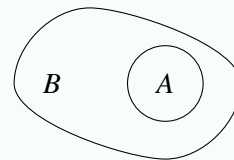
Ces intervalles peuvent être vides : par exemple, $[3; -1]$ est vide puisqu'aucun réel n'est supérieur à 3 et inférieur à -1 en même temps.

Remarque 2.2.6 : Intervalle d'entiers - notation

Soient a et b deux entiers relatifs avec $a \leq b$. On note $\llbracket a; b \rrbracket$ l'ensemble de tous les entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq k \leq b$. Par exemple, $\llbracket -2; 3 \rrbracket = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Définition 2.2.7 – Inclusion

Soient A et B deux ensembles. Lorsque tout élément de A est aussi un élément de B , on dit que A est *inclus* dans B (ou que B *contient* A), ce que l'on note $A \subset B$.



Attention !

Il ne faut pas confondre les symboles \in et \subset , qui n'ont pas du tout la même signification !
Par exemple, 7 est un élément de $\{4, 7, 2\}$ donc $7 \in \{4, 7, 2\}$. Cependant, dire que 7 est inclus dans $\{4, 7, 2\}$, ou écrire

que « $7 \subset \{4, 7, 2\}$ », n'a aucun sens puisque 7 n'est pas un ensemble.

Remarque 2.2.8

Si A est un ensemble, on a toujours $A \subset A$ et $\emptyset \subset A$.

Cette dernière inclusion peut sembler étrange, mais est tout à fait logique : dire que $\emptyset \subset A$ revient à dire que « Tout élément de \emptyset est élément de A ». Or, la *négarion* de cette phrase est « Il existe un élément de \emptyset qui n'est pas dans A ». Cette négation est fausse, puisqu'il n'existe par définition aucun élément dans \emptyset .

Exemple 2.2.9

On a par exemple

$$\{1, 3, 6\} \subset \{1, 5, 3, 2, 6\}$$

puisque tous les éléments de $\{1, 3, 6\}$ sont aussi dans $\{1, 5, 3, 2, 6\}$.

De même, $\llbracket 1; 3 \rrbracket \subset \llbracket 1; 5 \rrbracket$: tout entier compris entre 1 et 3 est aussi compris entre 1 et 5.

Exercice 2.2.10

On pose $A = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ est pair}\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ est multiple de } 4\}$. A est-il inclus dans B ? B est-il inclus dans A ? Ces deux ensembles sont-ils égaux ?

Correction. B est inclus dans A : en effet, considérons un élément n de B . Alors n est un entier naturel multiple de 4, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$. En particulier, $n = 2 \times 2k$ où $2k \in \mathbb{N}$, donc n est un entier naturel pair et est un élément de A . Tout élément de B est donc aussi élément de A , de sorte que $B \subset A$.

L'inclusion réciproque est fausse : 2 est un élément de A mais n'est pas un élément de B .

A et B ne sont donc pas le même ensemble.

On a parfois besoin de montrer que deux ensembles sont égaux. Pour cela, il s'agit de montrer que tout élément de l'un est aussi élément de l'autre : c'est la méthode de *double inclusion*.

Propriété 2.2.11 – Double inclusion

Soient A et B deux ensembles. Alors :

$$A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

Définition 2.2.12 – Partie d'un ensemble

Soit A un ensemble. On appelle *partie de A* tout ensemble B inclus dans A . L'ensemble des parties de A est noté $\mathcal{P}(A)$.

Si A est un ensemble, $\mathcal{P}(A)$ est encore un ensemble, dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles (ce sont toutes les parties possibles de A).

Exemple 2.2.13

Soit $A = \{1, 2, 3\}$. Alors

$$\mathcal{P}(A) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \underbrace{\{1, 2, 3\}}_{=A} \right\}$$

2.2.2 Opérations sur les ensembles

Familles, suites et produit cartésien

Définition 2.2.14 – Famille

Soit J un ensemble. En associant, à chaque élément j de J , un objet mathématique x_j , on obtient une *famille* notée $(x_j)_{j \in J}$.

Pour tout $k \in J$, x_k est un *élément* de la famille $(x_j)_{j \in J}$ appelé *terme d'indice k* de la famille $(x_j)_{j \in J}$.

Si J est un ensemble fini, alors la famille $(x_j)_{j \in J}$ est elle-même dite *finie*.

Exemple 2.2.15

Prenons $J = \{-1, 2, 10\}$, et associons :

— À -1 , le nombre 12,

— À 2, le nombre $\sqrt{2}$,

— À 10, le nombre 13,

On obtient ainsi une famille $(x_j)_{j \in \{-1, 2, 10\}}$, avec $x_{-1} = 12$, $x_2 = \sqrt{2}$ et $x_{10} = 13$.

Définition 2.2.16 – Suite

Toute famille $(x_j)_{j \in J}$, où J est une partie de \mathbb{N} , est appelée *suite*.

Exemple 2.2.17

En associant, à tout entier n strictement positif, le nombre $u_n = \frac{1}{n^2}$, on définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Définition 2.2.18 – n -uplet

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille de la forme $(x_j)_{j \in [1; n]}$ est appelée *n -uplet*, et sera notée (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Remarque 2.2.19

Les 2-uplets sont appelés *couples*, les 3-uplets sont appelés *triplets*, les 4-uplets sont appelés *quadruplets*...

Remarque 2.2.20

Attention, l'ordre compte : ainsi, le triplet $(\sqrt{2}, \cos, \mathbb{Q})$ n'est pas la même que $(\cos, \sqrt{2}, \mathbb{Q})$.

Définition 2.2.21 – Produit cartésien

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E_1, E_2, \dots, E_n des ensembles. On appelle *produit cartésien* de E_1, E_2, \dots, E_n et on note $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}$$

Remarque 2.2.22 : Notation E^n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble. plutôt que d'écrire $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}}$, on note très souvent E^n .

Par exemple, $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

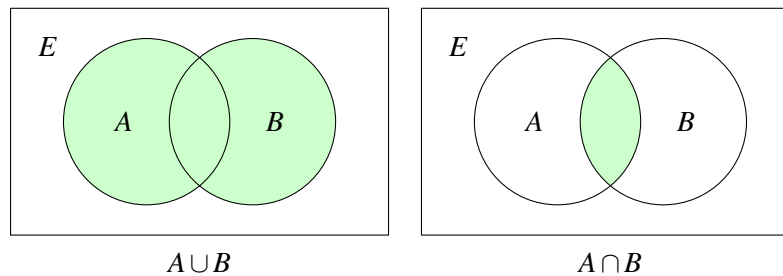
Remarque 2.2.23 : Non-commutativité du produit cartésien

Le produit cartésien n'est pas *commutatif* ! Par exemple, $(1, \sqrt{2}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ mais $(1, \sqrt{2}) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un entier : cela prouve que $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \neq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

Réunion et intersection**Définition 2.2.24 – Réunion et intersection de deux ensembles**

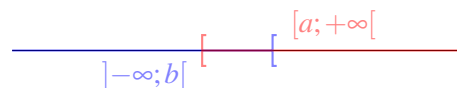
Soit E un ensemble et A et B deux parties de E .

- La *réunion* (ou *union*) de A et B est l'ensemble formé des éléments de E qui sont dans A ou dans B .
- L'*intersection* de A et B est l'ensemble formé des éléments de E qui sont simultanément dans A et dans B .

**Exercice 2.2.25**

Soient a et b deux réels avec $a \leq b$. Que vaut $] -\infty; b[\cap [a; +\infty[$?

Correction. Une représentation graphique peut nous aiguiller :



Il semble que $] -\infty; b[\cap [a; +\infty[= [a; b[$. Montrons-le par double inclusion.

- Soit $x \in] -\infty; b[\cap [a; +\infty[$. Alors $x < b$ et $a \leq x$ donc $a \leq x < b$ et $x \in [a; b[$. Ainsi, $] -\infty; b[\cap [a; +\infty[\subset [a; b[$.
- Soit $x \in [a; b[$. Alors $x < b$ donc $x \in] -\infty; b[$. De plus, $a \leq x$ donc $x \in [a; +\infty[$. On a donc bien $x \in] -\infty; b[\cap [a; +\infty[$.

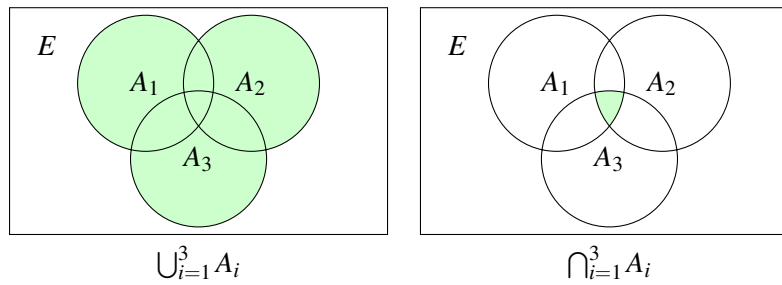
Ainsi : $[a; b[\subset] -\infty; b[\cap [a; +\infty[$.

Par double inclusion, on a bien $] -\infty; b[\cap [a; +\infty[= [a; b[$.

Définition 2.2.26 – Réunion et intersection d'un nombre fini d'ensemble

Soit E un ensemble et A_1, A_2, \dots, A_n des parties de E , où $n \in \mathbb{N}^*$:

- On appelle *réunion* (ou *union*) de A_1, A_2, \dots, A_n et on note $\bigcup_{i=1}^n A_i$ l'ensemble formé des éléments de E qui sont dans au moins l'un des ensembles A_1, A_2, \dots, A_n .
- On appelle *intersection* de A_1, A_2, \dots, A_n et on note $\bigcap_{i=1}^n A_i$ l'ensemble formé des éléments de E qui sont simultanément dans A_1, A_2, \dots, A_n .

**Définition 2.2.27 – Réunion et intersection généralisées**

Soit E un ensemble et \mathcal{A} un ensemble de partie de E .

- On appelle *réunion* des éléments^a de \mathcal{A} , et on note $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, l'ensemble des éléments x de E pour lesquels il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $x \in A$.
- On appelle *intersection* des éléments de \mathcal{A} , et on note $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, l'ensemble formé des éléments x de E tels que $x \in A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Si \mathcal{A} est vide, alors $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$ et $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$.

a. Gardez bien en tête que les éléments de \mathcal{A} sont des parties de E !

Remarque 2.2.28

Soit J un ensemble et $(A_j)_{j \in J}$ une famille de parties de E .

On peut aussi définir l'union et l'intersection des éléments de la famille $(A_j)_{j \in J}$ en posant respectivement

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{A \in \{A_j, j \in J\}} A \text{ et } \bigcap_{j \in J} A_j = \bigcap_{A \in \{A_j, j \in J\}} A$$

Propriété 2.2.29 – Propriétés sur l'union et l'intersection

Soit E un ensemble.

- **L'union est associative** : Pour toutes parties A, B et C de E , on a

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

- **L'intersection est associative** : Pour toutes parties A, B et C de E , on a

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- **L'union est commutative** : Pour toutes parties A et B de E , on a

$$A \cup B = B \cup A$$

- **L'intersection est commutative** : Pour toutes parties A et B de E , on a

$$A \cap B = B \cap A$$

- **L'union est distributive pour l'intersection** : Pour toutes parties A, B et C de E , on a

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- **L'intersection est distributive pour l'union** : Pour toutes parties A, B et C de E , on a

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

— E est neutre pour l'intersection : Pour toute partie A de E , on a

$$A \cap E = A$$

— \emptyset est neutre pour l'union : Pour toute partie A de E , on a

$$A \cup \emptyset = A$$

Démonstration. Seules les deux distributivités posent problème.

— Soient A, B et C trois parties de E . Montrons que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. On peut raisonner par double inclusion.

— Soit $x \in A \cup (B \cap C)$. Alors $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Dans le premier cas, c'est-à-dire si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Dans le second cas, c'est-à-dire si $x \in B \cap C$, alors $x \in B$ et $x \in C$ donc $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Dans tous les cas, on a bien $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ainsi : $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

— Soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup (B \cap C)$. Sinon, alors $x \notin A$, et puisque $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, on a forcément $x \in B$ et $x \in C$ donc $x \in B \cap C$ et $x \in A \cup (B \cap C)$. On a bien, dans tous les cas, $x \in A \cup (B \cap C)$, ainsi $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Par double inclusion, on a bien $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

L'autre distributivité est laissée en exercice. □

Remarque 2.2.30

Les deux distributivités peuvent sembler abstraites mais sont assez naturelles : par exemple, pour un animal, *être un mammifère ET (être un animal volant OU être herbivore)* revient exactement à *(être un mammifère ET être un animal volant) OU (être un mammifère ET être herbivore)*.

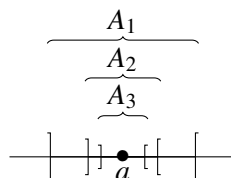
Exercice 2.2.31

Soit $a \in \mathbb{R}$. Simplifier l'ensemble suivant :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n} \right[$$

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \left] a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n} \right[$. Ainsi, $A_1 = \left] a - 1; a + 1 \right[$, $A_2 = \left] a - \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2} \right[$, $A_3 = \left] a - \frac{1}{3}; a + \frac{1}{3} \right[$...

Commençons par représenter A_1, A_2 , et A_3 :



Si on continue ce procédé « à l'infini », il semble qu'il ne reste plus qu'un seul point : a lui-même. On peut ainsi raisonnablement conjecturer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{a\}$. Montrons-le par double inclusion.

— On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \left] a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n} \right[$ puisque $\frac{1}{n} > 0$. Ainsi, $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et $\{a\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

— Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \in \left] a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n} \right[$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a - \frac{1}{n} < x < a + \frac{1}{n}$.

Montrons que x vaut nécessairement a en raisonnant par l'absurde : supposons que $x \neq a$. En soustrayant a , on obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $-\frac{1}{n} < x - a < \frac{1}{n}$, autrement dit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < |x - a| < \frac{1}{n}$. Or,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$: il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} \leq |x - a|$, ce qui contredit le fait que $|x - a| < \frac{1}{n_0}$. x vaut donc nécessairement a et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}[\subset \{a\}$.
Par double inclusion, on a bien $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}[= \{a\}$.

a. Si vous n'êtes pas à l'aise avec la notion de limite, qui sera étudiée plus tard, on peut trouver manuellement un tel n_0 :

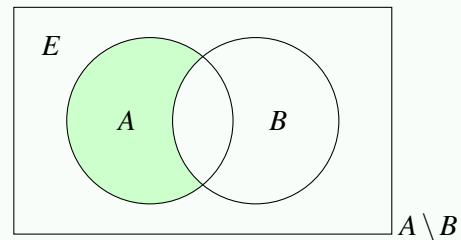
$$\frac{1}{n_0} \leq |x - a| \iff n_0 \geq \frac{1}{|x - a|} \text{ par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*$$

n_0 peut donc être n'importe quel entier supérieur ou égal à $\frac{1}{|x - a|}$ (qui est bien défini puisque $x \neq a$).

Différence et complémentaire

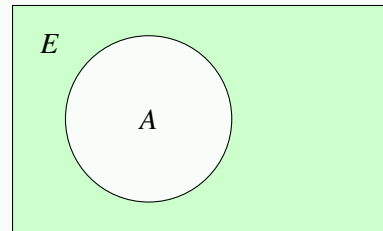
Définition 2.2.32 – Différence de deux ensembles

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E . On appelle *différence* de A par B et on note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de E qui sont dans A mais pas dans B .



Définition 2.2.33 – Complémentaire d'un ensemble

Soit E un ensemble et A une partie de E .
On appelle *complémentaire* de A dans E l'ensemble $E \setminus A$, formé des éléments de E qui ne sont pas dans A .



Remarque 2.2.34 : Notations

Si A est une partie d'un ensemble E , le complémentaire de A dans E peut aussi être noté \bar{A} ou A^c .

Propriété 2.2.35

Soit A une partie d'un ensemble E . Alors

$$\bar{\bar{A}} = A$$

De plus, si A et B sont deux parties de E , alors

$$A = B \iff \bar{A} = \bar{B}$$

Démonstration. Soit $x \in E$ et A une partie de E .

$$\begin{aligned} x \in \bar{\bar{A}} &\iff x \notin \bar{A} \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

donc $\bar{\bar{A}} = A$.

Soit B une autre partie de E . Si $A = B$, alors on a évidemment $\bar{A} = \bar{B}$. Réciproquement, si $\bar{A} = \bar{B}$, alors $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$, autrement dit $A = B$. Finalement, on a bien : $A = B \iff \bar{A} = \bar{B}$. \square

Propriété 2.2.36 – Lois de Morgan

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E . Alors :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Plus généralement, si \mathcal{A} est un ensemble de parties de E :

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \text{ et } \overline{\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$$

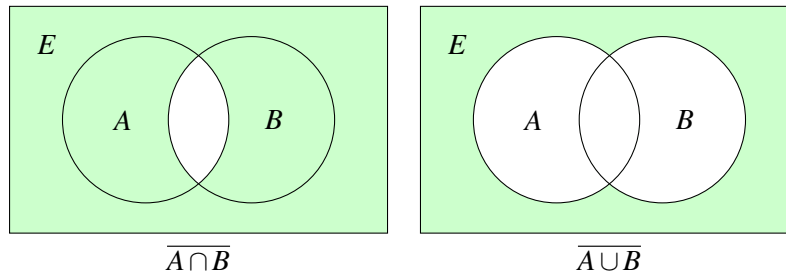
Démonstration. Le premier cas étant un cas particulier du second, on se contentera de montrer ce dernier.

Soit \mathcal{A} un ensemble de parties de E . Dire que $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ revient à dire qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $x \in A$. Par négation, dire que $x \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ revient à dire qu'il existe aucun $A \in \mathcal{A}$ tel que $x \in A$. Autrement dit, $x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$ revient à dire que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $x \in \overline{A}$, ce qui prouve que $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$.

Pour la deuxième égalité, on peut raisonner de la même façon, ou utiliser ce qui précède et remarquer que pour tout $x \in E$:

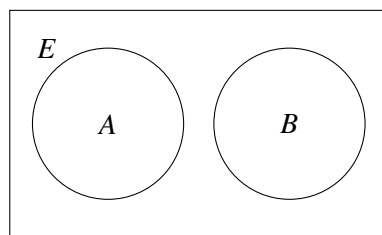
$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A} &\iff x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \\ &\iff x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \end{aligned}$$

ainsi $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}}$ et en passant au complémentaire : $\overline{\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$. □

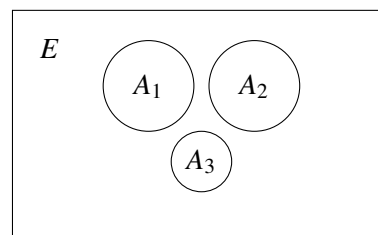
**2.2.3 Recouvrements disjoints et partitions****Définition 2.2.37 – Parties disjointes**

Soit E un ensemble.

- Soient A et B deux parties de E . On dit que A et B sont *disjointes* si $A \cap B = \emptyset$.
- Soit \mathcal{A} un ensemble de parties de E . On dit que ces parties sont *deux-à-deux disjointes* lorsque pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ avec $A \neq B$, on a $A \cap B = \emptyset$.



A et B sont disjointes

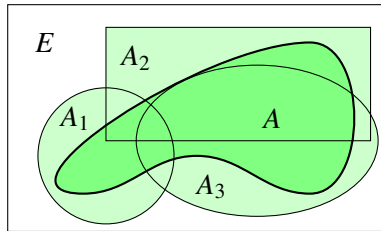


A_1, A_2, A_3 sont deux-à-deux disjointes

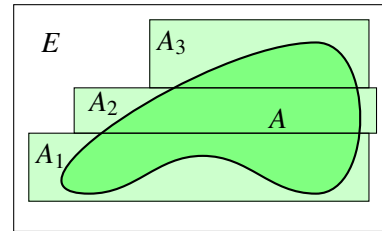
Définition 2.2.38

Soit E un ensemble et A une partie de E .

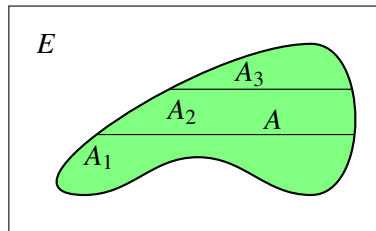
- Un *recouvrement* de A est un ensemble de parties de E dont la réunion contient A .
- Un *recouvrement disjoint* de A est un recouvrement de A , dont les éléments sont deux-à-deux disjoints.
- Une *partition* de A est un recouvrement disjoint de A , formé de parties non vides de A .



$\{A_1, A_2, A_3\}$ est un recouvrement de A



$\{A_1, A_2, A_3\}$ est un recouvrement disjoint de A



$\{A_1, A_2, A_3\}$ est une partition de A

Exemple 2.2.39

$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3, 4\}\}$ est un recouvrement de $\{1, 2, 3\}$, mais n'en est pas un recouvrement disjoint : par exemple, $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \neq \emptyset$.

$\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ est un recouvrement disjoint de $\{1, 2, 3, 4\}$, mais n'en est pas une partition : $\{4, 5\}$ n'est pas une partie de $\{1, 2, 3, 4\}$ puisque $5 \notin \{1, 2, 3, 4\}$.

$\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ est une partition de $\{1, 2, 3, 4\}$.

2.3 Exercices**Exercice 2.3.1**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] a; a + \frac{1}{n} \right[$?

Exercice 2.3.2

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer :

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \text{ et } A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Exercice 2.3.3

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer :

$$A \subset B \implies A \cup C \subset B \cup C$$

Exercice 2.3.4

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer :

$$A = B \iff A \cap B = A \cup B$$

Exercice 2.3.5

Soient A et B deux parties de E . Simplifier :

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$$

Exercice 2.3.6

On définit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2} \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de n .
2. Montrer que $\{[a_n; a_{n+1}], n \in \mathbb{N}\}$ est une partition de $]0; 1[$.

a. On pourra représenter, sur un axe gradué, les premiers termes de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et s'intéresser à $1 - a_n$.

Exercice 2.3.7

Écrire les partitions de $\llbracket 1; 4 \rrbracket$.

Exercice 2.3.8

On lance 10 fois une pièce de monnaie. Lors de chaque lancer, on note 0 le fait d'obtenir Pile, et 1 le fait d'obtenir Face.

1. Comment peut-on représenter une succession de 10 lancers ?
2. Déterminer un ensemble E , contenant la totalité des représentations des successions de 10 lancers.
3. Comment écrire l'ensemble A des représentations de successions de 10 lancers pour lesquelles on a obtenu exactement 3 Faces ?
4. Comment écrire l'ensemble B des représentations de successions de 10 lancers pour lesquelles on a obtenu un nombre pair de Piles ?
5. Comment écrire l'ensemble C des représentations de successions de 10 lancers pour lesquelles on a obtenu plus de Piles que de Faces ?

2.4 DM conducteur**Exercice 4**

 2 Déterminer

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty}]-n; n[$$

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \exists n \in \mathbb{N}, -n < x < n \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}, -n < x \text{ et } x < n \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}, -x < n \text{ et } x < n \end{aligned}$$

Or il existe bien des entiers naturels strictement supérieur à x et à $-x$, ainsi $x \in A$ pour tout réel x . On a donc montré que $\mathbb{R} \subset A$. L'inclusion réciproque étant triviale, on a finalement $A = \mathbb{R}$.

Commentaire

On pouvait aussi écrire

$$x \in A \iff \exists n \in \mathbb{N}, |x| < n$$

et choisir un entier strictement supérieur à $|x|$.

Exercice 5

2 Déterminer

$$B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right[$$

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in B \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{-1}{n+1} < x < \frac{1}{n+1}$$

En passant à la limite, qui préserve les inégalités larges, on obtient alors $0 \leq x \leq 0$ donc $x = 0$.
On a donc $B \subset \{0\}$.

Commentaire

On peut aussi aller plus loin dans le détail, sans utiliser le passage à la limite. En effet, supposons que $x > 0$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on aura $\frac{1}{n+1} \leq x$: x ne peut donc pas être dans B . Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \leq x &\iff n+1 \geq \frac{1}{x} \text{ car } \frac{1}{n+1} > 0 \text{ et } x > 0 \\ &\iff n \geq \frac{1}{x} - 1 \end{aligned}$$

et un tel entier n existe bien puisque \mathbb{N} n'est pas majoré.

On a donc montré que, si $x \in B$, alors $x \leq 0$. De la même façon, on montre que si $x \in B$, alors $x \geq 0$. Finalement, le seul élément possiblement dans B est 0.

De plus, $0 \in B$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-1}{n+1} < 0 < \frac{1}{n+1}$$

Finalement, $B = \{0\}$.

Exercice 6

PTS 2 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer :

$$(A \cup B = A \cap C) \iff (B \subset A \subset C)$$

Correction. — Supposons que $B \subset A \subset C$. Alors $A \cup B = A$ et $A \cap C = A$ donc $A \cup B = A \cap C$.

— Supposons que $A \cup B = A \cap C$.

— Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap C$ ainsi $x \in A$. On a donc bien $B \subset A$.

— Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap C$ ainsi $x \in C$. On a donc bien $A \subset C$.

Ainsi $B \subset A \subset C$.

On a donc bien l'équivalence voulue.

Exercice 7

PTS 2 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer :

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap (C \cup \bar{A})$$

Correction. Raisonnons par double inclusion.

— L'inclusion $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup \bar{A}) \subset (A \cup B) \cap (C \cup \bar{A})$ est triviale.

— Soit $x \in (A \cup B) \cap (C \cup \bar{A})$. Alors $x \in A \cup B$ et $x \in C \cup \bar{A}$. Distinguons deux cas :

— Si $x \notin A$, sachant que $x \in A \cup B$, alors $x \in B$ donc $x \in B \cup C$.

— Si $x \in A$, alors $x \notin \bar{A}$. Cependant, $x \in C \cup \bar{A}$ donc $x \in C$ et $x \in B \cup C$.

Dans les deux cas, $x \in B \cup C$. Puisqu'on sait déjà que $x \in (A \cup B) \cap (C \cup \bar{A})$, on a bien $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup \bar{A})$. Ainsi :

$$(A \cup B) \cap (C \cup \bar{A}) \subset (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup \bar{A})$$

Par double inclusion, on a bien l'égalité voulue.

Chapitre 3

Arithmétique

3.1	Diviseur, multiple	52
3.2	Division euclidienne	53
3.2.1	Parties non vides d'entiers relatifs	53
3.2.2	Théorème de la division euclidienne	53
3.3	PGCD, PPCM de deux entiers	54
3.3.1	PGCD	54
3.3.2	Algorithme d'Euclide	55
3.3.3	PPCM	56
3.4	Nombres premiers	57
3.5	Exercices	58
3.6	DM conducteur	60

3.1 Diviseur, multiple

Définition 3.1.1

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

- On dit que b est un diviseur de a (ou que b divise a , ou encore que a est divisible par b) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$.
- On dit que a est un multiple de b si b divise a .

Exemple 3.1.2

-5 est un diviseur de 25 puisque $25 = 5 \times (-5)$.

6 est un multiple de 3 puisque $6 = 3 \times 2$.

Remarque 3.1.3

0 est divisible par tout entier relatif b puisque $0 = b \times 0$.

Propriété 3.1.4

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $d \in \mathbb{Z}$. On suppose que d divise a et que d divise b . Alors :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{Z}^2, d \text{ divise } au + bv$$

Démonstration. Puisque d divise a et b , il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = kd$ et $b = k'd$.

Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} au + bv &= kdu + k'dv \\ &= (ku + k'v)d \end{aligned}$$

et $ku + k'v \in \mathbb{Z}$ donc d divise $au + bv$. □

Exercice 3.1.5

Déterminer les entiers relatifs n tels que $3n + 1$ divise $4n + 3$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Supposons que $3n + 1$ divise $4n + 3$, et puisque $3n + 1$ est un diviseur de lui-même, alors $3n + 1$ divise $3 \times (4n + 3) - 4 \times (3n + 1) = 5$. Ainsi, $3n + 1 \in \{-5, -1, 1, 5\}$ donc $3n \in \{-4, 0, 2, 6\}$ ou encore $n \in \{0, 2\}$.

Réciproquement :

- Si $n = 0$, alors $3n + 1 = 1$ et $4n + 3 = 3$ donc $3n + 1$ divise $4n + 3$.
- Si $n = 2$, alors $3n + 1 = 7$ et $4n + 3 = 11$ donc $3n + 1$ ne divise pas $4n + 3$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$3n + 1 \text{ divise } 4n + 3 \iff n = 0$$

3.2 Division euclidienne

3.2.1 Parties non vides d'entiers relatifs

Lemme 3.2.1

- Toute partie non vide majorée de \mathbb{Z} admet un plus grand élément (c'est-à-dire un maximum).
- Toute partie non vide minorée de \mathbb{Z} admet un plus petit élément (c'est-à-dire un minimum).

Démonstration. — Soit A une partie non vide de \mathbb{Z} .

Il s'agit de montrer que si A est majorée, alors A admet un plus grand élément :

$$\exists M \in A, \forall a \in A, a \leq M$$

Procédons par contraposée et supposons que

$$\forall M \in A, \exists a \in A, a > M$$

Supposons vraie cette négation. A étant non vide, on peut considérer $a_0 \in A$. Par hypothèse (en posant $M = a_0$), il existe alors $a_1 \in A$ tel que $a_1 > a_0$. a_1 et a_0 étant des entiers, cela revient à dire que $a_1 \geq a_0 + 1$.

En recommençant, on montre l'existence de $a_2 \in A$ tel que $a_2 \geq a_1$. On arrive ainsi à créer une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \geq a_n + 1$$

Une récurrence immédiate prouve alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq a_0 + n$. L'ensemble A n'est alors pas majoré : pour tout $m \in \mathbb{R}$, on peut trouver^a n tel que $a_n \geq a_0 + n > m$.

Par contraposée, si A est majorée, alors A admet un plus grand élément.

- Soit A une partie non vide de \mathbb{Z} . On suppose A minorée par $m \in \mathbb{R}$.

Posons $B = \{-a, a \in A\}$. Alors B est majorée par $-m$: pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $b = -a \leq -m$.

D'après le premier point, B admet donc un plus grand élément, noté M . Alors $-M$ est le plus petit élément de A .

En effet :

- $M \in B$ donc $-M \in A$.
- Pour tout $a \in A$, on a $-a \in B$ donc $-a \leq M$ donc $a \geq -M$.

□

^a. Cela vient du fait que \mathbb{R} est *archimédien*, cette notion étant toutefois hors-programme.

Lemme 3.2.2

Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément (c'est-à-dire un minimum).

Démonstration. Toute partie non vide de \mathbb{N} est aussi une partie non vide minorée de \mathbb{Z} .

□

3.2.2 Théorème de la division euclidienne

Théorème 3.2.3 – Division euclidienne

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

- $a = bq + r$
- $0 \leq r < b$

a (respectivement b) est appelé *dividende* (respectivement *diviseur*) dans la division euclidienne de a par b .

q (respectivement r) est appelé *quotient* (respectivement *reste*) dans la division euclidienne de a par b .

Remarque 3.2.4

La condition $0 \leq r < b$ est indispensable pour assurer l'unicité du couple (q, r) .

Démonstration. — **Existence :** Posons $A = \mathbb{N} \cap \{a - bq, q \in \mathbb{Z}\}$. Alors A est une partie non vide de \mathbb{N} . En effet :
 — Il est clair que A est une partie de \mathbb{N} .
 — Si $a \geq 0$, alors $a = a - b \times 0$ donc $a \in A$. Si $a < 0$, et puisque $b \geq 1$, on a $ab \leq b$ donc $0 \leq b - ab$ et $b - ab \in A$.
 A est donc bien non vide.
 On en déduit que A admet un plus petit élément : notons-le r . Puisque $r \in A$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $r = a - bq$ ou encore $a = bq + r$.
 Il reste à prouver que $0 \leq r < b$. D'une part, $r \geq 0$ puisque $r \in A \subset \mathbb{N}$. D'autre part, supposons que $r \geq b$. Alors $r - b \geq 0$. Or, $r - b = a - bq - b = a - b(q + 1)$: on en déduit que $r - b \in A$. C'est impossible puisque $r - b < r$ (étant donné que $b \geq 1$). On a donc bien $r < b$.
 Finalement, il existe bien $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.
 — **Unicité :** Soient $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(q', r') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' < b \end{cases}$$

En particulier, on a $bq + r = bq' + r'$ donc $r - r' = b(q' - q)$. Cependant, $0 \leq r < b$ et $-b < -r' \leq 0$ et par somme : $-b < r - r' < b$ donc $-b < b(q' - q) < b$ ou encore, puisque $b > 0$:

$$-1 < q' - q < 1$$

$q' - q$ étant un entier, on en déduit que $q = q'$, et donc que $r - r' = b \times 0$ ou encore que $r = r'$. □

Exemple 3.2.5

Quelques exemples de divisions euclidiennes :

- Division euclidienne de 37 par 15 : $37 = 15 \times 2 + 7$.
- Division euclidienne de -97 par 20 : $-97 = 20 \times (-5) + 3$.

3.3 PGCD, PPCM de deux entiers**3.3.1 PGCD****Définition 3.3.1**

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On note \mathcal{D}_a (respectivement \mathcal{D}_b) l'ensemble des diviseurs de a (respectivement de b). Alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$ est une partie non vide et majorée de \mathbb{Z} : elle admet donc un plus grand élément, que l'on appelle *plus grand diviseur commun de a et b* , ou encore *PGCD de a et b* . On le note $a \wedge b$.

Démonstration. \mathcal{D} est non vide puisque 1 est un diviseur commun à a et b : $a = a \times 1$ et $b = b \times 1$. Montrons que \mathcal{D} est majoré.

On sait que $(a, b) \neq (0, 0)$ donc $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

- Supposons que $a \neq 0$. Soit $k \in \mathcal{D}$: en particulier, d est un diviseur de a . Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kd$ et donc $|a| = |k| |d|$. Notons que $k \neq 0$ puisque $a \neq 0$.
 On en déduit que $|d| \leq |a|$ (sinon, on aurait $|d| > |a|$ donc $|d| |k| > |k| |a| \geq |a|$ puisque $|k| \geq 1$).
 En particulier, $d \leq |d| \leq |a|$: \mathcal{D} est bien majoré (par $|a|$).

— Si $b \neq 0$, le raisonnement est le même.

\mathcal{D} est donc une partie non vide majorée de \mathbb{Z} : \mathcal{D} admet un plus grand élément. □

Remarque 3.3.2

Si a est un entier relatif non nul, alors $a \wedge 0 = |a|$ puisque les diviseurs communs à a et 0 sont les diviseurs de a .

3.3.2 Algorithme d'Euclide

Propriété 3.3.3

Soient $(a, b, q, r) \in \mathbb{Z}^4$, avec $b \neq 0$, tels que $a = bq + r$. Alors

$$a \wedge b = b \wedge r$$

Démonstration. — Soit d un diviseur commun à a et b . Alors d divise $a - bq = r$ en vertu de la propriété 3.1.4.

— Soit d un diviseur commun à b et r . Alors d divise $a = bq + r$, grâce à la même propriété.

On en déduit que les diviseurs communs à a et b sont aussi les diviseurs communs à b et r , et donc que $a \wedge b = b \wedge r$, ces deux PGCD étant bien définis puisque $b \neq 0$. □

Remarque 3.3.4

En particulier, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, et si on note r le reste dans la division euclidienne de a par b , alors $a \wedge b = b \wedge r$. Cette remarque est à la base de l'algorithme d'Euclide 3.3.6.

Exemple 3.3.5

Posons $a = 294$ et $b = 270$. Alors :

$$294 = 1 \times 270 + 24 \text{ donc } 294 \wedge 270 = 270 \wedge 24$$

$$270 = 11 \times 24 + 6 \text{ donc } 270 \wedge 24 = 24 \wedge 6$$

$$24 = 4 \times 6 + 0 \text{ donc } 24 \wedge 6 = 6 \wedge 0 = 6$$

On en déduit que $294 \wedge 270 = 6$.

Ce résultat permet de mettre en place l'algorithme d'Euclide. L'encadré ci-dessus en est un exemple.

Propriété 3.3.6 – Algorithme d'Euclide

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On pose

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Si b_n est non nul, on pose $a_{n+1} = b_n$ et b_{n+1} le reste dans la division euclidienne de a_n par b_n .
- Sinon, on pose $b_{n+1} = 0$ et $a_{n+1} = 0$.

Alors :

- Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $b_N = 0$ et $b_{N-1} \neq 0$.
- Le PGCD de a et b est $b_{N-1} = a_N$ (dernier reste non nul).

Démonstration. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_{n+1} est le reste dans la division euclidienne de a_n par b_n . En particulier, $0 \leq b_n < b_{n+1}$. La suite

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante.

Considérons alors l'ensemble $A = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. Il s'agit d'une partie non vide de \mathbb{N} : elle admet donc un plus petit élément.

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in A, b_{n_0} \leq x$$

Or, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement décroissante, on a $b_{n_0+1} < b_{n_0}$: c'est absurde puisque $b_{n_0+1} \in A$. Il existe donc bien un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n = 0$.

L'ensemble $C = \{n \in \mathbb{N}, b_n = 0\}$ est donc une partie non vide de \mathbb{N} : elle admet un plus petit élément, noté N .

Déjà, $N \in C$ donc $b_N = 0$.

De plus, notons que $N \neq 0$ puisque $b_0 = b \neq 0$: on a ainsi $N - 1 \in \mathbb{N}$. Il est alors certain que $b_{N-1} \neq 0$: dans le cas contraire, $N - 1$ serait un élément de C , ce qui est impossible puisque $N - 1 < N$ et N est le plus petit élément de C .

De plus, une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$, on a

$$a \wedge b = a_n \wedge b_n$$

En effet :

$$— a \wedge b = a_0 \wedge b_0.$$

— Soit $n \in \llbracket 0; N - 1 \rrbracket$ tel que $a \wedge b = a_n \wedge b_n$. On a $a_{n+1} = b_n$ et b_{n+1} est le reste dans la division euclidienne de a_n par b_n : ainsi $a \wedge b = a_n \wedge b_n = b_n \wedge b_{n+1} = a_{n+1} \wedge b_{n+1}$.

En particulier,

$$a \wedge b = a_N \wedge b_N = b_{N-1} \wedge 0 = b_{N-1}$$

□

Exercice 3.3.7

Déterminer le PGCD de 360 et 126.

Correction. $360 = 126 \times 2 + 108$ donc $360 \wedge 126 = 126 \wedge 108$.

$126 = 108 \times 1 + 18$ donc $126 \wedge 108 = 108 \wedge 18$.

$108 = 18 \times 6 + 0$ donc $108 \wedge 18 = 18 \wedge 0$.

Finalement, $360 \wedge 126 = 18$.

3.3.3 PPCM

Définition 3.3.8

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$. Notons \mathcal{M}_a (respectivement \mathcal{M}_b) l'ensemble des multiples strictement positifs de a (respectivement de b).

Alors $\mathcal{M}_a \cap \mathcal{M}_b$ est une partie non vide de \mathbb{N} : elle admet donc un plus petit élément, appelé *plus petit multiple commun* ou *PPCM* de a et b .

Démonstration. $|a||b|$ est un multiple commun à a et b et est strictement positif puisque a et b sont non nuls. Ainsi $\mathcal{M}_a \cap \mathcal{M}_b$ est non vide. □

Exemple 3.3.9

Les premiers multiples strictement positifs de 4 sont 4, 8, 12.

Les premiers multiples strictement positifs de 6 sont 6 et 12.

Le plus petit multiple commun à 4 et 6 est donc 12.

3.4 Nombres premiers

Définition 3.4.1

Un entier naturel est dit *premier* lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Remarque 3.4.2

0 et 1 ne sont pas premiers : le premier admet une infinité de diviseurs positifs, le second n'en admet qu'un (lui-même).

Exemple 3.4.3

2, 3, 5 et 7 sont premiers.

Propriété 3.4.4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Alors n admet un diviseur premier.

Démonstration. On peut raisonner par récurrence forte.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, posons \mathcal{P}_n la propriété « n admet un diviseur premier ».

- \mathcal{P}_2 est vrai puisque 2 est premier.
 - Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Supposons $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots, \mathcal{P}_n$ vraies.
 - Si $n + 1$ est premier, étant divisible par lui-même, il admet bien un diviseur premier.
 - Sinon, $n + 1$ admet un diviseur positif m autre que 1 et lui-même. En particulier, $2 \leq m \leq n$. Or \mathcal{P}_p est vraie donc m admet un diviseur premier p , qui est aussi un diviseur premier de $n + 1$.
- Dans les deux cas, $n + 1$ admet un diviseur premier et \mathcal{P}_{n+1} est vraie. □

Propriété 3.4.5

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers, notés p_1, p_2, \dots, p_n .

Posons $p = \prod_{k=1}^n p_k + 1$. p est donc un entier naturel supérieur ou égal à 2 : il admet alors un diviseur premier. Il existe alors $k_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que p_{k_0} divise p .

Or, p_{k_0} divise p ainsi que $\prod_{k=1}^n p_k = p_{k_0} \prod_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{k_0\}} p_k$. p_{k_0} est donc un diviseur positif de 1 puisque $1 = p - \prod_{k=1}^n p_k$.

On en déduit que $p_{k_0} = 1$, ce qui est impossible puisque p_{k_0} est premier.

L'ensemble des nombres premiers est donc bien infini. □

Théorème 3.4.6 – Admis

Tout entier naturel non nul peut s'écrire de manière unique comme produit de nombres premiers.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique suite^a (p_1, p_2, \dots, p_m) strictement croissante et formée de nombres premiers et une unique suite (k_1, k_2, \dots, k_m) d'entiers strictement positifs telles que

$$n = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}$$

^a. Si $n = 1$, cette suite est vide.

Exemple 3.4.7

Par exemple :

$$\begin{aligned}
 1008 &= 2 \times 504 \\
 &= 2^2 \times 252 \\
 &= 2^3 \times 126 \\
 &= 2^4 \times 63 \\
 &= 2^4 \times 3 \times 21 \\
 &= 2^4 \times 3^2 \times 7
 \end{aligned}$$

Ce résultat donne une autre façon de calculer un PGCD ou un PPCM :

- Pour calculer le PGCD de a et b , avec $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, on écrit la décomposition en facteurs premiers de chacun d'entre eux : leur PGCD est le produit de leurs facteurs premiers commun à l'exposant le moins élevé.
- Pour calculer le PPCM de a et b , avec $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, on écrit la décomposition en facteurs premiers de chacun d'entre eux : leur PPCM est le produit des facteurs premiers apparaissant dans l'un ou dans l'autre, à l'exposant le plus élevé.

Exemple 3.4.8

Posons $a = 1008$ et $b = 4725$. La décomposition en facteurs premiers de a est

$$a = 2^4 \times 3^2 \times 7^1$$

et celle de b est

$$b = 3^3 \times 5^2 \times 7^1$$

Leur PGCD est donc $3^2 \times 7^1 = 63$, et leur PPCM est $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^1 = 75600$.

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1

x et y désignent des entiers naturels avec $x > y$.

A l'aide d'une factorisation, résoudre l'équation $x^2 - y^2 = 7$.

Exercice 3.5.2

On désigne par n un entier naturel non nul. On pose $A = 3n + 1$ et $B = 5n - 1$.

1. Montrer que le PGCD de A et B est un diviseur de 8.
2. Pour quelles valeurs de n ce PGCD est-il égal à 8 ?

Exercice 3.5.3

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n + 24$.
2. Déterminer^a les entiers naturels n pour lesquels $5n + 7$ est un diviseur de $2n + 16$.

^a. Indication : si $5n + 7$ divise $2n + 16$, alors $5n + 7$ divise tout entier de la forme $a \times (5n + 7) + b \times (2n + 16)$, où $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 3.5.4

On désigne encore par n un entier naturel non nul. On pose $A = 2^{n+2} - 2^n$ et $B = 3^{n+2} - 3^n$.
Trouver le PGCD de A et B .

Exercice 3.5.5

1. Simplifier :

$$z_1 = e^{\frac{1536i\pi}{9}}$$

2. (a) Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Soit r le reste dans la division euclidienne de a par b .

Montrer qu'il existe $q' \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = bq' + r^n$.

- (b) Simplifier

$$z_2 = e^{\frac{2023^n i\pi}{3}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser la division euclidienne de 2023 par 6.

Exercice 3.5.6

1. Le reste dans la division euclidienne de a par 144 est 67.

Quel est le reste de la division euclidienne de a

a) par 72 ? b) par 36 ? c) par 18 ?

2. x et y sont des entiers naturels.

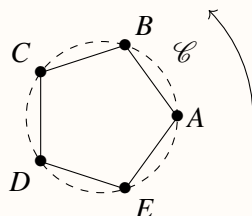
La division euclidienne de x par 13 admet pour reste 2, celle de y par 13 admet pour reste 11.

Quel est le reste de la division euclidienne

a) de $x + y$ par 13 ? b) de x^2 par 13 ?

Exercice 3.5.7

Le pentagone régulier $ABCDE$ ci-dessous est inscrit dans le cercle \mathcal{C} .



Un point mobile M décrit le cercle \mathcal{C} .

Trouver le point d'arrivée de M dans chacun des cas ci-dessous :

1. M franchit 15123 arcs consécutifs dans le sens de la flèche en partant de A ;
2. M franchit 15123 arcs consécutifs dans le sens inverse de la flèche en partant de A ;
3. M franchit 15123 arcs consécutifs dans le sens de la flèche en partant de D ;
4. M franchit 15123 arcs consécutifs dans le sens inverse de la flèche en partant de B .

3.6 DM conducteur

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Développer $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$.
2. Montrer que 2 et 3 divisent $n^5 - n$. P/S 2 × 1,5
3. En déduire que 6 divise $n^5 - n$. P/S 1

Correction. 1. On a

$$\begin{aligned} n(n-1)(n+1)(n^2+1) &= n(n^2-1)(n^2+1) \\ &= n(n^4-1) \\ &= n^5 - n \end{aligned}$$

2. Si n est pair, alors 2 divise n donc 2 divise $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$.
Si n est impair, alors $n+1$ est pair et est divisible par 2 : 2 divise encore $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$.
Dans tous les cas, 2 divise bien $n^5 - n$.
Pour 3, on distingue trois cas selon le reste dans la division euclidienne de n par 3, ce reste étant dans $\llbracket 0; 2 \rrbracket$.
— Si ce reste est nul, alors n est un multiple de 3 donc 3 divise $n(n-1)(n+1)(n^2+1) = n^5 - n$.
— Si ce reste vaut 1, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3q + 1$ donc $n-1 = 3q$: 3 divise donc $n-1$ ainsi que $n(n-1)(n+1)(n^2+1) = n^5 - n$.
— Si ce reste vaut 2, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3q + 2$ donc $n-2 = 3q$ et $n+1 = n-2+3 = 3(q+1)$: 3 divise donc $n+1$ ainsi que $n(n-1)(n+1)(n^2+1) = n^5 - n$.
Dans tous les cas, 3 divise bien $n^5 - n$.
3. Si $n = 0$ ou $n = 1$, alors $n^5 - n = 0$ qui est bien divisible par 6. Sinon, on a $n \geq 2$ donc $n^5 - n \geq 2$ et on peut raisonner sur la décomposition de n en produit de facteurs premiers.
2 et 3 sont, d'après la question précédente, des facteurs premiers divisant $n^5 - n$: ils font donc partie de la décomposition en facteurs premiers de $n^5 - n$, et il en est donc de même de leur produit, 6.

Exercice 9

Déterminer le PGCD de 2025 et 720. P/S 1,5

Correction. $2025 = 720 \times 2 + 585$ donc $2025 \wedge 720 = 720 \wedge 585$.
 $720 = 585 \times 1 + 135$ donc $720 \wedge 585 = 585 \wedge 135$.
 $585 = 135 \times 4 + 45$ donc $585 \wedge 135 = 135 \wedge 45$.
 $135 = 45 \times 3 + 0$ donc $135 \wedge 45 = 45 \wedge 0$.
 Finalement, $2025 \wedge 720 = 45$.

Exercice 10

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $5n+2$ divise $4n-6$. P/S 1,5

Correction. On raisonne par analyse-synthèse.
 Soit $n \in \mathbb{Z}$ et supposons que $5n+2$ divise $4n-6$. Alors $5n+2$ divise aussi $4 \times (5n+2) - 5 \times (4n-6) = 38 = 2 \times 19$. On en déduit que $5n+2 \in \{-38, -19, -2, -1, 1, 2, 19, 38\}$ et donc que $5n \in \{-40, -21, -4, -3, -1, 0, 17, 36\}$ ou encore que $5n \in \{-40, 0\}$ (les autres termes n'étant pas des multiples de 5) ou enfin que $n \in \{-8, 0\}$.
 Réciproquement :

- Si $n = -8$, alors $5n + 2 = -38$ et $4n - 6 = -38$ donc $5n + 2$ divise bien $4n - 6$.
- Si $n = 0$, alors $5n + 2 = 2$ et $4n - 6 = -6$ donc $5n + 2$ divise bien $4n - 6$.

Finalement, les entiers relatifs n tels que $5n + 2$ divise $4n - 6$ sont -8 et 0 .

Exercice 11 – Plus difficile

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{Z}$.

(a) Vérifier que

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

PTS 1

- (b) En déduire que $x - 1$ divise $x^n - 1$. **PTS 0,5**

Dans la suite, on fixe un entier relatif a .

2. Soient $n, m, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $n = mq + r$. Montrer que les diviseurs communs de $a^n - 1$ et $a^m - 1$ sont les diviseurs communs de $a^m - 1$ et $a^r - 1$.

Indication : $a^n - 1 = a^{mq+r} - 1 = a^{mq+r} - a^r + a^r - 1$. **PTS 1,5**

3. On suppose que a est différent de 1. Soient $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer que

$$(a^n - 1) \wedge (a^m - 1) = a^{n \wedge m} - 1$$

PTS 2

Correction. 1. (a) On développe :

$$\begin{aligned} (x - 1)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) &= x + x^2 + \cdots + x^n - (1 + x + \cdots + x^{n-1}) \\ &= x^n - 1 \end{aligned}$$

Remarquons d'ailleurs que cette formule est aussi vraie pour $n = 0$, la somme $1 + x + \cdots + x^{n-1}$ étant alors considérée nulle.

- (b) Puisque $1 + x + \cdots + x^{n-1} \in \mathbb{Z}$ (car $x \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$), on en déduit que $x - 1$ divise $x^n - 1$.

2. On a

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= a^{mq+r} - 1 \\ &= a^{mq+r} - a^r + a^r - 1 \\ &= a^r(a^{mq} - 1) + a^r - 1 \\ &= a^r(a^{mq} - 1) + a^r - 1 \\ &= a^r(a^m - 1) \underbrace{\left(1 + a^m + a^{2m} + \cdots + a^{m(q-1)}\right)}_{\in \mathbb{Z}} + a^r - 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

- Si $d \in \mathbb{Z}$ est un diviseur commun à $a^n - 1$ et $a^m - 1$, alors d divise aussi $a^r - 1 = a^n - 1 - \underbrace{(a^m - 1)a^r(1 + a^m + a^{2m} + \cdots + a^{m(q-1)})}_{\in \mathbb{Z}}$ et d est un diviseur commun à $a^m - 1$ et $a^r - 1$.

- Si $d \in \mathbb{Z}$ est un diviseur commun à $a^m - 1$ et $a^r - 1$, alors d divise aussi $a^n - 1 = a^r(a^m - 1) \underbrace{\left(1 + a^m + a^{2m} + \cdots + a^{m(q-1)}\right)}_{\in \mathbb{Z}} + a^r - 1$.

Les diviseurs communs à $a^n - 1$ et $a^m - 1$ sont donc les diviseurs communs à $a^m - 1$ et $a^r - 1$.

3. Puisque $a \neq 1$ et $(n, m) \in \mathbb{N} \setminus \{(0, 0)\}$, l'un au moins des deux entiers $a^n - 1$ et $a^m - 1$ est non nul et le PGCD de $a^n - 1$ et $a^m - 1$ est bien défini.

Quitte à permuter n et m , supposons m non nul. Reprenons l'algorithme d'Euclide et posons $u_0 = n$, $v_0 = m$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- $u_{k+1} = v_k$
- Si $v_k \neq 0$, v_{k+1} est le reste dans la division euclidienne de u_k par v_k .
- Sinon, $v_{k+1} = 0$.

En particulier, une récurrence immédiate prouve que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_k et v_k sont positifs ou nuls.

Le cours affirme alors qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_{N-1} \neq 0$ et $v_N = 0$: le PGCD de m et n est alors v_{N-1} (dernier reste non nul).

Montrons alors, par récurrence que :

$$\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket, (a^n - 1) \wedge (a^m - 1) = (a^{u_k} - 1) \wedge (a^{v_k} - 1) \quad (\star)$$

Une fois ceci fait, on aura en particulier pour $k = N$:

$$\begin{aligned} (a^n - 1) \wedge (a^m - 1) &= (a^{u_N} - 1) \wedge (a^{v_N} - 1) \\ &= (a^{v_{N-1}} - 1) \wedge \underbrace{(a^0 - 1)}_{=0} \\ &= a^{v_{N-1}} - 1 = a^{n \wedge m} - 1 \end{aligned}$$

ce qui terminera l'exercice.

Montrons alors (\star) .

- Pour $k = 0$, on a $u_k = u_0 = n$ et $v_k = v_0 = m$ donc $(a^{u_k} - 1) \wedge (a^{v_k} - 1) = (a^n - 1) \wedge (a^m - 1)$.
- Soit $k \in \llbracket 0; N - 1 \rrbracket$ tel que $(a^n - 1) \wedge (a^m - 1) = (a^{u_k} - 1) \wedge (a^{v_k} - 1)$.

Puisque $k \in \llbracket 0; N - 1 \rrbracket$, v_k est non nul (car N est le premier rang pour lequel $v_N = 0$) et v_{k+1} est le reste dans la division euclidienne de u_k par v_k : il existe donc $q \in \mathbb{Z}$ tel que $u_k = qv_k + v_{k+1}$.

Puisque $u_k \geq 0$ et $v_k > 0$, on en déduit que $q \geq 0$ (sinon, on aurait $q \leq -1$ donc $qv_k \leq -v_k$ et $u_k = qv_k + v_{k+1} \leq -v_k + v_{k+1} < -v_k + v_k = 0$: absurde). La question précédente montre alors que

$$\begin{aligned} (a^n - 1) \wedge (a^m - 1) &= (a^{u_k} - 1) \wedge (a^{v_k} - 1) \\ &= (a^{v_k} - 1) \wedge (a^{v_{k+1}} - 1) \\ &= (a^{u_{k+1}} - 1) \wedge (a^{v_{k+1}} - 1) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence et cet exercice.

Chapitre 4

Applications

4.1	Définitions	64
4.2	Injection, surjection, bijection	68
4.3	Composition d'applications	72
4.4	Applications réciproques	73
4.5	Restriction et prolongement	75
4.6	Fonctions indicatrices	76
4.7	Exercices	76
4.8	DM conducteur	79

4.1 Définitions

Définition 4.1.1 – Application, image, antécédent

On considère deux ensembles E et F .

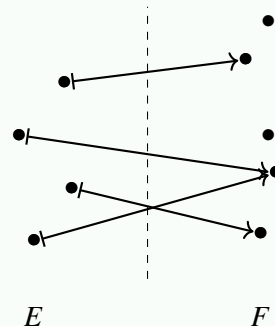
- En associant, à chaque élément de E , un élément de F , on définit une *application* de E vers F .

L'ensemble des applications de E vers F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou ^a F^E .

Soit f est une application de E vers F .

- Si x est un élément de E , on note $f(x)$ l'élément de F associé à x par f .
 $f(x)$ s'appelle *image* de x par f .
- Si y est un élément de F , alors tout élément x de E tel que $f(x) = y$ est appelé *antécédent* de y par f .

a. Cette dernière notation prendra tout son sens lorsque nous aurons travaillé sur le dénombrement.



Remarque 4.1.2

Comme le montre la figure ci-dessus, chaque élément de E admet une unique image, mais un élément de F peut très bien avoir plusieurs antécédents, ou n'en avoir aucun.

Notation

Une application f d'un ensemble E vers un ensemble F peut se noter ainsi :

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

En particulier, on veillera à ne pas confondre les flèches : « $E \rightarrow F$ » signifie que l'on va « de E vers F », alors que « $x \mapsto f(x)$ » signifie qu'à x , on associe $f(x)$.

Exemple 4.1.3

On peut définir (mais c'est rare !) une application au cas-par-cas, comme par exemple en définissant une application g de $\{1, 2, 3\}$ vers \mathbb{Z} en posant $g(1) = 2$, $g(2) = -5$ et $g(3) = 12$. Dans ce cas, on peut noter g ainsi :

$$\begin{aligned} g &: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \\ -5 & \text{si } x = 2 \\ 12 & \text{si } x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut aussi écrire l'image d'un élément comme expression de cet élément, par exemple

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Remarque 4.1.4 : Variables muettes

Dans la notation

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

x est une *variable muette* : elle n'a d'existence propre qu'au sein de cette notation.

Par exemple, les applications

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$$

sont exactement les mêmes.

Fonction et application

En toute rigueur, il y a une différence entre les notions de fonction et d'application. Une application de E vers F est nécessairement définie en chaque élément de E , alors qu'une fonction de E vers F peut n'être définie qu'en certains points de E .

Cependant, la distinction entre ces notions n'est pas au programme : le fait de parler de fonction à la place d'application constitue un abus de langage que nous tolérerons.

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F . Puisque f est définie en associant à chaque élément x de E , un élément $f(x)$ de F , il semble naturel de concrétiser cette association sur la forme de couples $(x, f(x))$, où x varie dans E . C'est la notion de *graphe*.

Définition 4.1.5 – Graphe d'une application

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E vers F .

On appelle *graphe de f* l'ensemble

$$\{(x, f(x)), x \in E\}$$

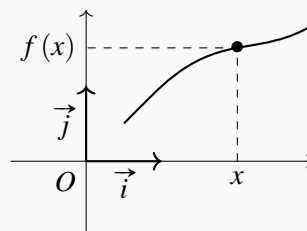
Remarque 4.1.6 : Lien entre graphe et courbe

Soit I une partie de \mathbb{R} , et f une application de I vers \mathbb{R} . Le graphe de f est donc l'ensemble

$$\{(x, f(x)), x \in I\}$$

C'est donc un ensemble de couples de réels. Or, si l'on travaille dans le plan muni d'un repère, on sait que l'on peut associer à chaque couple de réels un point du plan (abscisse et ordonnée).

Le graphe de f peut donc être représenté dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) : c'est ce que l'on appelle la *courbe de f* dans ce repère.



Définition 4.1.7 – Image directe, image réciproque

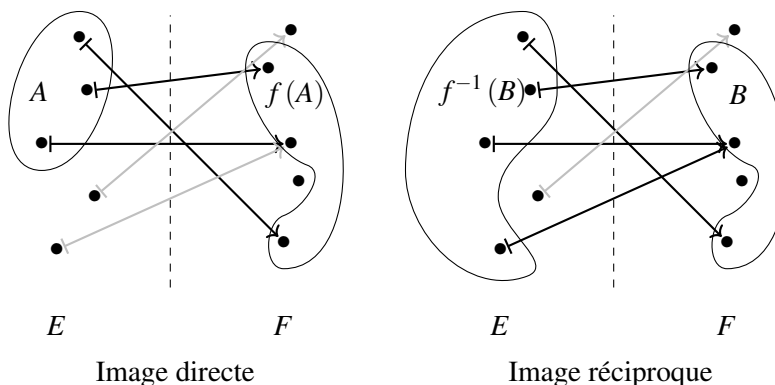
Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

— Soit A une partie de E . On appelle *image directe* de A par f l'ensemble noté $f(A)$ défini par

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

— Soit B une partie de F . On appelle *image réciproque* de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

**Remarque 4.1.8**

Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, E et F étant deux ensembles, et si A est une partie de E , alors $f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A .

De plus, si B est une partie de F , alors $f^{-1}(B)$ est

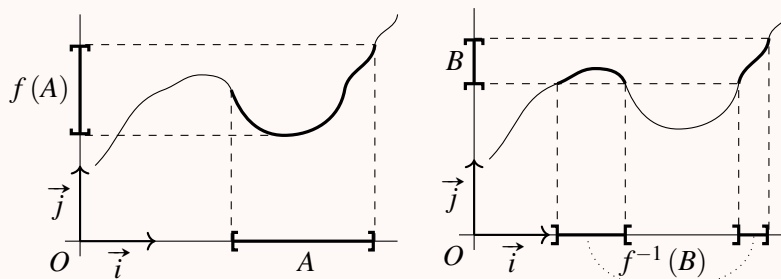
Remarque 4.1.9 : Un piège très commun

On reprend les notations précédentes.

Vous avez probablement déjà croisé la notation f^{-1} pour désigner la *réciproque* de f . Il faut être très vigilant quant à cette notation : de manière générale, il n'y a aucune raison générale que f^{-1} existe (nous détaillerons cela un peu plus loin), cependant $f^{-1}(B)$ est toujours défini, pour toute partie B de F .

Cas d'une application numérique

Si f est une application d'une partie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , on peut représenter les images directes et réciproques dans un repère comme sur le dessin suivant :



Exercice 4.1.10

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Déterminer $f([-1; 2])$.**Correction.** Soit $x \in [-1; 2]$. Alors $-1 \leq x \leq 2$ donc $0 \leq x^2 \leq 4$, c'est-à-dire que $f(x) \in [0; 4]$.On a donc montré que $f([-1; 2]) \subset [0; 4]$.De plus, $[0; 4] \subset f([-1; 2])$: en effet, pour tout $y \in [0; 4]$, on peut trouver $x \in [-1; 2]$ tel que $y = f(x)$ (il suffit de prendre $x = \sqrt{y}$).

Par double inclusion, on a

$$f([-1; 2]) = [0; 4]$$

Remarque 4.1.11

Les études de fonctions, et le théorème des valeurs intermédiaires (que nous verrons un peu plus tard) peuvent considérablement simplifier ce genre d'exercice.

Exercice 4.1.12

Soit

$$\begin{aligned} f &: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

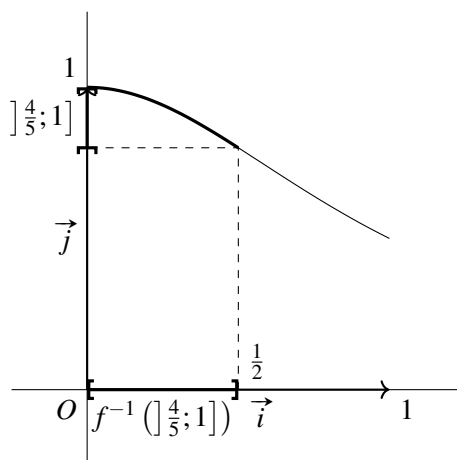
Déterminer $f^{-1}(\left[\frac{4}{5}; 1\right])$.**Correction.** Par définition :

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\left[\frac{4}{5}; 1\right]\right) &= \left\{x \in [0; 1], f(x) \in \left[\frac{4}{5}; 1\right]\right\} \\ &= \left\{x \in [0; 1], \frac{1}{1+x^2} \in \left[\frac{4}{5}; 1\right]\right\} \end{aligned}$$

Il s'agit donc de résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+x^2} \in \left[\frac{4}{5}; 1\right] \\ \Leftrightarrow &\frac{4}{5} < \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \\ \Leftrightarrow &\frac{5}{4} > 1+x^2 \geq 1 \text{ par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{4} > x^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow &0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ puisque } x \in [0; 1] \end{aligned}$$

Finalement $f^{-1}(\left[\frac{4}{5}; 1\right]) = [0; \frac{1}{2}[$ Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, cela peut s'interpréter ainsi :



4.2 Injection, surjection, bijection

Définition 4.2.1 – Application surjective

Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

On dit que f est *surjective* lorsque tout élément de F admet **au moins** un antécédent, c'est-à-dire lorsque

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Propriété 4.2.2 – Autre formulation de la surjectivité

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, où E et F sont deux ensembles. Alors f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

■ *Démonstration.* Immédiat par définition de $f(E)$. □

Exercice 4.2.3

Soit :

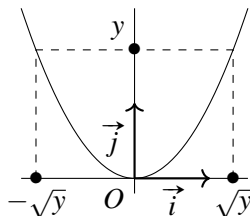
$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Montrer que f est surjective.

Correction. Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Alors $y = \sqrt{y}^2 = f(\sqrt{y})$: \sqrt{y} est donc un antécédent de y par f .

Ainsi, tout élément y de F admet au moins un antécédent par f : f est surjective.

Pour aller plus loin, voici une représentation graphique de f .



Remarquons que tout y strictement positif admet en réalité deux antécédents : \sqrt{y} et $-\sqrt{y}$ (on a bien $f(-\sqrt{y}) = (-\sqrt{y})^2 = y$).

Méthode 4.2.4 : Étudier la surjectivité d'une application

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, où E et F sont deux ensembles. Par définition, f est surjective si tout y de F admet au moins un antécédent par f . On peut donc, pour $y \in F$, considérer l'équation suivante, d'inconnue $x \in E$:

$$y = f(x)$$

f est surjective si et seulement si cette équation admet toujours une solution. On peut donc poser cette équation et l'étudier^a.

^a. Il ne s'agit pas forcément de la résoudre, mais plutôt de savoir si cette équation a des solutions...

Exercice 4.2.5

On considère l'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x+1}{x-2} \end{aligned}$$

f est-elle surjective ?

Correction. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{2x+1}{x-2} \\ &\iff (x-2)y = 2x+1 \\ &\iff xy - 2y = 2x+1 \\ &\iff xy - 2x = 2y+1 \\ &\iff x(y-2) = 2y+1 \end{aligned}$$

Si $y = 2$, alors l'égalité précédente devient $x \times 0 = 5$, qui est toujours fausse. 2 n'a donc aucun antécédent par f et f n'est pas surjective.

Définition 4.2.6 – Application injective

Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

On dit que f est *injective* lorsque tout élément de F ont **au plus** un antécédent par f , c'est-à-dire lorsque

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Remarque 4.2.7 : Formulation de l'injectivité

Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, E et F étant deux ensembles, alors la proposition

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

se lit « Si deux éléments de E ont même image par f , alors ces deux éléments sont égaux. » Cela revient bien à dire qu'un élément de F ne peut pas avoir deux antécédents différents : soit il en a un seul, soit il n'en a aucun.

Exercice 4.2.8

Soit :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

 f est-elle injective ?**Correction.** Définie sur \mathbb{R} , f n'est pas injective : on a par exemple $f(-1) = 1 = f(1)$ alors que $-1 \neq 1$.**Méthode 4.2.9 : Étudier l'injectivité d'une application**Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Pour étudier l'injectivité de f , on peut, au choix :

- Considérer deux éléments x_1 et x_2 dans E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Si cela implique que $x_1 = x_2$, alors f est injective.
- Considérer $y \in F$ et l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$. Si cette équation admet toujours **au plus** une solution, alors f est injective.

Exercice 4.2.10

Soit :

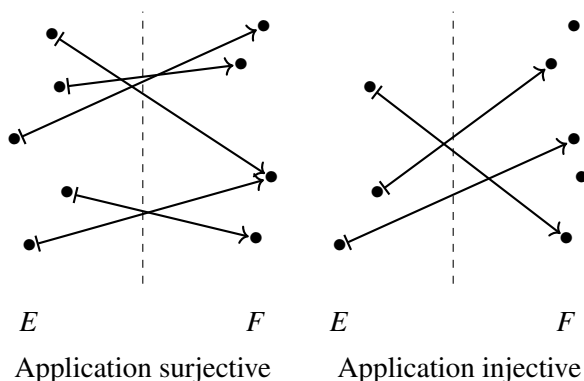
$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

 f est-elle injective ?**Correction.** Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ et supposons que $f(x_1) = f(x_2)$. On a donc $x_1^2 = x_2^2$, ou encore $x_1^2 - x_2^2 = 0$. En factorisant, on obtient :

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

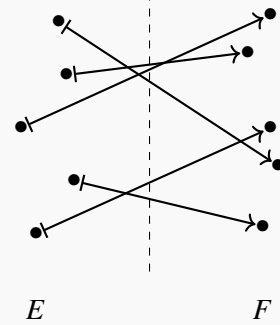
donc $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$.

- Si $x_1 - x_2 = 0$, alors $x_1 = x_2$.
- Si $x_1 + x_2 = 0$, et sachant que x_1 et x_2 sont ici positifs, on a forcément $x_1 = x_2 = 0$ (si l'un des deux étant non nul, leur somme serait strictement positive).

Dans tous les cas, on a $x_1 = x_2$: f est bien injective.**Définition 4.2.11 – Application bijective**Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.On dit que f est *bijective* lorsque f est injective et surjective.

Remarque 4.2.12 : Application bijective

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ où E et F sont deux ensembles. Alors f est bijective si tout élément de F admet exactement un antécédent par f , autrement dit, si à chaque élément de F correspond, par f , exactement un élément de E .

**Méthode 4.2.13 : Étudier la bijectivité d'une application**

Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Pour étudier la bijectivité de f , on peut, au choix :

- Montrer que f est surjective et injective.
- Considérer $y \in F$ et l'équation $x = f(y)$, d'inconnue $x \in E$. Si cette équation admet toujours **exactement** une solution, alors f est bijective.

Exercice 4.2.14

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\mapsto (a + b, 2a) \end{aligned}$$

est une bijection.

Correction. Soit $y \in \mathbb{R}^2$. y est donc de la forme (y_1, y_2) , où y_1 et y_2 sont des réels.

Soit $x \in \mathbb{R}^2$. x est donc de la forme (x_1, x_2) , où x_1 et x_2 sont des réels.

Alors :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff (y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \\ &\iff (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, 2x_1) \\ &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 2x_1 = y_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 = \frac{y_2}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - x_2 = y_1 - \frac{y_2}{2} \\ x_2 = \frac{y_2}{2} \end{cases} \\ &\iff x = \left(y_1 - \frac{y_2}{2}, \frac{y_2}{2} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, tout $y \in \mathbb{R}^2$ admet bien un unique antécédent dans \mathbb{R}^2 par f : f est une bijection.

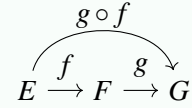
4.3 Composition d'applications

Définition 4.3.1 – Composée de deux applications

Soient E, F et F trois ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

On appelle *composée de g et f* l'application notée $g \circ f$ définie par

$$\begin{aligned} g \circ f &: E \rightarrow G \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$



Remarque 4.3.2

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, où E, F et G sont trois ensembles. $g \circ f$ est alors bien définie, et on a pour tout $x \in E$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Attention toutefois à l'ordre de la composition ! Par exemple, $f \circ g$ n'est ici pas définie : g arrive dans G mais on souhaite appliquer f , qui est définie sur E : ce n'est pas cohérent.

Propriété 4.3.3 – Associativité de la composition

Soient E, F, G et H trois ensembles. Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$ et $h \in \mathcal{F}(G, H)$. Alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

On pourra donc écrire $h \circ g \circ f$, sans parenthèses, et sans risque de confusion.

Démonstration. C'est immédiat : pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= ((h \circ g)(f(x))) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x) \end{aligned}$$

□

Propriété 4.3.4 – Composée d'injections, de surjections, de bijections

Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

Démonstration. — Supposons f et g injectives. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$, supposons que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ et montrons que $x_1 = x_2$. Puisque g est injective, on a alors $f(x_1) = f(x_2)$. Cependant, f est également injective, donc $x_1 = x_2$. $g \circ f$ est donc bien injective.

— Supposons f et g surjectives. Soit $y \in G$ et montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x)$. Puisque g est surjective, il existe $z \in F$ tel que $y = g(z)$. Cependant, f est surjective, donc il existe $x \in E$ tel que $z = f(x)$. En particulier, on a alors $y = g(z) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. $g \circ f$ est donc bien surjective.

— Supposons f et g bijectives, f et g sont donc injectives et surjectives : il en est donc de même pour $g \circ f$ d'après les deux points précédents, ainsi $g \circ f$ est bijective.

□

4.4 Applications réciproques

Définition 4.4.1 – Application identité

Soit E un ensemble. On appelle *application identité de E* l'application notée Id_E définie par

$$\begin{aligned} \text{Id}_E &: E \rightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Remarque 4.4.2

Soit E un ensemble. L'application identité de E est l'application qui « ne change rien » : à tout élément x de E , elle associe lui-même.

Bien que très simple, c'est une application très importante : elle est *neutre* pour la composition, c'est-à-dire que si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ (où F est aussi un ensemble), alors $f \circ \text{Id}_E = f$ et $\text{Id}_F \circ f = f$.

Définition 4.4.3 – Application réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

On appelle *réciproque* de f toute application $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$.

Si elle existe, une telle application est unique et sera notée f^{-1} .

Démonstration. Supposons que f admet deux réciproques g et h . Soit $y \in F$. Alors, par définition d'une réciproque, on a

$$f(g(y)) = \underbrace{(f \circ g)}_{\text{Id}_F}(y) = y$$

donc en appliquant h :

$$h(f(g(y))) = h(y)$$

ou encore

$$\underbrace{(h \circ f)}_{\text{Id}_E}(g(y)) = h(y)$$

c'est-à-dire

$$g(y) = h(y)$$

Finalement :

$$\forall y \in F, g(y) = h(y)$$

donc g et h sont la même application.

□

Remarque 4.4.4

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, où E et F sont deux ensembles.

A priori, rien ne garantit que f admette une réciproque : sans justification, on ne peut pas considérer que f^{-1} existe^a.

Supposons toutefois que f admette une réciproque. Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) = \text{Id}_E(x) = x$$

et pour tout $y \in F$:

$$f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) = \text{Id}_F(y) = y$$

a. Cependant, si B est une partie de F , l'image réciproque $f^{-1}(B)$ est toujours définie : voir 4.1.7

Propriété 4.4.5 – Lien entre bijection et réciproque

Soient E et F deux ensembles, et soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Alors :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ admet une réciproque}$$

Démonstration. — Supposons f bijective : chaque élément de F admet alors un unique antécédent par f . Cela nous permet de définir une application g , de F vers E , telle que pour tout $y \in F$, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f .

g est alors la réciproque de f : en effet, pour tout $y \in F$, on a $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$ puisque $g(y)$ est un antécédent de y par f .

De plus, pour tout $x \in E$, $g(f(x))$ est l'unique antécédent de $f(x)$ par f . Cependant, x est aussi un antécédent de $f(x)$ par f : par unicité de ce dernier, on en déduit que $g(f(x)) = x$.

Finalement, $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$ donc g est bien la réciproque de f .

— Supposons que f admette une réciproque notée g .

f est alors surjective. En effet, pour tout $y \in F$, on peut écrire $y = f(g(y)) : g(y)$, qui est bien un élément de E , est alors un antécédent de y par f .

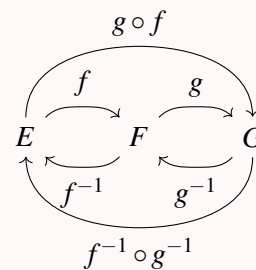
Montrons alors que f est injective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ ou encore $x_1 = x_2$ puisque g est réciproque de f . f est donc bien injective.

Finalement, f est bien bijective. □

Propriété 4.4.6 – Réciproque d'une composée

Soient E , F et G trois ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. On suppose f et g bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$



Démonstration. C'est un calcul direct, utilisant l'associativité de la composition :

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= \text{Id}_G \end{aligned}$$

On montre de la même façon que $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{Id}_E$, ce qui prouve que $g \circ f$ admet $f^{-1} \circ g^{-1}$ pour réciproque, et que $g \circ f$ est une bijection ^a. □

a. Ce qui avait déjà été démontré dans la propriété 4.3.4

Méthode 4.4.7 : Déterminer une réciproque

oient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Pour montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque, on peut considérer $y \in F$ et résoudre l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$.

Si, pour tout $y \in E$, cette équation admet une unique solution, celle-ci est l'unique antécédent de y par f : f est alors bijective, et pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$.

Exercice 4.4.8

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \rightarrow]0; 1] \\ x &\mapsto \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

est une bijection et déterminer sa réciproque.

Correction. Remarquons que f est bien définie : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x+1 \geq 1$ donc $\frac{1}{x+1} \in]0; 1]$. Soit $y \in]0; 1]$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{1}{x+1} \\ &\iff \frac{1}{y} = x+1 \\ &\iff x = \frac{1}{y} - 1 \end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{1}{y} - 1$ est bien dans \mathbb{R}_+ : puisque $y \in]0; 1]$, on a $\frac{1}{y} \geq 1$ et $\frac{1}{y} - 1 \geq 0$. Ainsi, tout $y \in \mathbb{R}_+$ admet exactement un antécédent par f . f est donc bijective et sa réciproque est

$$\begin{aligned} f^{-1} &:]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ y &\mapsto \frac{1}{y} - 1 \end{aligned}$$

4.5 Restriction et prolongement

Il arrive que l'on ait besoin de modifier le domaine de définition d'une application. On peut par exemple le restreindre.

Définition 4.5.1 – Restriction

Soient E et F deux ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et A une partie de E . On appelle *restriction de f à A* et on note $f|_A$ l'application définie par

$$\begin{aligned} f|_A &: A \rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

À l'inverse, on peut parfois étendre le domaine de définition d'une application.

Définition 4.5.2 – Prolongement

Soient E et F deux ensembles et soit A une partie de E . Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ et soit B une partie de E contenant A . On appelle *prolongement de f sur B* toute application de B vers F dont la restriction à A est f .

Exemple 4.5.3

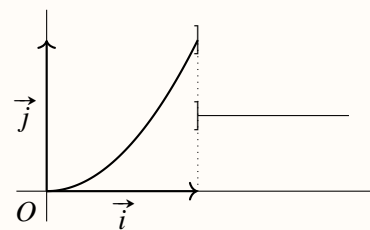
Considérons les applications

$$\begin{aligned} f &: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0; 1] \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $g(x) = f(x)$: g est donc un^a prolongement de f sur $[0; 2]$.

^a. Notez bien que ce prolongement n'est absolument pas unique !

**4.6 Fonctions indicatrices****Définition 4.6.1 – Fonction indicatrice d'un ensemble**

Soit E un ensemble et A une partie de E . On appelle *fonction indicatrice de A* la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A &: E \rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 4.6.2

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E . Montrer que :

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

Correction. Soit $x \in E$.

— Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, de sorte que

$$\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1 = 1 \times 1 = \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(x)$$

— Sinon, $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0$ et puisque x n'est pas dans $A \cap B$, il est dans $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Si $x \in \overline{A}$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et $\mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(x) = 0$. Il en est de même si $x \in \overline{B}$.

Dans les deux cas, on a bien $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(x)$.

4.7 Exercices**Exercice 4.7.1**

Soient E et F deux ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Soit A une partie de E . Est-ce que $A \subset f^{-1}(f(A))$? Est-ce que $f^{-1}(f(A)) \subset A$?

Exercice 4.7.2

Soient E et F deux ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Soient A et B deux parties de E .

1. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Montrer que la réciproque est vraie si f est injective.
3. La réciproque est-elle vraie en général ?

Exercice 4.7.3

Soient E et F deux parties de \mathbb{R} . Soit

$$\begin{array}{ccc} f & : & E \rightarrow F \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

1. Dans chacun des cas suivants, étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f .

(a) $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}$

(b) $E = \mathbb{R}_+, F = \mathbb{R}$

(c) $E = \mathbb{R}_+, F = \mathbb{R}_+$,

(d) $E = \mathbb{R}_-, F = \mathbb{R}_+$

2. On suppose que $E = F = \mathbb{R}$. Déterminer :

(a) $f(\mathbb{R}_+)$

(b) $f([0; 2])$

(c) $f(]0; 2])$

(d) $f(]-1; 2])$

(e) $f^{-1}([1; +\infty[)$

(f) $f^{-1}(]-\infty; 1])$

Exercice 4.7.4

Soient E et F deux ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Soient A et B deux parties de F . Montrer que $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4.7.5

Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
3. Si $g \circ f$ est bijective, peut-on affirmer que g et f sont bijectives ?

Exercice 4.7.6

Soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_0 \neq x_1$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \mapsto & (ax_0 + b, ax_1 + b) \end{array}$$

est une bijection.

2. On ramène le plan à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Montrer que pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe une et une seule fonction affine ^a dont la courbe passe par les points de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) .

^a. Rappelons qu'une fonction affine est de la forme $x \mapsto ax + b$, où a et b sont deux réels.

Exercice 4.7.7

Étudier l'injectivité et la surjectivité de la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x+1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Correction. Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x+1}{x^2+1} = y \\ &\iff x+1 = y(x^2+1) \\ &\iff x+1 = yx^2+y \\ &\iff 0 = yx^2 - x + y - 1 \end{aligned}$$

Si $y = 0$, cette équation équivaut à $x = -1 : 0$ a donc un unique antécédent par f .

Supposons que $y \neq 0$. Alors l'équation précédente est polynomiale de degré 2, et son discriminant (qui dépend de y) est

$$\Delta(y) = (-1)^2 - 4 \times y \times (y-1) = 1 - 4y^2 + 4y = -4y^2 + 4y + 1$$

Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

- Si $\Delta(y) > 0$, alors le polynôme $yX^2 - X + y - 1$ admet deux racines distinctes : y admet alors deux antécédents distincts par f .
- Si $\Delta(y) = 0$, alors le polynôme $yX^2 - X + y - 1$ n'admet qu'une seule racine et y n'admet qu'un seul antécédent par f .
- Si $\Delta(y) < 0$, alors le polynôme $yX^2 - X + y - 1$ n'admet aucune racine (réelle) et y n'admet aucun antécédent.

C'est donc le signe de $\Delta(y)$ qui nous intéresse. Or il s'agit à nouveau d'un polynôme de degré 2, de discriminant

$$\Gamma = 4^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 2 \times 4^2$$

Δ admet donc deux racines réelles distinctes, qui sont

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-4 - \sqrt{2 \times 4^2}}{2 \times (-4)} & y_2 &= \frac{-4 + \sqrt{2 \times 4^2}}{2 \times (-4)} \\ &= \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{-2 \times 4} & &= \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{-2 \times 4} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{2}}{-2} & &= \frac{-1 + \sqrt{2}}{-2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2} & &= \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Le tableau de signe de Δ est donc le suivant :

y	$-\infty$	y_2	y_1	$+\infty$	
$\Delta(y)$	$-$	0	$+$	0	$-$

En particulier, pour tout $y \in]y_2; y_1[\setminus \{0\}$ (le cas $y = 0$ a été traité à part), alors y admet deux antécédents distincts par f . f n'est donc pas injective.

Les éléments $]-\infty; y_2[\cup]y_1; +\infty[$ n'ont aucun antécédent par f . f n'est donc pas surjective.

Exercice 4.7.8

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n & n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g .
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 4.7.9

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que l'application $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ est une bijection entre deux ensembles à préciser. Déterminer sa réciproque.

Exercice 4.7.10

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E . Montrer que :

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$$

4.8 DM conducteur**Exercice 12**

Soient E et F deux ensembles et A une partie de E .

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que si f est injective, alors $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
3. Montrer que

$$(\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A) \iff f \text{ est injective}$$

Correction. 1. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. Supposons que f est injective. On sait déjà que $A \subset f^{-1}(f(A))$, reste à voir l'inclusion réciproque.

Soit $x \in f^{-1}(f(A))$: par définition, on a $f(x) \in f(A)$ donc il existe $z \in A$ tel que $f(x) = f(z)$. Or f est injective donc $x = z$ et ainsi $x \in A$. On a donc bien $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Ainsi, si f est injective, alors $f^{-1}(f(A)) = A$.

3. Montrons le sens direct, c'est-à-dire que

$$(\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A) \implies f \text{ est injective}$$

Supposons que $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$ et montrons que f est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Ainsi, $f(x) \in \{f(x)\} = \{f(y)\}$ donc $x \in f^{-1}(f(y)) = \{y\}$ donc $x = y$. f est donc bien injective.

Le sens réciproque ayant déjà été prouvé, on a bien

$$(\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A) \iff f \text{ est injective}$$

Exercice 13

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2} \end{aligned}$$

n'est ni injective, ni surjective.

2. Montrer que

$$\begin{aligned} f_2 &: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2} \end{aligned}$$

est injective.

3. Déterminer une partie
- F
- de
- \mathbb{R}
- telle que l'application

$$\begin{aligned} f_3 &: [0; +\infty[\rightarrow F \\ x &\mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2} \end{aligned}$$

soit bijective.

Correction. 1. $f_1(-1) = \frac{2}{3} = f_1(1)$ alors que $-1 \neq 1$: f_1 n'est donc pas injective.De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 < x^2 + 1 < x^2 + 2$ donc $0 < \frac{x^2+1}{x^2+2} < 1$.Ainsi, 2 (par exemple) n'a pas d'antécédent par f_1 . f_1 n'est donc pas surjective.

2. Soient
- $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$
- . Alors :

$$\begin{aligned} f_2(x_1) = f_2(x_2) &\iff \frac{x_1^2+1}{x_1^2+2} = \frac{x_2^2+1}{x_2^2+2} \\ &\iff (x_1^2+1)(x_2^2+2) = (x_2^2+1)(x_1^2+2) \\ &\iff x_1^2x_2^2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 2 = x_1^2x_2^2 + 2x_2^2 + x_1^2 + 2 \\ &\iff x_1^2 = x_2^2 \\ &\iff x_1 = x_2 \text{ car } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

 f_2 est donc bien injective.

3. D'après la question précédente, à partir du moment où
- f_3
- est bien définie (c'est-à-dire que pour tout
- $x \in [0; +\infty[$
- , on a bien
- $f_3(x) \in F$
-),
- f_3
- sera automatiquement injective.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in [0; +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned} f_3(x) = y &\iff \frac{x^2+1}{x^2+2} = y \\ &\iff x^2+1 = y(x^2+2) \\ &\iff x^2 - yx^2 = 2y - 1 \\ &\iff x^2(1-y) = 2y - 1 \end{aligned}$$

— Si $y = 1$, cette équation équivaut donc à $0 = 1$, ce qui est impossible. 1 n'a donc pas d'antécédent par f .— Si $y \neq 1$, alors :

$$f(x) = y \iff x^2 = \frac{2y-1}{1-y}$$

qui n'a de solution que si $\frac{2y-1}{1-y} \geq 0$ (cette solution étant alors $\sqrt{\frac{2y-1}{1-y}}$). Un tableau de signe est alors tout indiqué :

y	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2y - 1$	$-$	0	$+$	$+$
$1 - y$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{2y-1}{1-y}$	$-$	0	$+$	$-$

Ainsi y admet un antécédent par f_3 si et seulement si $y \in [\frac{1}{2}; 1[$.

Finalement, les seuls réels ayant au moins un antécédent par f_3 sont ceux de l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1[$.

Ainsi, en posant $F = [\frac{1}{2}; 1[$, f_3 est bien bijective.

Exercice 14

Montrer que l'application

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est une bijection.

Correction. Remarquons déjà que f est bien définie : en effet, pour tout $x \in \mathbb{Z}$:

- Si $x \geq 0$, alors $2x \in \mathbb{N}$.
- Si $x < 0$ alors $x \leq -1$ donc $-2x \geq 2$ et $-2x - 1 \geq 1$.

Dans les deux cas, $f(x)$ est bien dans \mathbb{N} .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si n est pair, il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2x$. Or $x \geq 0$ donc $f(x) = 2x = n$. n admet donc bien un antécédent par f .
- Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1 = -2 \times (-k - 1) - 1 = -2x - 1$ en posant $x = -k - 1$. Puisque $k \in \mathbb{N}$, on a $x \in \mathbb{Z}$ avec $x < 0$ donc $f(x) = -2x - 1 = n$. n admet donc aussi un antécédent par f .

Dans tous les cas, n admet bien un antécédent par f : f est surjective.

Montrons maintenant que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

- Si $x_1 < 0$ et $x_2 \geq 0$, alors $f(x_1) = -2x_1 - 1$ est impair et $f(x_2) = 2x_2$ est pair : ce cas est donc exclu puisque $f(x_1)$ est supposé être égal à $f(x_2)$.
- De la même façon, le cas « $x_1 \geq 0$ et $x_2 < 0$ » est aussi exclu.
- Si $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, alors $f(x_1) = 2x_1$ et $f(x_2) = 2x_2$ donc $2x_1 = 2x_2$ et $x_1 = x_2$.
- Si $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$, alors $f(x_1) = -2x_1 - 1$ et $f(x_2) = -2x_2 - 1$ donc $-2x_1 - 1 = -2x_2 - 1$ et une résolution immédiate donne $x_1 = x_2$.

Dans tous les cas, on a bien $x_1 = x_2$: f est injective.

Finalement, f est une bijection.

Remarque 4.8.1

On peut aussi raisonner plus directement : soit $x \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

— Si n est pair :

$$\begin{aligned} f(x) = n &\iff (x \geq 0 \text{ et } n = 2x) \text{ ou } \underbrace{(x < 0 \text{ et } n = -2x - 1)}_{\text{impossible car } n \text{ est pair}} \\ &\iff \left(x \geq 0 \text{ et } x = \frac{n}{2} \right) \\ &\iff x = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

— Si n est impair :

$$\begin{aligned} f(x) = n &\iff \underbrace{(x \geq 0 \text{ et } n = 2x)}_{\text{impossible car } n \text{ est impair}} \text{ ou } (x < 0 \text{ et } n = -2x - 1) \\ &\iff (x < 0 \text{ et } n = -2x - 1) \\ &\iff \left(x < 0 \text{ et } x = \frac{-n-1}{2} \right) \\ &\iff x = \frac{-n-1}{2} \text{ car } \frac{-n-1}{2} < 0 \end{aligned}$$

Dans les deux cas, n admet un unique antécédent.

On a ainsi montré que f est bijective, et on a trouvé sa réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Chapitre 5

Sommes et produits

5.1	Sommes et produits	84
5.1.1	Généralités	84
5.1.2	Sommes et produits à connaître	91
5.1.3	Sommes doubles	97
5.1.4	Formule du binôme	100
5.2	Exercices	106
5.3	DM conducteur	107

5.1 Sommes et produits

5.1.1 Généralités

Définition 5.1.1 – Somme et produit d'une famille finie de réels

Soit $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ un ensemble fini non vide, i_1, i_2, \dots, i_n étant deux-à deux distincts.

Soit $(a_k)_{k \in I} = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ une famille de réels.

La somme de la famille $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ est notée $\sum_{k \in I} a_k$ et vaut :

$$\sum_{k \in I} a_k = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n}$$

Le produit de la famille $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ est noté $\prod_{k \in I} a_k$ et vaut :

$$\prod_{k \in I} a_k = a_{i_1} \times a_{i_2} \times \dots \times a_{i_n}$$

Lorsque I est de la forme $\llbracket u; v \rrbracket$, où $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, on note aussi :

$$\sum_{k=u}^v a_k = \sum_{k \in \llbracket u; v \rrbracket} a_k \text{ et } \prod_{k=u}^v a_k = \prod_{k \in \llbracket u; v \rrbracket} a_k$$

Avec cette notation, a est appelé *rang de départ* de la somme et b est appelé *rang d'arrivée*.

Dans le cas où I est vide, on pose par convention ^a :

$$\sum_{k \in \emptyset} a_k = 0 \text{ et } \prod_{k \in \emptyset} a_k = 1$$

De même, si $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ avec $v < u$, cette convention donne $\sum_{k=u}^v a_k = 0$ et $\prod_{k=u}^v a_k = 1$.

a. Ces conventions ont été choisies en adéquation avec la propriété 5.1.4

Remarque 5.1.2

On reprend les notations de la définition précédente. Dans la notation « $\sum_{k \in I} a_k$ », i est une variable muette appelé *indice de la somme*, dont on peut changer le nom à volonté. Ainsi :

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{z \in I} a_z = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha$$

Exemple 5.1.3

Voici quelques exemples de sommes :

$$\sum_{k \in \{-1, 2, 5\}} \frac{1}{k} = \frac{1}{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{-1}{10} + \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\sum_{k=1}^4 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\sum_{f \in \{\exp, \cos, \sin\}} f(0) = \exp(0) + \cos(0) + \sin(0) = 1 + 1 + 0 = 2$$

Propriété 5.1.4

Soient I et J deux ensembles finis et disjoints. Soient $(a_k)_{k \in I}$ et $(a_k)_{k \in J}$ deux familles de réels. Alors :

$$\sum_{k \in I \cup J} a_k = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in J} a_k$$

$$\prod_{k \in I \cup J} a_k = \prod_{k \in I} a_k \times \prod_{k \in J} a_k$$

Démonstration. Supposons dans un premier temps que I et J sont non vides.

Notons $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ et $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, où i_1, i_2, \dots, i_n sont deux-à-deux distincts, ainsi que j_1, j_2, \dots, j_m . Alors $I \cup J = \{i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_m\}$ et $i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_m$ sont deux-à-deux distincts puisque I et J sont disjoints. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I \cup J} a_k &= a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n} + a_{j_1} + a_{j_2} + \dots + a_{j_m} \\ &= \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in J} a_k \end{aligned}$$

et le calcul est le même pour le produit.

Supposons maintenant que I est vide. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I \cup J} a_k &= \sum_{k \in J} a_k \\ &= 0 + \sum_{k \in J} a_k \\ &= \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in J} a_k \text{ par convention} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k \in I \cup J} a_k &= \prod_{k \in J} a_k \\ &= 1 \times \prod_{k \in J} a_k \\ &= \prod_{k \in I} a_k \times \prod_{k \in J} a_k \text{ par convention} \end{aligned}$$

□

Exemple 5.1.5

La propriété 5.1.4 permet quelques manipulations intéressantes, dont la *relation de Chasles* : si $n \in \mathbb{N}$ et si $(a_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une famille de réels, alors pour tout $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on peut « couper » la somme en m :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k$$

Soyez vigilant : la deuxième somme commence bien à $m+1$, et pas à m , sinon le terme a_m serait compté deux fois. Notez aussi que cette égalité est aussi vraie si $m = n$, puisque dans ce cas, $\sum_{k=m+1}^n a_k$ est nulle par convention.

Propriété 5.1.6 – Linéarité

Soit I un ensemble fini. Soient $(a_k)_{k \in I}$ et $(b_k)_{k \in I}$ deux familles de réels. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{k \in I} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k \in I} a_k \text{ et } \sum_{k \in I} (a_k + b_k) = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in I} b_k$$

De plus, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{k \in I} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k \in I} a_k + \mu \sum_{k \in I} b_k$$

Démonstration. Par récurrence

On peut par exemple raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de I . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons \mathcal{P}_n l'assertion « Pour tout ensemble I à n éléments, pour toute familles de réels $(a_k)_{k \in I}$ et $(b_k)_{k \in I}$, et pour tout réel λ , on a $\sum_{k \in I} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k \in I} a_k$ et $\sum_{k \in I} (a_k + b_k) = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in I} b_k$ ».

Initialisation : Si $n = 0$, I est vide, toutes les sommes apparaissant dans la propriété \mathcal{P}_0 sont nulles et \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n soit vraie. Soit I un ensemble à $n + 1$ éléments, $(a_k)_{k \in I}$ et $(b_k)_{k \in I}$ deux familles de réels et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit ω un élément quelconque de I . Alors $I \setminus \{\omega\}$ est formé de n éléments : on peut lui appliquer \mathcal{P}_n , de sorte que :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I} (\lambda a_k) &= \sum_{k \in I \setminus \{\omega\}} (\lambda a_k) + \lambda a_\omega \\ &= \lambda \sum_{k \in I \setminus \{\omega\}} a_k + \lambda a_\omega \\ &= \lambda \left(\sum_{k \in I \setminus \{\omega\}} a_k + a_\omega \right) \\ &= \lambda \sum_{k \in I} a_k \text{ d'après 5.1.4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in I} (a_k + b_k) \\ &= \sum_{k \in I \setminus \{\omega\}} (a_k + b_k) + a_\omega + b_\omega \\ &= \sum_{k \in I \setminus \{\omega\}} a_k + a_\omega + \sum_{k \in I \setminus \{\omega\}} b_k + b_\omega \\ &= \sum_{k \in I \setminus \{\omega\}} a_k + \sum_{k \in I \setminus \{\omega\}} b_k + a_\omega + b_\omega \\ &= \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in I} b_k \end{aligned}$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie, ce qui achève la récurrence.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toutes familles de réels $(a_k)_{k \in I}$ et $(b_k)_{k \in I}$, on a bien

$$\sum_{k \in I} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k \in I} a_k \quad (5.1)$$

$$\sum_{k \in I} (a_k + b_k) = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in I} b_k \quad (5.2)$$

Avec les pointillés

En notant i_1, i_2, \dots, i_n les éléments (deux-à-deux distincts) de I , la linéarité de la somme devient très naturelle :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I} (\lambda a_k) &= \lambda a_{i_1} + \lambda a_{i_2} + \dots + \lambda a_{i_n} \\ &= \lambda (a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n}) \\ &= \lambda \sum_{k \in I} a_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in I} (a_k + b_k) &= a_{i_1} + b_{i_1} + a_{i_2} + b_{i_2} + \cdots + a_{i_n} + b_{i_n} \\
&= a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n} + b_{i_1} + b_{i_2} + \cdots + b_{i_n} \\
&= \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in I} b_k
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toutes familles de réels $(a_k)_{k \in I}$ et $(b_k)_{k \in I}$, on a bien

$$\sum_{k \in I} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k \in I} a_k \quad (5.3)$$

$$\sum_{k \in I} (a_k + b_k) = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in I} b_k \quad (5.4)$$

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, en appliquant successivement (5.4) et (5.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in I} (\lambda a_k + \mu b_k) &= \sum_{k \in I} (\lambda a_k) + \sum_{k \in I} (\mu b_k) \\
&= \lambda \sum_{k \in I} a_k + \mu \sum_{k \in I} b_k
\end{aligned}$$

□

Propriété 5.1.7

Soit I un ensemble. Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels. Alors

$$\prod_{k \in I} (a_k b_k) = \prod_{k \in I} a_k \times \prod_{k \in I} b_k$$

Démonstration. Se montre comme pour la linéarité de la somme. □

Propriété 5.1.8 – Changement d'indice

Soient I un ensemble fini. Soit φ une application injective de I vers un ensemble J .

Soit $(a_j)_{j \in J}$ une famille de réels. Alors :

$$\sum_{k \in I} a_{\varphi(k)} = \sum_{k \in \varphi(I)} a_k \text{ et } \prod_{k \in I} a_{\varphi(k)} = \prod_{k \in \varphi(I)} a_k$$

Démonstration. Notons i_1, i_2, \dots, i_n les éléments, deux-à-deux distincts, de I . Alors, par définition, on a

$$\varphi(I) = \{\varphi(i_1), \varphi(i_2), \dots, \varphi(i_n)\}$$

De plus, $\varphi(i_1), \varphi(i_2), \dots, \varphi(i_n)$ sont deux-à-deux distincts puisque φ est injective : en effet, pour tout $(u, v) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, si $\varphi(i_u) = \varphi(i_v)$ alors $i_u = i_v$ par injectivité de φ .

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in \varphi(I)} a_k &= \sum_{k \in \{\varphi(i_1), \dots, \varphi(i_n)\}} a_k \\
 &= a_{\varphi(i_1)} + a_{\varphi(i_2)} + \dots + a_{\varphi(i_n)} \\
 &= \sum_{k \in \{i_1, i_2, \dots, i_n\}} a_{\varphi(k)} \\
 &= \sum_{k \in I} a_{\varphi(k)}
 \end{aligned}$$

La preuve est la même pour le produit. □

Exemple 5.1.9 – Décalage

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_k)_{k \in \llbracket 3; n+2 \rrbracket}$ une famille de réels. Considérons la somme $\sum_{k=1}^n a_{k+2}$. On peut « décaler » les indices en utilisant le changement de variable défini par

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi & : & \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \mathbb{N} \\
 & & k \mapsto k+2
 \end{array}$$

qui est bien injective. Cela donne :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_{k+2} &= \sum_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} a_{\varphi(k)} \\
 &= \sum_{k \in \varphi(\llbracket 1; n \rrbracket)} a_k \\
 &= \sum_{k \in \llbracket 3; n+2 \rrbracket} a_k \\
 &= \sum_{k=3}^{n+2} a_k
 \end{aligned}$$

Cette rédaction est toutefois un peu lourde : pour des changements d'indice « simples » comme celui-ci, on peut présenter ce calcul ainsi :

$$\sum_{k=1}^n a_{k+2} \stackrel{\substack{j=k+2 \\ k=j-2}}{=} \sum_{j=3}^{n+2} a_j$$

Dans cette présentation, on exprime j (le « nouvel » indice) en fonction de k , mais aussi k en fonction de j (ce qui justifie que le changement d'indice est bien défini à partir d'une bijection).

Exemple 5.1.10 – Inversion de l'ordre des termes d'une somme

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ une famille de réels. On peut inverser l'ordre des termes de la somme $\sum_{k=0}^n a_k$, puisque l'application

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi & : & \llbracket 0; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 0; n \rrbracket \\
 & & k \mapsto n-k
 \end{array}$$

est bijective : en effet, pour tout $y \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et tout $x \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &\iff y = n - x \\ &\iff x = n - y \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k \in \llbracket 0;n \rrbracket} a_{n-(n-k)} = \sum_{k \in \llbracket 0;n \rrbracket} a_{n-\varphi(k)} = \sum_{k \in \varphi(\llbracket 0;n \rrbracket)} a_{n-k} = \sum_{k \in \llbracket 0;n \rrbracket} a_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k}$$

Avec une rédaction plus facile à mettre en place, on pourrait écrire :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k \in \llbracket 0;n \rrbracket} a_k \stackrel{\substack{j=n-k \\ k=n-j}}{=} \sum_{j \in \llbracket 0;n \rrbracket} a_{n-j} = \sum_{j=0}^n a_{n-j} = \sum_{k=0}^n a_{n-k}$$

Le même raisonnement peut aussi s'appliquer aux produits.

Exercice 5.1.11

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme

$$S_n = \sum_{k \in \{0,2,4,\dots,2n\}} 2^k$$

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans la somme définissant S_n , nous n'avons que des indices k pairs : il pourrait être intéressant de procéder au changement de variable $k \mapsto \frac{k}{2}$, bijection de $\{0,2,4,\dots,2n\}$ vers $\llbracket 0;n \rrbracket$:

$$S_n = \sum_{k \in \{0,2,4,\dots,2n\}} 2^k \stackrel{\substack{j=\frac{k}{2} \\ k=2j}}{=} \sum_{j \in \llbracket 0;n \rrbracket} 2^{2j} = \sum_{j=0}^n (2^2)^j = \sum_{j=0}^n 4^j = \frac{1-4^{n+1}}{1-4} = \frac{4^{n+1}-1}{3}$$

Propriété 5.1.12 – Sommation par paquets

1. Soit I un ensemble fini. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, \dots, A_n des parties de I deux à deux disjointes. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels. Alors :

$$\sum_{i \in \bigcup_{k=1}^n A_k} a_i = \sum_{i \in A_1} a_i + \sum_{i \in A_2} a_i + \dots + \sum_{i \in A_n} a_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in A_k} a_i$$

et

$$\prod_{i \in \bigcup_{k=1}^n A_k} a_i = \prod_{i \in A_1} a_i \prod_{i \in A_2} a_i + \dots + \prod_{i \in A_n} a_i = \prod_{k=1}^n \prod_{i \in A_k} a_i$$

2. Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels.
Soit \mathcal{A} une partition de I . Alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{i \in A} a_i$$

$$\prod_{i \in I} a_i = \prod_{A \in \mathcal{A}} \prod_{i \in A} a_i$$

Démonstration. Nous traiterons le cas de la somme, la démonstration étant similaire pour le produit.

- On peut raisonner par récurrence sur n . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la propriété \mathcal{P}_n : « Pour toutes parties A_1, A_2, \dots, A_n de I , deux-à-deux disjointes, on a $\sum_{i \in \bigcup_{k=1}^n A_k} a_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in A_k} a_i$ ».

— Posons $n = 1$. Soit A_1 une partie de I . Alors :

$$\sum_{i \in \bigcup_{k=1}^1 A_k} a_i = \sum_{i \in A_1} a_i$$

\mathcal{P}_1 est donc vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons \mathcal{P}_n vraie. Soient A_1, A_2, \dots, A_{n+1} des parties de I deux-à-deux disjointes. Alors

$$\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^n \underbrace{(A_k \cap A_{n+1})}_{=\emptyset} = \emptyset$$

et

$$\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cup A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$$

donc, d'après 5.1.4 :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k} a_i &= \sum_{i \in \bigcup_{k=1}^n A_k} a_i + \sum_{i \in A_{n+1}} a_i \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i \in A_k} a_i + \sum_{i \in A_{n+1}} a_i \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i \in A_k} a_i \end{aligned}$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie, ce qui achève la récurrence.

- Soit \mathcal{A} une partition de I . Notons A_1, A_2, \dots, A_n les éléments, deux-à-deux distincts, de \mathcal{A} . Alors A_1, A_2, \dots, A_n sont aussi deux-à-deux disjointes et $\bigcup_{k=1}^n A_k = I$. On a donc, d'après le premier point :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i &= \sum_{i \in \bigcup_{k=1}^n A_k} a_i \\ &= \sum_{i \in A_1} a_i + \sum_{i \in A_2} a_i + \dots + \sum_{i \in A_n} a_i \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{i \in A} a_i \end{aligned}$$

□

Exercice 5.1.13

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est multiple de } 3 \\ 0 & \text{si } k-1 \text{ est multiple de } 3 \\ -1 & \text{si } k-2 \text{ est multiple de } 3 \end{cases}$$

Calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{15} a_k$$

Correction. Considérons les ensembles suivants :

$$A_0 = \{k \in \llbracket 0; 15 \rrbracket, k \text{ est multiple de } 3\} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$$

$$A_1 = \{k \in \llbracket 0; 15 \rrbracket, k - 1 \text{ est multiple de } 3\} = \{1, 4, 7, 10, 13\}$$

$$A_2 = \{k \in \llbracket 0; 15 \rrbracket, k - 2 \text{ est multiple de } 3\} = \{2, 5, 8, 11, 14\}$$

$\{A_0, A_1, A_2\}$ est alors une partition de $\llbracket 0; 15 \rrbracket$: la réunion de A_0 , A_1 et A_2 est bien formée de tous les entiers entre 0 et 15, et ces trois parties non vides de $\llbracket 0; 15 \rrbracket$ sont deux-à-deux disjointes.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \llbracket 0; 15 \rrbracket} a_k &= \sum_{k \in A_0} a_k + \sum_{k \in A_1} a_k + \sum_{k \in A_2} a_k \\ &= \sum_{k \in A_0} 1 + \sum_{k \in A_1} 0 + \sum_{k \in A_2} (-1) \\ &= 6 \times 1 + 0 + 5 \times (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

5.1.2 Sommes et produits à connaître

Propriété 5.1.14 – Somme de termes constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$. Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{k=a}^b q = (b - a + 1)q$$

Démonstration. Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n 1 = n$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$ et soit $q \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^b q &= q \sum_{k=a}^b 1 \\ &= q \sum_{j=1}^{b-a+1} 1 \text{ par le changement d'indice } k \mapsto k - a + 1 \\ &= q \times (b - a + 1) \end{aligned}$$

□

Propriété 5.1.15 – Sommes et produits télescopiques

Soient $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$. Soit $(a_k)_{k \in \llbracket m; n+1 \rrbracket}$ une famille de réels. Alors :

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$$

De plus, si a_k est non nul pour tout $i \in \llbracket m; n \rrbracket$, alors :

$$\prod_{k=m}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$$

Démonstration. Par linéarité de la somme, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=m}^n a_{k+1} - \sum_{k=m}^n a_k \\ &= \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j - \sum_{k=m}^n a_k \text{ par changement d'indice dans la première somme} \\ &= \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k - \sum_{k=m}^n a_k \\ &= \sum_{k=m+1}^n a_k + a_{n+1} - \left(\sum_{k=m+1}^n a_k + a_m \right) \\ &= \sum_{k=m+1}^n a_k - \sum_{k=m+1}^n a_k + a_{n+1} - a_m \\ &= a_{n+1} - a_m \end{aligned}$$

Le raisonnement est similaire pour le produit. □

Remarque 5.1.16

Plus que d'apprendre cette propriété par cœur, il vaut mieux bien en comprendre le fonctionnement, somme toute assez simple en écrivant le résultat « avec des pointillés ». En reprenant les notations de la propriété en question, et en considérant que $a_k \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket m; n-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \prod_{k=m}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\cancel{a_{m+1}}}{a_m} \times \frac{\cancel{a_{m+2}}}{\cancel{a_{m+1}}} \times \cdots \times \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n-1}}} \times \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} \\ &= \frac{a_{n+1}}{a_m} \end{aligned}$$

Pour la somme, le fonctionnement est le même.

Exercice 5.1.17 – Très classique

1. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Correction. 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} &= \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)} \\ &= \frac{ak + a + bk}{k(k+1)} \\ &= \frac{(a+b)k + a}{k(k+1)} \end{aligned}$$

Ainsi, pour que $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ soit égal à $\frac{1}{k(k+1)}$, il suffit^a d'avoir

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(- \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \right) \\ &= - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) && \text{par linéarité} \\ &= - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

^a. C'est même nécessaire si on souhaite que cette égalité soit vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Propriété 5.1.18 – Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Si $q = 1$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $q^k = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n 1 = n - 0 + 1 = n + 1$$

Supposons que $q \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une astuce consiste à considérer $(1 - q) \sum_{k=0}^n q^k$:

$$\begin{aligned} (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^n (1 - q) q^k \\ &= \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) \\ &= - \sum_{k=0}^n (q^{k+1} - q^k) \\ &= -(q^{n+1} - 1) \text{ par somme télescopique} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

et en divisant par $1 - q$, on obtient bien

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

Exercice 5.1.19

Calculer

$$S = \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{3^k}$$

Correction. Procédons par changement d'indice :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{3^k} \\ &= \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{3^{j+2}} \\ &= \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3^j} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^j \\ &= \frac{1}{9} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{9} \frac{1}{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{3^{11}}\right) \\ &= \frac{1}{9} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{11}}\right) \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3^{11}}\right) \end{aligned}$$

Propriété 5.1.20

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors ^a :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

^a. Le premier terme de ces deux sommes étant nul, on peut les faire commencer à 1 sans changer le résultat.

Démonstration. Il y a de multiples façons de démontrer ces résultats. Raisonner par récurrence est un très bon exercice ! Néanmoins, une astuce s'appuyant sur les sommes télescopiques permet de retrouver ces formules si jamais, par malheur, on les oublie.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, remarquons que

$$(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k + 1$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. En sommant l'égalité précédente, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=0}^n (2k+1)$$

ou encore, par somme télescopique et par linéarité de la somme :

$$(n+1)^2 - 0^2 = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$$

c'est-à-dire

$$(n+1)^2 = 2 \sum_{k=0}^n k + n + 1$$

ainsi

$$2 \sum_{k=0}^n k = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)(n+1-1) = (n+1)n$$

puis

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour la deuxième formule, l'idée est la même : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a ^a

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

puis, par télescopage et linéarité :

$$(n+1)^3 = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$$

c'est-à-dire

$$(n+1)^3 = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
 3 \sum_{k=0}^n k^2 &= (n+1)^3 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
 &= (n+1) \left((n+1)^2 - 3 \frac{n}{2} - 1 \right) \\
 &= (n+1) \frac{2(n+1)^2 - 3n - 2}{2} \\
 &= \frac{n+1}{2} (2(n^2 + 2n + 1) - 3n - 2) \\
 &= \frac{n+1}{2} (2n^2 + n) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

et en divisant par 3 :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

□

a. Le développement de $(k+1)^3$ est laissé au lecteur, qui est fortement invité à voir la formule du binôme de Newton un peu plus loin dans ce cours.

Propriété 5.1.21 – Une factorisation très pratique

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Démonstration. Remarquons que si $n = 0$, cette égalité est triviale : ses deux termes sont nuls. On supposera donc, dans la suite, que $n \in \mathbb{N}^*$. On peut considérer trois cas :

On a :

$$\begin{aligned}
 (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k &= a \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k - b \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^k \text{ par le changement de variable } k \mapsto k+1 \\
 &= a^n b^0 + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-1-k} b^k - \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^{n-1-k} b^k + a^0 b^n \right) \\
 &= a^n - b^n
 \end{aligned}$$

□

Exemple 5.1.22

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}$:

$$a^5 - b^5 = (a - b) (a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4)$$

Exercice 5.1.23

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 7 divise $12^n - 5^n$.

a. C'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $12^n - 5^n = 7q$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} 12^n - 5^n &= (12 - 5) \sum_{k=0}^{n-1} 12^{n-1-k} 5^k \\ &= 7 \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{12^{n-1-k} 5^k}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

donc 7 divise bien $12^n - 5^n$.

5.1.3 Sommes doubles

Il arrive parfois que l'ensemble des éléments que l'on cherche à sommer soit indexé par des couples. Par exemple, la somme

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1;3 \rrbracket^2} ij$$

est parfaitement définie au sens de la définition 5.1.1 : l'ensemble $\llbracket 1;3 \rrbracket^2$ est bien un ensemble fini :

$$\llbracket 1;3 \rrbracket^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

et on peut écrire la somme précédente terme-à-terme :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;3 \rrbracket^2} ij &= 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Raisonnement de cette manière montre, en pratique, vite ses limites lorsque l'on somme un grand nombre d'éléments. Dans certains cas, on peut avoir une approche un peu plus formelle et efficace, comme dans la propriété suivante.

Propriété 5.1.24

Soient I et J deux ensembles, et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels indexée^a par $I \times J$.

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j} \\ \prod_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} &= \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} a_{i,j} = \prod_{j \in J} \prod_{i \in I} a_{i,j} \end{aligned}$$

a. $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ peut être vue comme une application allant de $I \times J$ vers \mathbb{R} , qui à chaque couple $(i,j) \in I \times J$ associe un réel noté $a_{i,j}$.

Démonstration. Notons i_1, i_2, \dots, i_p les éléments, deux-à-deux distincts de I , et j_1, j_2, \dots, j_q les éléments deux-à-deux distincts de J .

Il suffit d'énumérer les termes et de les regrouper :

$$\begin{aligned}
 \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} &= \underbrace{a_{i_1,j_1} + a_{i_1,j_2} + \cdots + a_{i_1,j_q}}_{\sum_{j \in J} a_{i_1,j}} \\
 &\quad + \underbrace{a_{i_2,j_1} + a_{i_2,j_2} + \cdots + a_{i_2,j_q}}_{\sum_{j \in J} a_{i_2,j}} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + \underbrace{a_{i_p,j_1} + a_{i_p,j_2} + \cdots + a_{i_p,j_q}}_{\sum_{j \in J} a_{i_p,j}} \\
 &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j}
 \end{aligned}$$

Cependant, on peut aussi énumérer ces termes ainsi :

$$\begin{aligned}
 \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} &= \underbrace{a_{i_1,j_1} + a_{i_2,j_1} + \cdots + a_{i_p,j_1}}_{\sum_{i \in I} a_{i,j_1}} \\
 &\quad + \underbrace{a_{i_1,j_2} + a_{i_2,j_2} + \cdots + a_{i_p,j_2}}_{\sum_{i \in I} a_{i,j_2}} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + \underbrace{a_{i_1,j_q} + a_{i_2,j_q} + \cdots + a_{i_p,j_q}}_{\sum_{i \in I} a_{i,j_q}} \\
 &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}
 \end{aligned}$$

Le raisonnement est le même pour le produit. □

Exercice 5.1.25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$S_n = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} ij$$

Correction. On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} ij &= \sum_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket} \sum_{j \in \llbracket 1;n \rrbracket} ij \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{j=1}^n j \right)
 \end{aligned}$$

En effet, pour $i \in \llbracket 1;n \rrbracket$ fixé, i est une constante vis-à-vis du terme général de la somme $\sum_{j=1}^n ij$, que l'on peut factoriser

par i par linéarité de la somme. Poursuivons :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} ij &= \sum_{i=1}^n i \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Dans d'autres cas, on peut s'en sortir en partitionnant l'ensemble des indices, comme dans l'exercice suivant.

Exercice 5.1.26

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{(i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, j < i\}$. Calculer

$$S_n = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \frac{j}{i}$$

Correction. Commençons par bien comprendre l'ensemble \mathcal{A} . Il s'agit de l'ensemble des couples (i, j) , où i et j sont des entiers compris entre 1 et n , tels que $j < i$. On peut dès lors commencer à énumérer les éléments de \mathcal{A} :

$$\underbrace{(2, 1)}_{i=2}, \underbrace{(3, 1), (3, 2)}_{i=3}, \underbrace{(4, 1), (4, 2), (4, 3)}_{i=4}, \dots$$

Notons que pour $i = 1$, il n'existe aucun couple $(i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$ tel que $j < i$.

Pour tout $i \in \llbracket 2;n \rrbracket$, considérons l'ensemble

$$I_i = \{(i, j), j \in \llbracket 1;n \rrbracket, j < i\} = \{i\} \times \llbracket 1;i-1 \rrbracket$$

Alors $\{I_i, i \in \llbracket 2;n \rrbracket\}$ est une partition de \mathcal{A} . En sommant par paquets, et en utilisant la propriété 5.1.24, on peut terminer le calcul :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)} \frac{j}{i} &= \sum_{i=2}^n \sum_{(i,j) \in I_i} \frac{j}{i} \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{(i,j) \in \{i\} \times \llbracket 1;i-1 \rrbracket} \frac{j}{i} \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{i} \end{aligned}$$

En effet, pour $i \in \llbracket 2;n \rrbracket$ fixé, les ensembles $\{i\} \times \llbracket 1;i-1 \rrbracket$ et $\llbracket 1;i-1 \rrbracket$ sont en bijection (par l'application $(i, j) \mapsto j$: pour i fixé, à chaque j correspond exactement un couple (i, j)). Les familles $\left(\frac{j}{i}\right)_{(i,j) \in \{i\} \times \llbracket 1;i-1 \rrbracket}$ et $\left(\frac{j}{i}\right)_{j \in \llbracket 1;i-1 \rrbracket}$ contiennent donc exactement les mêmes termes et ont la même somme. Reprenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \frac{j}{i} &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{i} \\
&= \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} j \\
&= \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \frac{(i-1)i}{2} \\
&= \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (i-1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{1}{2} \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{(n-1)n}{4}
\end{aligned}$$

Commentaire

Cette rédaction est à nouveau très (trop) détaillée. L'étape à bien comprendre est l'égalité

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \frac{j}{i} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{i}$$

qui peut être justifiée plus rapidement : pour obtenir tous les couples $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tels que $j < i$, on fait varier i entre 2 et n (on exclut $i = 1$ puisqu'on ne peut pas avoir $1 \leq j < i$ si $i = 1$) et j entre 1 et $i - 1$.

Remarque 5.1.27 : Une notation

On reprend l'ensemble $\mathcal{A} = \{(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, j < i\}$ de l'exercice précédent. Au lieu d'avoir à définir explicitement cet ensemble pour définir la somme $\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \frac{j}{i}$, on peut inscrire la contrainte « $j < i$ » directement dans la somme, de cette façon :

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \frac{j}{i} = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \\ j < i}} \frac{j}{i}$$

5.1.4 Formule du binôme

Définition 5.1.28 – Factorielle d'un entier

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *factorielle de n* et on note $n!$ le nombre

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

Par convention, on a $0! = 1$.

Remarque 5.1.29

La convention choisie est tout à fait cohérente avec celle de la définition 5.1.1 : $0! = \prod_{k=1}^0 1 = 1$ puisque $0 < 1$.

Exemple 5.1.30

Par exemple :

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

Propriété 5.1.31

Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$:

$$n! = (n-k)! \prod_{i=n-k+1}^n i$$

Démonstration. C'est un calcul direct. Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} (n-k)! \prod_{i=n-k+1}^n i &= \prod_{i=1}^{n-k} i \prod_{i=n-k+1}^n i \\ &= \prod_{i=1}^n i \\ &= n! \end{aligned}$$

□

Remarque 5.1.32

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n! = (n-1)! \times n$.

Définition 5.1.33 – Coefficients binomiaux

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble formé de n éléments.

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties de E formées d'exactly k éléments. $\binom{n}{k}$ est appelé un *coefficient binomial*. Ce nombre ne dépend pas de l'ensemble E choisi.

Par convention, si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k < 0$, on pose également $\binom{n}{k} = 0$.

Remarque 5.1.34

Pour tout $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n éléments.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$: dans un ensemble formé de n éléments, la seule partie ne contenant aucun élément est l'ensemble vide, et la seule partie de E contenant n éléments est E lui-même.

Exemple 5.1.35

On a $\binom{4}{2} = 6$: en effet, $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ contient 6 parties formées de 2 éléments, qui sont :

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$$

Attention, nous sommes bien en train de compter les **parties** de $\llbracket 1; 4 \rrbracket$, et pas les couples : en particulier, les parties $\{1, 4\}$ et $\{4, 1\}$ (par exemple) sont en fait la même partie de $\llbracket 1; 4 \rrbracket$, qui ne doit pas être comptée deux fois.

Propriété 5.1.36 – Triangle de Pascal

Soit $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Alors :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Démonstration. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.

Remarquons d'emblée que si $k > n$, alors $k+1 > n+1 > n$ et la formule de l'énoncé devient triviale : tous les coefficients binomiaux en jeu sont nuls.

Dans la suite, on supposera donc que $k \leq n$.

Considérons un ensemble E formé de $n+1$ éléments. Soit a un élément quelconque de E , de sorte que $E \setminus \{a\}$ soit formé de n éléments.

Pour construire une partie de E formée de $k+1$ éléments, nous avons deux possibilités :

- On construit une partie de E formée de $k+1$ éléments, ne contenant pas a . Cela revient à choisir $k+1$ éléments dans $E \setminus \{a\}$: par définition, il y a $\binom{n}{k+1}$ façons de le faire.
- On construit une partie de E formée de $k+1$ éléments, contenant a . Pour construire une telle partie, il faut et il suffit de choisir k éléments dans $E \setminus \{a\}$ (puis d'y adjoindre a) : il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire.

En tout, il y a donc $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ parties de E formées d'exactly $k+1$ éléments, autrement dit :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

□

Définition 5.1.37 – k -arrangement

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$. Soit E un ensemble formé de n éléments.

On appelle k -arrangement de E toute famille constituée de k éléments de E , deux-à-deux distincts.

Le nombre de k -arrangements de E est noté \mathcal{A}_n^k . Par convention, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{A}_n^0 = 1$.

Exemple 5.1.38

Par exemple, $(2, 3, 1)$ est un 3-arrangement de $\llbracket 1; 5 \rrbracket$. Cette fois, l'ordre compte : $(3, 1, 2)$ est également un 3-arrangement de $\llbracket 1; 5 \rrbracket$, différent du premier !

Propriété 5.1.39

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$. Alors :

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Démonstration. Pour $n = 0$, l'égalité est évidente :

$$\frac{0!}{(0-0)!} = \frac{1}{1} = 1 = \mathcal{A}_0^0$$

Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$. Pour choisir une famille (x_1, x_2, \dots, x_k) de k éléments deux-à-deux distincts d'un ensemble à n éléments, il faut et il suffit de :

- Choisir le premier élément, x_1 : il y a n façons de le faire.
- Choisir le second élément, x_2 , différent de x_1 : il y a $n-1$ façons de le faire.
- ...
- Choisir le k -ième élément, x_k , différent des $k-1$ précédents : il y a $n-(k-1)$ façons de le faire.

En tout, le nombre de k -arrangements de E est donc

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

□

Propriété 5.1.40

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Démonstration. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$. Considérons un ensemble E formé de n éléments. L'idée consiste à dénombrer différemment les k -arrangements de E .

Pour créer un k -arrangement de E , il faut et il suffit de :

1. Choisir k éléments, notés a_1, a_2, \dots, a_k , de E : il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire.
 2. Les ordonner, c'est-à-dire leur attribuer à chacun un nombre distinct dans $\llbracket 1; k \rrbracket$. Or :
 - À a_1 , peut être attribué n'importe quel nombre de $\llbracket 1; k \rrbracket$: il y a k choix possibles.
 - À a_2 , peut être attribué n'importe quel nombre de $\llbracket 1; k \rrbracket$ sauf celui attribué à a_1 : il y a $k-1$ choix possibles.
 - ...
 - À a_k , peut être attribué n'importe quel nombre de $\llbracket 1; k \rrbracket$, sauf les $k-1$ nombres choisis auparavant : il ne reste plus qu'un seul choix.
- Il y a donc $k \times (k-1) \times \cdots \times 1 = k!$ façons d'ordonner a_1, a_2, \dots, a_k .

Le nombre de k -arrangements de E est donc $k! \times \binom{n}{k}$. Ainsi

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$$

donc

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□

Remarque 5.1.41

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{n}{1} = n$. En effet, c'est évident si $n = 0$, et si $n \geq 1$, alors :

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

Propriété 5.1.42

Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \text{ et } \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Démonstration. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.

Si $k > n$, alors ces égalités sont évidentes : tous les coefficients binomiaux en jeu sont nuls puisqu'alors $n-k < 0$ et $k+1 > n+1$.

On supposera donc dans la suite que $k \leq n$. Alors :

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\ &= \frac{(n+1) \times n!}{(k+1) \times k! (n-k)!} \\ &= \frac{n+1}{k+1} \frac{n!}{k! (n-k)!} \\ &= \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}\end{aligned}$$

□

Remarque 5.1.43

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. La formule $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ peut-être retenue ainsi : si E est un ensemble à n éléments, choisir les k éléments de E que l'on garde revient à choisir les $n-k$ éléments de E que l'on ne garde pas !

Exemple 5.1.44

Par exemple, $\binom{5}{4} = \binom{5}{5-4} = \binom{5}{1} = 5$.

Théorème 5.1.45 – Formule du binôme

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On peut raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— Pour $n = 0$, la formule est vraie : on a bien

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
 &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}
 \end{aligned}$$

Effectuons, dans la première somme, le changement de variable $k \mapsto k+1$. On obtient :

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}
 \end{aligned}$$

Or, d'après le triangle de Pascal 22.2.23, on a $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= \underbrace{a^{n+1}}_{\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{b^{n+1}}_{\binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0}} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
 \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence □

Exercice 5.1.46

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

5.2 Exercices

Exercice 5.2.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Exercice 5.2.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer^a

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^3$$

a. On pourra s'inspirer de la propriété 5.1.20.

Exercice 5.2.3

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est multiple de } 3 \\ 0 & \text{si } k-1 \text{ est multiple de } 3 \\ -1 & \text{si } k-2 \text{ est multiple de } 3 \end{cases}$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Exercice 5.2.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S_n = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0;n \rrbracket} (2^i - 1) 2^{ij}$$

Exercice 5.2.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$S_n = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2 \\ i \leq j}} \frac{i^2}{j}$$

Exercice 5.2.6

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $(-1)^k$?

Dans la suite, on définit un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et on pose

$$P_n = \sum_{\substack{k \in \llbracket 0;n \rrbracket \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \text{ et } I_n = \sum_{\substack{k \in \llbracket 0;n \rrbracket \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$$

2. Calculer $P_n + I_n$.
3. Montrer que $P_n - I_n = 0$.
4. En déduire P_n et I_n .

Exercice 5.2.7

1. Compléter :

(a) $\sum_{k=2}^{14} k^2 = \sum_{k=?}^? (k+1)^2$

(b) $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=?}^? a_{k-2}$

(c) $\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=?}^? a_{n-i}$

(d) $\sum_{i=0}^n a_{i+1} - a_i = ?$

2. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) b_k = \sum_{k=1}^n a_k (b_{k-1} - b_k) + a_{n+1} b_n - a_0 b_0$$

Exercice 5.2.8Calculer les sommes suivantes (n est un entier naturel) :

1. $\sum_{k=0}^n (2k)^2$

2. $\sum_{k=0}^n (3k+1)^2$

3. La somme des carrés des nombres impairs compris entre 1 et 101

4. $\sum_{k=1}^n (2k-1)$

5. $\sum_{k=0}^n (k+1)^4 - \sum_{k=0}^n k^4$

Exercice 5.2.9Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ dans chacun des cas suivants :

1. $a_{i,j} = 1$

2. $a_{i,j} = i$

3. $a_{i,j} = j$

4. $a_{i,j} = i + j$

5. $a_{i,j} = ij$

5.3 DM conducteur**Exercice 15**

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{10} k(k-1).$

2. $\sum_{k=2}^n k(k-1)$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

3. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{e^{2k}}$ où $n \in \mathbb{N}$.

4. $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+2}{k}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction. 1. On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{10} k(k-1) &= \sum_{k=0}^{10} (k^2 - k) \\
 &= \sum_{k=0}^{10} k^2 - \sum_{k=0}^{10} k \\
 &= \frac{10 \times (10+1) \times (2 \times 10 + 1)}{6} - \frac{10 \times (10+1)}{2} \\
 &= \frac{110}{2} \times \left(\frac{21}{3} - 1 \right) \\
 &= 55 \times 6 \\
 &= 330
 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n k(k-1) &= \sum_{k=0}^n k(k-1) - 0 - 0 \\
 &= \sum_{k=0}^n (k^2 - k) \\
 &= \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= n(n+1) \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= n(n+1) \frac{2n+1-3}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}
 \end{aligned}$$

3. On a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \frac{1}{e^{2k}} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e^2} \right)^k \\
 &= \frac{1 - \left(\frac{1}{e^2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e^2}} \text{ car } \frac{1}{e^2} \neq 1 \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2(n+1)}}}{1 - \frac{1}{e^2}} \\
 &= \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}
 \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+2}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+2) - \ln(k)) \\
 &= \sum_{k=1}^n \ln(k+2) - \sum_{k=1}^n \ln(k) \\
 &= \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k) \\
 &= \sum_{k=3}^n \ln(k) + \ln(n+1) + \ln(n+2) - \left(\sum_{k=3}^n \ln(k) + \underbrace{\ln(1) + \ln(2)}_{=0} \right) \\
 &= \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(2) \\
 &= \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Exercice 16

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 + 1)(-u_{n+1} + u_{n+2}) + (u_n - u_{n+1})((n+1)^2 + 1) = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose également $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 + 1$$

2. En déduire une expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de u_n en fonction de n . On pourra s'intéresser à la somme $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction. 1. On raisonne par récurrence sur n .

Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après l'énoncé :

$$(n^2 + 1)v_{n+1} - v_n((n+1)^2 + 1) = 0$$

et donc

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} v_n$$

— Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_1 - u_0 = 3 - 2 = 1$ et $0^2 + 1 = 1$: on a donc bien $v_0 = 0^2 + 1$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n = n^2 + 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} v_n \\
 &= \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} \times (n^2 + 1) \\
 &= (n+1)^2 + 1
 \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 + 1$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'une part :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} v_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \\ &= u_n - u_0\end{aligned}$$

On aura reconnu une somme télescopique.

D'autre part :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} v_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 + 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + n \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n - u_0 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n$$

ou encore

$$u_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n + u_0 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n + 2$$

Remarquons qu'avec $n = 0$, on a $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n + 2 = 2 = u_0$: l'égalité ci-dessus est donc encore vraie pour $n = 0$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n + 2$$

Exercice 17

1. Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2 + 3n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+3}$$

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k}$$

Correction. 1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+3} &= \frac{\alpha(n+3) + \beta n}{n(n+3)} \\ &= \frac{\alpha n + 3\alpha + \beta n}{n(n+3)} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)n + 3\alpha}{n(n+3)}\end{aligned}$$

Pour obtenir l'égalité voulue, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n^2 + 3n} = \frac{\frac{1}{3}}{n} - \frac{\frac{1}{3}}{n+3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=4}^{n+3} \frac{1}{j} \right) \text{ avec } j = k+3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} \right)\end{aligned}$$

On peut utiliser la relation de Chasles pour simplifier cette expression de Chasles :

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n+3} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+3} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=1}^{n+3} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+3} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)\end{aligned}$$

Exercice 18

Dans cet exercice, on fixe $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^n q^k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels. Montrer que^a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) b_k = \sum_{k=0}^n a_{k+1} (b_k - b_{k+1}) + a_{n+1} b_{n+1} - a_0 b_0$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k q^k$$

On pourra partir de la somme $\sum_{k=0}^n q^k$ et remarquer que $1 = a_{k+1} - a_k$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k - 1$.

a. On pourra remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $b_k = b_k - b_{k+1} + b_{k+1}$.

Correction. 1. D'après le cours, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) b_k &= \sum_{k=0}^n (a_{k+1} b_k - a_k b_k) \\ &= \sum_{k=0}^n (a_{k+1} (b_k - b_{k+1} + b_{k+1}) - a_k b_k) \\ &= \sum_{k=0}^n (a_{k+1} (b_k - b_{k+1}) + a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k) \\ &= \sum_{k=0}^n a_{k+1} (b_k - b_{k+1}) + \sum_{k=0}^n (a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k) \\ &= \sum_{k=0}^n a_{k+1} (b_k - b_{k+1}) + a_{n+1} b_{n+1} - a_0 b_0 \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^n (k - (k-1)) q^k \\ &= \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) b_k \end{aligned}$$

en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k - 1$ et $b_k = q^k$. D'après la question précédente, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^n a_{k+1} (b_k - b_{k+1}) + a_{n+1} b_{n+1} - a_0 b_0 \\ &= \sum_{k=0}^n k (q^k - q^{k+1}) + nq^{n+1} - (-1)q^0 \\ &= \sum_{k=0}^n kq^k (1 - q) + nq^{n+1} + 1 \\ &= (1 - q)S_n + nq^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

Cependant, on a aussi

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

puisque $q \neq 1$.

On en déduit donc que

$$(1 - q)S_n + nq^{n+1} + 1 = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

et donc que

$$(1 - q)S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - nq^{n+1} - 1$$

ou enfin

$$S_n = \frac{1}{1 - q} \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - nq^{n+1} - 1 \right)$$

Chapitre 6

Petits systèmes linéaires

6.1	Définition et résolution d'un système linéaire	116
6.2	Interprétations géométriques	120
6.2.1	Dans le plan	120
6.2.2	Dans l'espace	121
6.3	Exercices	121
6.4	DM conducteur	125

6.1 Définition et résolution d'un système linéaire

Définition 6.1.1 – Système linéaire

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$.

On appelle *système linéaire* toute conjonction d'équations, d'inconnue $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où $(a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1;n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1;p \rrbracket}}$ et $(b_i)_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ sont des familles de réels fixées.

La famille $(b_i)_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ est appelée *second membre* de ce système. Lorsque ce second membre est nul, le système linéaire est dit *homogène*.

Une *solution* à ce système linéaire est un p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ pour lequel ce système est vrai. *Résoudre* ce système linéaire, c'est déterminer l'ensemble des solutions de celui-ci.

Exemple 6.1.2

Voici un exemple de système linéaire à 3 inconnues réelles x_1, x_2 et x_3 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + \sqrt{2}x_3 = 2 \end{cases}$$

$\left(\frac{-2}{7}, \frac{5}{7}, 0\right)$ en est une solution. En effet :

$$\begin{cases} \frac{-2}{7} - \frac{5}{7} = \frac{-7}{7} = -1 \\ 3 \times \frac{-2}{7} + 4 \times \frac{5}{7} + \sqrt{2} \times 0 = \frac{14}{7} = 2 \end{cases}$$

Définition 6.1.3 – Opérations élémentaires

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. On considère le système suivant, d'inconnues $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \quad (\text{S})$$

où $(a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1;n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1;p \rrbracket}}$ et $(b_i)_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ sont des familles de réels fixées. On définit alors trois *opérations* élémentaires :

— *La permutation*, qui consiste à permuter deux lignes du systèmes. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, on note $L_i \leftrightarrow L_j$

la permutation des lignes i et j . Après la permutation $L_i \leftrightarrow L_j$, le système (S) devient :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i-1,1}x_1 + a_{i-1,2}x_2 + \cdots + a_{i-1,p}x_p = b_{i-1} \\ \boxed{a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,p}x_p = b_j} \\ a_{i+1,1}x_1 + a_{i+1,2}x_2 + \cdots + a_{i+1,p}x_p = b_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1,1}x_1 + a_{j-1,2}x_2 + \cdots + a_{j-1,p}x_p = b_{j-1} \\ \boxed{a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i} \\ a_{j+1,1}x_1 + a_{j+1,2}x_2 + \cdots + a_{j+1,p}x_p = b_{j+1} \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

- *La transvection*, qui consiste à ajouter à une ligne un multiple d'une autre. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la transvection qui ajoute, à la ligne i , la ligne j multipliée par λ est notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Après cette opération, le système (S) devient :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i-1,1}x_1 + a_{i-1,2}x_2 + \cdots + a_{i-1,p}x_p = b_{i-1} \\ \boxed{(a_{i,1} + \lambda a_{j,1})x_1 + (a_{i,2} + \lambda a_{j,2})x_2 + \cdots + (a_{i,p} + \lambda a_{j,p})x_p = b_i + \lambda b_j} \\ a_{i+1,1}x_1 + a_{i+1,2}x_2 + \cdots + a_{i+1,p}x_p = b_{i+1} \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

- *La dilatation*, qui consiste à multiplier une ligne par un réel **non nul**. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la dilatation qui multiplie la ligne i par λ est notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$. Après cette opération, le système (S) devient :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i-1,1}x_1 + a_{i-1,2}x_2 + \cdots + a_{i-1,p}x_p = b_{i-1} \\ \boxed{\lambda a_{i,1}x_1 + \lambda a_{i,2}x_2 + \cdots + \lambda a_{i,p}x_p = \lambda b_i} \\ a_{i+1,1}x_1 + a_{i+1,2}x_2 + \cdots + a_{i+1,p}x_p = b_{i+1} \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Propriété 6.1.4

Les trois opérations élémentaires sont réversibles : ainsi, si on applique à un système (S) l'une de ces opérations élémentaires, le système (S') est équivalent au premier.

■ *Démonstration.*

□

Remarque 6.1.5

Dans le cas de la dilatation, il est important de garder en tête que le coefficient utilisé ne doit pas être nul : dans le cas contraire, on obtient une opération qui n'est pas réversible, puisqu'elle consiste à remplacer une ligne du système par une ligne nulle : impossible de reconstituer alors la ligne originale !

Méthode 6.1.6 : Méthode du pivot

Ces opérations élémentaires permettent de mettre en place la méthode du pivot de Gauss. Pour un système linéaire d'inconnues $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, cette méthode consiste à utiliser l'une des lignes pour simplifier les autres, et de recommencer, jusqu'à obtenir un système le plus simple possible.

Exercice 6.1.7

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \quad (\text{S})$$

Correction. Résolvons :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -5 \\ 5x_2 - 3x_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -5 \\ 22x_3 = 22 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -5 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \left(L_3 \leftarrow \frac{1}{22}L_3 \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \end{aligned}$$

On en déduit que le système (S) admet une unique solution, qui est $(0, 0, 1)$. L'ensemble des solutions de (S) est donc $\{(0, 0, 1)\}$.

Il est tout à fait possible qu'un système admette plus d'une solution, ou n'en admette aucune.

Exercice 6.1.8

Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases} \quad (S)$$

Correction. Résolvons :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -6x_2 - 4x_3 = -2 \\ -3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -6x_2 - 4x_3 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -6x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons qu'ici, contrairement à l'exercice précédent, il n'y a aucune contrainte portant exclusivement sur x_3 : celui-ci est « totalement libre », et nous allons pouvoir exprimer les autres inconnues en fonction de x_3 .

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2 - x_2 - 3x_3 \\ 3x_2 = 1 - 2x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_3\right) - \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{6} - \frac{7}{6}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (S) est alors

$$\left\{ \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{6}x_3, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_3, x_3 \right), x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarquons que (S) admet ici une infinité de solutions.

Exercice 6.1.9

Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases} \quad (\text{S})$$

Correction. Résolvons :

$$\begin{aligned} (\text{S}) &\iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -6x_2 - 4x_3 = -2 \\ -3x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -6x_2 - 4x_3 = -2 \\ 0 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

La dernière équation n'est jamais vraie : le système (S) n'a donc aucune solution. L'ensemble des solutions de (S) est \emptyset .

6.2 Interprétations géométriques**6.2.1 Dans le plan**

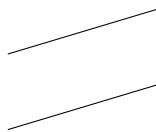
Rappelons que, dans le plan muni d'un repère, et pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, $ax + by = c$ est l'équation d'une droite dont un vecteur normal est le vecteur \vec{n} de coordonnées (a, b) .

Cela signifie aussi que, pour tout $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(d, e) \neq (0, 0)$, résoudre le système

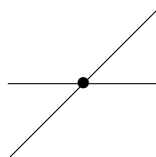
$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, revient géométriquement à trouver les points d'intersection (s'ils existent) des deux droites d'équation $ax + by = c$ et $dx + ey = f$ dans un repère donné. À propos du nombre de solutions d'un tel système, il y a donc trois cas possibles :

1. Les deux droites sont confondues : tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, représentant les coordonnées d'un point de cette droite, est alors solution du système.
2. Les deux droites sont parallèles, non confondues : elles n'ont alors aucun point d'intersection, et le système n'a aucune solution.



3. Les deux droites sont sécantes, non confondues : elles ont alors un unique point d'intersection, et le système admet une unique solution.



6.2.2 Dans l'espace

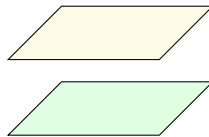
Dans l'espace muni d'un repère, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $ax + by + cz = d$ est l'équation d'un plan, dont un vecteur normal est \vec{n} de coordonnées (a, b, c) .

Pour tout $(a, b, c, d, e, f, g, h) \in \mathbb{R}^8$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(e, f, g) \neq (0, 0, 0)$, résoudre le système

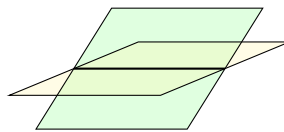
$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases}$$

revient géométriquement à déterminer les points d'intersection des deux plans d'équation $ax + by + cz = d$ et $ex + fy + gz = h$ dans un même repère de l'espace. Il y a alors trois cas possibles :

1. Les deux plans sont confondus : dans ce cas, tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ représentant les coordonnées d'un point de ce plan est solution du système.
2. Les deux plans sont parallèles non confondus : ils n'ont alors aucun point d'intersection et le système n'a aucune solution.



3. Les deux plans sont non parallèles et non confondus : leur intersection est alors une droite, et le système admet une infinité de solutions.



6.3 Exercices

Exercice 6.3.1

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lcl} \begin{cases} x + 3y = 3 \\ -x + 5y = 2 \end{cases} & (S_1) & \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 6x + 3y + \frac{1}{2}z = 2 \end{cases} & (S_4) \\ \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = 4 \\ \frac{7}{4}x + \frac{7}{4}y = 6 \end{cases} & (S_2) & \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ 6x + 2y + z = 0 \end{cases} & (S_5) \\ \begin{cases} 29x - 5y - 4z = 0 \\ -7x + 31y - 4z = 0 \\ -6x + 6y + 12z = 0 \end{cases} & (S_3) & \end{array}$$

Exercice 6.3.2

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (-2x + 2y, -6x + 5y) \end{aligned}$$

Montrer que f est une bijection. En déterminer la réciproque.

Exercice 6.3.3

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (3x - 5y + z, -2x + 6y + 2z, x + y + 3z) \end{aligned}$$

1. Étudier l'injectivité et la bijectivité de f .
2. Déterminer $f(\mathbb{R}^3)$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 6.3.4

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} mx + 2my = -4 \\ x + my = -2 \end{cases} \quad (S)$$

Correction. On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + 2my = -4 \\ x + my = -2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + my = -2 \\ mx + 2my = -4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + my = -2 \\ (-m^2 + 2m)y = (2m - 4) \end{cases} \end{aligned}$$

Or :

$$-m^2 + 2m = 0 \iff -m(m - 2) = 0 \iff m = 0 \text{ ou } m = 2$$

On distingue alors trois cas :

— Si $m = 0$, alors :

$$(S) \iff \begin{cases} x = -2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

ce qui est impossible. (S) n'a alors aucune solution.

— Si $m = 2$, alors :

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff x = -2 - 2y \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (S) est alors

$$\{(-2 - 2y, y), y \in \mathbb{R}\}$$

— Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, alors :

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} x = -2 - my \\ y = \frac{2m - 4}{2m - m^2} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -2 - my \\ y = \frac{2(m - 2)}{m(2 - m)} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -2 - my \\ y = \frac{-2}{m} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{-2}{m} \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (S) est alors

$$\left\{ \left(0, \frac{-2}{m} \right) \right\}$$

Exercice 6.3.5

Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + 4y - 5z = 7 \\ x + 5y - z = 1 \\ -2x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad (S)$$

Correction. Ce système n'a qu'une seule solution, qui est

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{18} \\ 1 \\ -\frac{18}{14} \\ -\frac{9}{9} \end{pmatrix}$$

Exercice 6.3.6

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} -4x - 3y + 5z = -\frac{3}{2} \\ 3x + 2y - 3z = \frac{7}{7} \\ -x - y + 2z = 3 \end{cases} \quad (S_1)$$

$$\begin{cases} -4x - 3y + 5z = -\frac{1}{2} \\ 3x + 2y - 3z = \frac{4}{4} \\ -x - y + 2z = 2 \end{cases} \quad (S_2)$$

Exercice 6.3.7

Montrer que le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y + z = 1 \\ \frac{1}{2}x - 2y + z = -1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}z = 1 \end{cases} \quad (S)$$

définit, dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une droite dont on précisera deux points.

Exercice 6.3.8

Dans l'espace ramené à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points M_1, M_2 et M_3 de coordonnées respectives

$$(-1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 0)$$

Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que le plan \mathcal{P} d'équation $ax + by + cz = d$ passe par les points M_1, M_2 et M_3 .

Correction. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} -a + 2b = d \\ b + c = d \\ a + 2b = d \end{cases} \quad (S)$$

Or :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -a + 2b = d \\ b + c = d \\ a + 2b = d \end{cases} &\iff \begin{cases} -a + 2b = d \\ b + c = d \\ 4b = 2d \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 2b - d \\ c = d - b \\ b = \frac{1}{2}d \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ c = \frac{1}{2}d \\ b = \frac{1}{2}d \end{cases} \end{aligned}$$

Avec $d = 2$, on obtient $(a, b, c, d) = (0, 1, 1, 2)$. On en déduit que le plan \mathcal{P} d'équation

$$y + z = 2$$

contient les points M_1, M_2 et M_3 .

Exercice 6.3.9

Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dont la courbe dans un repère du plan passe par les points de coordonnées $(0, 2), (3, -2), (5, 1)$. Déterminer f .

6.4 DM conducteur

Exercice 19

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - y = 2 \\ -x + 5y = 4 \end{array} \right. \quad (S_1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 20x - 12y + 4z = 0 \\ 24x - 16y + 8z = 0 \\ 12x - 12y + 12z = 0 \end{array} \right. \quad (S_3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \\ -2x + 4y = 3 \end{array} \right. \quad (S_2)$$

Correction. 1. On résout :

$$\begin{aligned} S_1 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x - y = 2 \\ -x + 5y = 4 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 5y = 4 \\ 24y = 22 \end{array} \right. \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 5y = \frac{11}{4} \\ y = \frac{11}{12} \end{array} \right. \quad \left(L_1 \leftarrow \frac{1}{24}L_1 \right) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{11}{12} \\ -x = -\frac{11}{12} \end{array} \right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{11}{12} \\ x = \frac{11}{12} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $\left(\frac{7}{12}, \frac{11}{12}\right)$ est la seule solution de ce système.

2. On résout :

$$\begin{aligned} S_2 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \\ -2x + 4y = 3 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ y = -1 \\ 2y = 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ y = -1 \\ 0 = 7 \end{array} \right. \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{aligned}$$

Ce système n'admet aucune solution.

3. On résout :

$$\begin{aligned}
 S_3 &\iff \begin{cases} 20x - 12y + 4z = 0 \\ 24x - 16y + 8z = 0 \\ 12x - 12y + 12z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 5x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}S_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{8}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{12}L_3 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\
 &\iff \begin{cases} y = 2x \\ z = y - x = 2x - x = x \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = 2x, z = x\} = \{(x, 2x, x), x \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 20

Déterminer les réels d tels que le système suivant admet au moins une solution. Le cas échéant, déterminer l'ensemble des solutions de ce système.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \\ 3x + 7y = d \end{cases} \quad (S)$$

Correction. Soit $d \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \\ 3x + 7y = d \end{cases} &\iff \begin{cases} x - y = 2 \\ 5y = -3 \\ 10y = (d-6) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - y = 2 \\ 5y = -3 \\ 0 = d \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

- Si $d \neq 0$, ce système n'a aucune solution.
- Si $d = 0$, on poursuit la résolution :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x - y = 2 \\ 0 = d \end{cases} &\iff \begin{cases} x - y = 2 \\ 5y = -3 \end{cases} \text{ car on a supposé que } d = 0 \\
 &\iff \begin{cases} x - y = 2 \\ y = -\frac{3}{5} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement :

- Si $d = 0$, alors $\left(\frac{7}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ est la seule solution de ce système.
- Si $d \neq 0$, alors ce système n'a aucune solution.

Exercice 21

On considère l'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (16x + 2y, -3x + 9y) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une bijection.
2. En déterminer la réciproque.
3. Déterminer les réels λ pour lesquels l'équation

$$f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ admet au moins une solution non nulle. On précisera ces ensembles de solutions, lorsqu'ils sont non réduits à $\{(0, 0)\}$.

Correction. 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x, y) = (a, b) &\iff \begin{cases} 16x + 2y = a \\ -3x + 9y = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 16x + \frac{2y}{75} = \left(\frac{3a}{16} + b\right) \\ \frac{75}{8}y = \left(\frac{3a}{16} + b\right) \end{cases} \left(L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{16}L_1 \right) \\ &\iff \begin{cases} 16x + 2y = a \\ y = \left(\frac{a}{50} + \frac{8b}{75}\right) \end{cases} \left(L_2 \leftarrow \frac{8}{75}L_2 \right) \\ &\iff \begin{cases} 16x = \left(\frac{24a}{25} - \frac{16b}{75}\right) \\ y = \left(\frac{a}{50} + \frac{8b}{75}\right) \end{cases} (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ &\iff \begin{cases} x = \left(\frac{3a}{50} - \frac{b}{75}\right) \\ y = \left(\frac{a}{50} + \frac{8b}{75}\right) \end{cases} \left(L_1 \leftarrow \frac{1}{16}L_1 \right) \end{aligned}$$

Ainsi, tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ admet $\left(\frac{3a}{50} - \frac{b}{75}, \frac{a}{50} + \frac{8b}{75}\right)$ pour unique antécédent, et f est bien bijective.

2. D'après les calculs précédents, la réciproque de f est

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\mapsto \left(\frac{3a}{50} - \frac{b}{75}, \frac{a}{50} + \frac{8b}{75}\right) \end{aligned}$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x, y) = (\lambda x, \lambda y) &\iff \begin{cases} 16x + 2y = \lambda x \\ -3x + 9y = \lambda y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (16 - \lambda)x + 2y = 0 \\ -3x + (9 - \lambda)y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \left(\left(\frac{16 - \lambda}{3} - \frac{\lambda}{3} \right) (9 - \lambda) + 2 \right) y = 0 \\ -3x + (9 - \lambda)y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

- Si $\left(\frac{16 - \lambda}{3} - \frac{\lambda}{3} \right) (9 - \lambda) + 2 \neq 0$, alors la première ligne du système donne $y = 0$, et la seconde donne alors $x = 0$. Dans ce cas, $(0, 0)$ est la seule solution du système.
- Si $\left(\frac{16 - \lambda}{3} - \frac{\lambda}{3} \right) (9 - \lambda) + 2 = 0$, la première ligne disparaît et le système équivaut à l'équation $-3x + (9 - \lambda)y = 0$.

Il s'agit donc de résoudre $\left(\frac{16 - \lambda}{3} - \frac{\lambda}{3} \right) (9 - \lambda) + 2 = 0$. Or :

$$\begin{aligned} \left(\frac{16 - \lambda}{3} - \frac{\lambda}{3} \right) (9 - \lambda) + 2 = 0 &\iff 50 - \frac{16}{3}\lambda - 3\lambda + \frac{1}{3}\lambda^2 + 2 = 0 \\ &\iff 50 - \frac{25}{3}\lambda + \frac{1}{3}\lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

et le discriminant de cette équation polynomiale du second degré est

$$\Delta = \left(-\frac{25}{3} \right)^2 - 4 \times 50 \times \frac{1}{3} = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3} \right)^2$$

et ses deux racines réelles sont alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\frac{25}{3} - \frac{5}{3}}{2 \times \frac{1}{3}} & \lambda_2 &= \frac{\frac{25}{3} + \frac{5}{3}}{2 \times \frac{1}{3}} \\ &= 10 & &= 15 \end{aligned}$$

Conclusion :

- Si $\lambda = 10$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) = (\lambda x, \lambda y) &\iff f(x, y) = (10x, 10y) \\ &\iff -3x + (9 - 10)y = 0 \\ &\iff -3x - y = 0 \\ &\iff y = -3x \end{aligned}$$

et l'ensemble des solutions est alors $\{(x, -3x), x \in \mathbb{R}\}$.

- De même, si $\lambda = 15$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) = (\lambda x, \lambda y) &\iff f(x, y) = (15x, 15y) \\ &\iff -3x + (9 - 15)y = 0 \\ &\iff -3x - 6y = 0 \\ &\iff x = -2y \end{aligned}$$

et l'ensemble des solutions est alors $\{(-2y, y), y \in \mathbb{R}\}$.

- Dans les autres cas, $(0, 0)$ est la seule solution de l'équation $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Exercice 22

Dans cet exercice, α est un réel fixé.

On considère l'application f , définie sur \mathbb{R}^3 et à valeurs dans \mathbb{R}^3 , qui à tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe

$$f(x, y, z) = (2x + y(3 - \alpha) + z(\alpha - 3), y(7 - \alpha) + z(\alpha - 4), y(8 - 2\alpha) + z(2\alpha - 5))$$

1. Déterminer l'ensemble \mathcal{D} des valeurs de α pour lesquelles le système

$$\begin{cases} 2x + (3 - \alpha)y + (\alpha - 3)z = 0 \\ (7 - \alpha)y + (\alpha - 4)z = 0 \\ (8 - 2\alpha)y + (2\alpha - 5)z = 0 \end{cases} \quad (*)$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, admet une unique solution, et préciser cette solution.

2. Dans cette question, on suppose que $\alpha \in \mathcal{D}$. Soit $u_1 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $u_2 = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $f(u_1) = f(u_2)$ si et seulement si $(a - a', b - b', c - c')$ est solution du système (*).

(b) Que peut-on en déduire ?

(c) Montrer que f est bijective.

3. On suppose que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.

Correction. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} (*) &\iff \begin{cases} 2x + (3 - \alpha)y + (\alpha - 3)z = 0 \\ (7 - \alpha)y + (\alpha - 4)z = 0 \\ (8 - 2\alpha)y + (2\alpha - 5)z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + (3 - \alpha)y + (\alpha - 3)z = 0 \\ (7 - \alpha)y + (\alpha - 4)z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\ -6y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + (3 - \alpha)y + (\alpha - 3)z = 0 \\ \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)z = 0 \quad \left(L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7 - \alpha}{6}L_3\right) \\ -6y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + (3 - \alpha)y + (\alpha - 3)z = 0 \\ -6y + 3z = 0 \\ \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)z = 0 \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

— Si $\alpha = 1$, alors $\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$ et le système devient :

$$\begin{aligned} (*) &\iff \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -6y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -6y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z - y = z - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$, l'ensemble des solutions du système est $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = \frac{1}{2}z \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$.

— Si $\alpha \neq 1$, alors $\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \neq 0$: la dernière ligne du système donne alors $z = 0$, la deuxième donne $y = 0$ et la première donne $x = 0$. $(0, 0, 0)$ est alors l'unique solution du système.

Finalement, l'ensemble \mathcal{D} des réels α tels que le système (\star) admet une unique solution est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Soit $\alpha \in \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On reprend les notations de l'énoncé.

(a) On résout :

$$\begin{aligned} f(u_1) &= f(u_2) \\ \iff (2a + b(3 - \alpha) + c(\alpha - 3), b(7 - \alpha) + c(\alpha - 4), b(8 - 2\alpha) + c(2\alpha - 5)) \\ &= (2a' + b'(3 - \alpha) + c'(\alpha - 3), b'(7 - \alpha) + c'(\alpha - 4), b'(8 - 2\alpha) + c'(2\alpha - 5)) \\ \iff \begin{cases} 2a + b(3 - \alpha) + c(\alpha - 3) = 2a' + b'(3 - \alpha) + c'(\alpha - 3) \\ b(7 - \alpha) + c(\alpha - 4) = b'(7 - \alpha) + c'(\alpha - 4) \\ b(8 - 2\alpha) + c(2\alpha - 5) = b'(8 - 2\alpha) + c'(2\alpha - 5) \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 2(a - a') + (3 - \alpha)(b - b') + (\alpha - 3)(c - c') = 0 \\ (7 - \alpha)(b - b') + (\alpha - 4)(c - c') = 0 \\ (8 - 2\alpha)(b - b') + (2\alpha - 5)(c - c') = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

en passant tous les termes à gauche.

Ainsi :

$$f(u_1) = f(u_2) \iff (a - a', b - b', c - c') \text{ est solution de } (\star)$$

(b) Puisque $\alpha \in \mathcal{D}$, la seule solution de (\star) est $(0, 0, 0)$. Ainsi, pour tout $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} f(u_1) = f(u_2) &\iff (a - a', b - b', c - c') = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases} \\ &\iff u_1 = u_2 \end{aligned}$$

et f est donc injective.

(c) On sait déjà que f est injective : montrons qu'elle est surjective. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= (a, b, c) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (3-\alpha)y + (\alpha-3)z &= a \\ (7-\alpha)y + (\alpha-4)z &= b \\ (8-2\alpha)y + (2\alpha-5)z &= c \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (3-\alpha)y + (\alpha-3)z &= a \\ (7-\alpha)y + (\alpha-4)z &= b \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\ -6y + 3z &= (-2b+c) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (3-\alpha)y + (\alpha-3)z &= a \\ \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)z &= \left(b + \left(\frac{7}{6} - \frac{\alpha}{6}\right)(-2b+c)\right) \quad \left(L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7-\alpha}{6}L_3\right) \\ -6y + 3z &= (-2b+c) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (3-\alpha)y + (\alpha-3)z &= a \\ -6y + 3z &= (-2b+c) \\ \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)z &= \left(b + \left(\frac{7}{6} - \frac{\alpha}{6}\right)(-2b+c)\right) \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (3-\alpha)y + (\alpha-3)z &= a \\ -6y + 3z &= (-2b+c) \\ z &= \frac{b + \left(\frac{7}{6} - \frac{\alpha}{6}\right)(-2b+c)}{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ce système triangulaire admet alors une (unique, mais on le savait déjà puisque f est injective) solution (il suffit d'en remonter les lignes), ainsi tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ admet un antécédent par f : f est surjective.

Finalement, f est bien une bijection.

3. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D} = \{1\}$, autrement dit si $\alpha = 1$, alors le système (\star) a une infinité de solutions : autrement dit, $(0, 0, 0)$ a une infinité d'antécédents par f et f n'est pas injective.

De plus, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= (a, b, c) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z &= a \\ 6y - 3z &= b \\ 6y - 3z &= c \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dès lors, si $b \neq c$, alors (a, b, c) n'a aucune antécédent par f . Par exemple, $(1, 1, 2)$ n'a aucun antécédent par f : f n'est pas surjective.

Chapitre 7

Inégalités

7.1	Relations d'ordre réelles	134
7.1.1	Relations d'ordre usuelles	134
7.1.2	Intervalles	137
7.1.3	Inéquations et tableaux de signe	138
7.2	Valeur absolue	139
7.2.1	L'application valeur absolue	139
7.3	Parties bornées	144
7.4	Partie entière	147
7.5	Exercices	148
7.6	DM conducteur	150

7.1 Relations d'ordre réelles

7.1.1 Relations d'ordre usuelles

Définition 7.1.1 – Relation d'ordre sur \mathbb{R}

Soit \mathcal{R} une relation^a entre deux réels. On dit que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur \mathbb{R} lorsque :

- \mathcal{R} est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x$.
- \mathcal{R} est antisymétrique : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \implies x = y$.
- \mathcal{R} est transitive : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \implies x\mathcal{R}z$.

a. Une relation entre deux réels peut être vue comme une application qui, à deux réels x et y , associe un prédicat, noté $x\mathcal{R}y$.

Dans ce chapitre, on se concentrera sur les relations bien connues notées \leq , \geq , $<$ et $>$.

Propriété 7.1.2

\geq et \leq sont des relations d'ordre. $>$ et $<$ sont transitives mais ne sont ni réflexives ni antisymétriques.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $x \leq x$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, on a bien $x = y$. Enfin, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$. \leq est donc bien une relation d'ordre, et le raisonnement est le même pour \geq .
 $<$ est bien transitive : pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si $x < y$ et $y < z$, alors $x < z$. Cependant, elle n'est pas réflexive : pour $x \in \mathbb{R}$, il est impossible d'avoir $x < x$, puisque cela impliquerait que $x \neq x$.
 $<$ est, d'un point de vue purement logique, transitive : l'assertion

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \implies x\mathcal{R}z$$

est vraie puisque le prédicat

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases}$$

est faux pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

□

Propriété 7.1.3 – Compatibilité des relations d'ordres sur \mathbb{R} avec les opérations usuelles

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$. Alors :

— Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$x + a \leq y + a$$

— Pour tout $(z, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z \leq t$:

$$x + z \leq y + t$$

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \geq 0$:

$$\lambda x \leq \lambda y$$

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \leq 0$:

$$\lambda x \geq \lambda y$$

— Si $0 < x \leq y$, alors

$$0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$$

— Si $x \leq y < 0$, alors

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Alors :

— Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$x + a < y + a$$

— Pour tout $(z, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z \leq t$:

$$x + z < y + t$$

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$:

$$\lambda x < \lambda y$$

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda < 0$:

$$\lambda x > \lambda y$$

— Si $0 < x < y$, alors

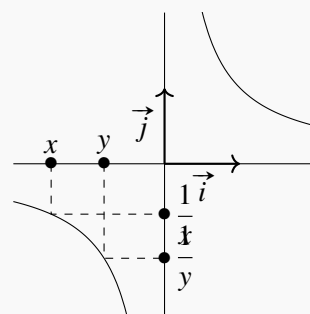
$$0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$

— Si $x < y < 0$, alors

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$$

Remarque 7.1.4

Les derniers points viennent de la stricte décroissance de l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* .

**Exercice 7.1.5**

Est-il vrai que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (z, t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x \leq y \\ z \leq t \end{cases} \implies xz \leq yt$$

Correction. C'est faux : lorsqu'on multiplie une inégalité, il faut être vigilant à propos du signe du coefficient par lequel on multiplie.

Voici un contre-exemple : $1 \leq 2$ et $-3 \leq -2$, pourtant $1 \times (-3) = -3$, $2 \times (-2) = -4$ et $-3 > -4$.

Exercice 7.1.6

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On suppose que $a \leq b$ et $c \leq d$. Montrer que

$$a + c = b + d \implies \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$$

Correction. Supposons que $a + c = b + d$. Alors, en soustrayant c et b , on obtient $a - b = d - c$. Cependant, $a \leq b$ donc $a - b \leq 0$, et $c \leq d$ donc $0 \leq d - c$. Ainsi :

$$0 \leq d - c = a - b \leq 0$$

donc $d - c = 0$ et $a - b = 0$, autrement dit $c = d$ et $a = b$.

Corollaire 7.1.7

Soit I un ensemble fini non vide. Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels. Alors :

$$(\forall i \in I, a_i \leq b_i) \implies \sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

Démonstration. Cela peut se montrer par récurrence sur le nombre d'éléments de I . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la propriété \mathcal{P}_n : « Pour tout ensemble I formé de n éléments, pour toutes familles de réels $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$, on a $(\forall i \in I, a_i \leq b_i) \implies \sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$ ».

- Posons $n = 1$ et soit I un ensemble formé d'un seul élément. Considérons deux familles de réels $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$, formées elles aussi d'un seul élément, que nous noterons respectivement a et b . Supposons que $a \leq b$, alors $\sum_{i \in I} a_i = a \leq b = \sum_{i \in I} b_i$ et \mathcal{P}_1 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons \mathcal{P}_n vraie. Soit I un ensemble formé de $n + 1$ éléments et soient deux familles de réels $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ avec, pour tout $i \in I$, $a_i \leq b_i$. Soit i_0 un élément quelconque de I . Alors $I \setminus \{i_0\}$ est formé de n éléments et :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} a_i + a_{i_0} \\ &\leq \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} b_i + a_{i_0} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &\leq \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} b_i + b_{i_0} \text{ car } a_{i_0} \leq b_{i_0} \\ &= \sum_{i \in I} b_i \end{aligned}$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie, ce qui achève la récurrence. □

Exercice 7.1.8

Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} \leq \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{N}$$

Correction. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \llbracket N; 2N \rrbracket$, on a $0 < N \leq n \leq 2N$ donc $0 < \frac{1}{2N} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$. En sommant, on obtient :

$$\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{2N} \leq \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{N}$$

donc

$$\frac{1}{2N} (2N - N + 1) \leq \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} (2N - N + 1)$$

ou encore

$$\frac{N+1}{2N} \leq \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} \leq \frac{N+1}{N}$$

et en simplifiant :

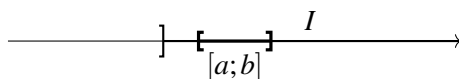
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2N} \leq \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{N}$$

7.1.2 Intervalles

Définition 7.1.9 – Intervalle de \mathbb{R}

Soit I une partie de \mathbb{R} . On dit que I est un *intervalle de \mathbb{R}* si :

$$\forall (a, b) \in I^2, [a; b] \subset I$$



Nous admettons pour le moment la propriété suivante, qui caractérise les intervalles de \mathbb{R} . Sa preuve fait appel à la notion de *borne supérieure* et de *borne inférieure*, que nous verrons plus tard.

Propriété 7.1.10 – Intervalles de \mathbb{R}

Les intervalles de \mathbb{R} sont les ensembles suivants :

- \emptyset
- $] -\infty; +\infty[$, c'est-à-dire \mathbb{R} lui-même.
- $] -\infty; a[$, $] -\infty; a]$, $] a; +\infty[$, $] a; +\infty[$, où a est un réel quelconque.
- $[a; b]$, $[a; b[$, $] a; b]$, $] a; b[$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 7.1.11

Le fait que ces ensembles sont des intervalles est assez intuitif. Cette propriété montre que tous les intervalles de \mathbb{R} sont de l'une des formes citées.

Cela peut sembler étonnant, mais \emptyset est bien un intervalle de \mathbb{R} : la phrase

$$\forall (a, b) \in \emptyset^2, [a; b] \subset \emptyset$$

est vraie puisque sa négation, à savoir,

$$\exists (a, b) \in I^2, [a; b] \not\subset \emptyset$$

est fausse.

Propriété 7.1.12

L'intersection de deux intervalles de \mathbb{R} est un intervalle.

Démonstration. Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Montrons que

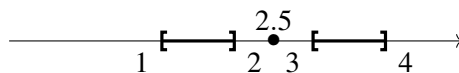
$$\forall (a, b) \in I \cap J, [a; b] \subset I \cap J$$

Soit $(a, b) \in I \cap J$. Alors $(a, b) \in I^2$, or I est un intervalle, donc $[a; b] \subset I$. De même, $(a, b) \in J^2$ et J est un intervalle donc $[a; b] \subset J$. Ainsi, $[a; b] \subset I \cap J$ et $I \cap J$ est un intervalle. \square

Exercice 7.1.13

La réunion de deux intervalles de \mathbb{R} est-elle un intervalle de \mathbb{R} ?

Correction. C'est faux en général. Par exemple, $[0; 1] \cup [2; 3]$ n'est pas un intervalle. En effet, $1 \in [0; 1] \cup [2; 3]$, $2 \in [0; 1] \cup [2; 3]$ mais $[1; 2] \not\subset [0; 1] \cup [2; 3]$ puisque $2.5 \notin [0; 1] \cup [2; 3]$.

**7.1.3 Inéquations et tableaux de signe**

Une technique commune pour résoudre des inéquations repose sur deux propriétés importantes à propos des relations d'ordre usuelles sur \mathbb{R} . Elles permettent de mettre en place des *tableaux de signe*.

Propriété 7.1.14 – \mathbb{R} est intègre

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$ab = 0 \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

Propriété 7.1.15 – Signe d'un produit et d'un quotient

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- Si a et b sont de même signe, alors $ab \geq 0$. Si de plus $b \neq 0$, alors $\frac{a}{b} \geq 0$.
- Si a et b sont de signes contraires, alors $ab \leq 0$. Si de plus $b \neq 0$, alors $\frac{a}{b} \leq 0$.

Exercice 7.1.16

Résoudre l'inéquation

$$\frac{15}{x+3} < x+5$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Correction. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{15}{x+3} < x+5 &\iff \frac{15}{x+3} - (x+5) < 0 \\
&\iff \frac{15 - (x+3)(x+5)}{x+3} < 0 \\
&\iff \frac{15 - (x^2 + 8x + 15)}{x+3} < 0 \\
&\iff \frac{-x^2 - 8x}{x+3} < 0 \\
&\iff \frac{-x(x+8)}{x+3} < 0
\end{aligned}$$

On peut alors établir un tableau de signe :

x	$-\infty$	-8	-3	0	$+\infty$		
$-x$		+	+	+	0	-	
$x+8$		-	0	+	+	+	
$x+3$		-	-	0	+	+	
$\frac{-x(x+8)}{x+3}$		+	0	-	+	0	-

L'ensemble des réels $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ tels que $\frac{15}{x+3} < x+5$ est donc $] -8; -3[\cup] 0; +\infty[$.

7.2 Valeur absolue

7.2.1 L'application valeur absolue

Définition 7.2.1 – Valeur absolue

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la *valeur absolue* de x est notée $|x|$ et vaut :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 7.2.2

$|2| = 2$ et $|-5| = 5$.

Propriété 7.2.3 – Propriétés algébriques de la valeur absolue

1. Pour tout réel x , on a $|x| \geq 0$.
2. Pour tout réel x , on a $-|x| \leq x \leq |x|$.
3. Pour tout réel x , on a $|x|^2 = x^2$.
4. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|x| = |y| \iff x^2 = y^2 \iff (x = y \text{ ou } x = -y)$.
5. Pour tout réel x , on a : $|x| = 0 \iff x = 0$.

6. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|xy| = |x| |y|$.
7. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.
8. Pour tout réel x , on a $|-x| = |x|$ (la fonction valeur absolue est paire).
9. La valeur absolue, restreinte à \mathbb{R}_+ , est injective : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, |x| = |y| \iff x = y$.
10. La valeur absolue, restreinte à \mathbb{R}_- , est injective : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_-^2, |x| = |y| \iff x = y$.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \geq 0$. Sinon, $x < 0$ et $|x| = -x > 0$. Dans tous les cas, $|x| \geq 0$.
2. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-|x| \leq x \leq |x|$. Si $x \geq 0$, cette inégalité devient $-x \leq x \leq x$, qui est bien vraie. Si $x < 0$, cette inégalité devient plutôt $-(-x) \leq x \leq -x$ ou encore $x \leq x \leq -x$, qui est de nouveau vraie (on a $x \leq 0 \leq -x$). Dans tous les cas, on a bien $-|x| \leq x \leq |x|$.
3. Montrons maintenant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 = x^2$. Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ donc $|x|^2 = x^2$. Sinon, $x < 0$ donc $|x| = -x$ et $|x|^2 = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2$. Dans tous les cas, on a bien $|x|^2 = x^2$.
On reprend l'application φ du lemme ??.
4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 |x| = |y| &\iff |x|^2 = |y|^2 \text{ car } |x| \geq 0 \text{ et } |y| \geq 0 \\
 &\iff x^2 = y^2 \\
 &\iff x^2 - y^2 = 0 \\
 &\iff (x - y)(x + y) = 0 \\
 &\iff x = y \text{ ou } x = -y
 \end{aligned}$$

5. Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned}
 |x| = 0 &\iff |x| = |0| \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } x = -0 \\
 &\iff x = 0
 \end{aligned}$$

6. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(xy)^2 = x^2 y^2 = |x|^2 |y|^2 = (|x| |y|)^2$$

donc $|xy| = ||x| |y|| = |x| |y|$ puisque $|x| |y| \geq 0$.

7. De même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \neq 0$, alors

$$\left(\frac{x}{y} \right)^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{|x|^2}{|y|^2} = \left(\frac{|x|}{|y|} \right)^2$$

$$\text{donc } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2$ donc $|-x| = |x|$.
9. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si x et y sont positifs, alors :

$$\begin{aligned}
 |x| = |y| &\iff x^2 = y^2 \\
 &\iff \varphi(x) = \varphi(y) \\
 &\iff x = y
 \end{aligned}$$

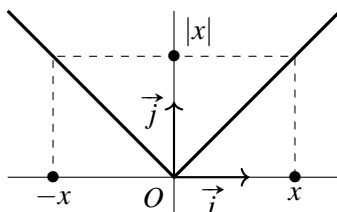
puisque φ est injective. La valeur absolue, restreinte à \mathbb{R}_+ , est bien injective.

10. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec x et y négatifs, on a :

$$\begin{aligned} |x| = |y| &\iff |-x| = |-y| \\ &\iff -x = -y \text{ puisque } -x \text{ et } -y \text{ sont positifs} \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

donc la valeur absolue, restreinte à \mathbb{R}_- , est bien injective.

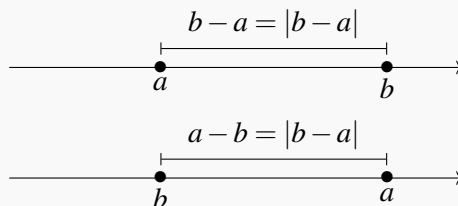
□



Graphes de la valeur absolue dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Remarque 7.2.4 : Interprétation géométrique

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. $|b - a|$ peut être vu comme la distance séparant les points d'abscisses a et b sur un axe gradué. En effet, si $a \leq b$, alors cette distance est $b - a = |b - a|$. Sinon, elle vaut $a - b = -(b - a) = |b - a|$ puisque dans ce cas, $b - a$ est négatif.

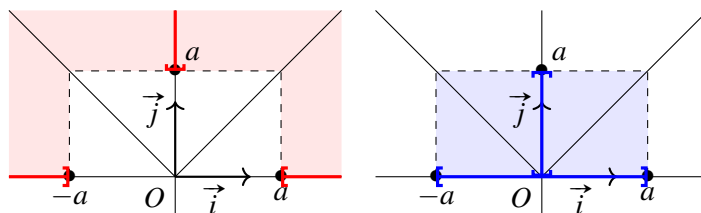


Propriété 7.2.5

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|x| \geq a \iff (x \geq a \text{ ou } x \leq -a) \iff x \in]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff x \in [-a; a]$$



Démonstration. Soit $(x, a) \in \mathbb{R}^2$.

— Si $x \geq 0$, alors :

$$|x| \geq a \iff x \geq a$$

— Si $x < 0$, alors :

$$\begin{aligned}|x| \geq a &\iff -x \geq a \\ &\iff x \leq -a\end{aligned}$$

Finalement :

$$|x| \geq a \iff (x \geq a \text{ ou } x \leq -a)$$

De la même façon, on obtient

$$|x| \leq a \iff (x \leq a \text{ et } x \geq -a)$$

□

Remarque 7.2.6

Cette propriété reste valable avec des inégalités strictes, mais il faut alors ouvrir les intervalles.

Exercice 7.2.7

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$|x - 6| \leq 2 \quad (E_1)$$

$$|x + 3| > 1 \quad (E_2)$$

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|x - 6| \leq 2 &\iff -2 \leq x - 6 \leq 2 \\ &\iff 4 \leq x \leq 8\end{aligned}$$

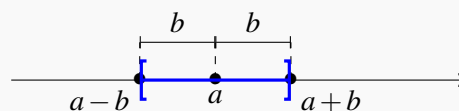
L'ensemble des solutions de (E_1) est alors $[4; 8]$.

$$\begin{aligned}|x + 3| > 1 &\iff (x + 3 > 1 \text{ ou } x + 3 < -1) \\ &\iff (x > -2 \text{ ou } x < -4)\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est alors $] -\infty; -4[\cup] -2; +\infty[$.

Remarque 7.2.8

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre l'inéquation $|x - a| \leq b$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, revient à trouver tous les réels situés à une « distance » de a inférieure à b . Si b est positif, cela peut se traduire géométriquement ainsi :



Propriété 7.2.9 – Inégalité triangulaire

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

De plus, $|a + b| = |a| + |b|$ si et seulement si a et b sont de même signe.

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Par stricte croissante de la fonction carré sur \mathbb{R}_+ (voir le lemme ??), on a :

$$\begin{aligned} |a+b| \leq |a|+|b| &\iff |a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2 \\ &\iff (a+b)^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &\iff a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2 \\ &\iff 2ab \leq 2|ab| \\ &\iff ab \leq |ab| \end{aligned}$$

et cette dernière assertion est toujours vraie puisque $ab \leq |ab|$. On a donc montré que $|a+b| \leq |a|+|b|$, et ce quels que soient a et b dans \mathbb{R} .

Traitons alors le cas d'égalité. Avec les mêmes calculs que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} |a+b| = |a|+|b| &\iff ab = |ab| \\ &\iff ab \geq 0 \\ &\iff a \text{ et } b \text{ ont même signe} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que

$$||a|-|b|| \leq |a+b|$$

ou encore que

$$-|a+b| \leq |a|-|b| \leq |a+b|$$

ou enfin que

$$|b|-|a+b| \leq |a| \leq |b|+|a+b|$$

Or :

$$\begin{aligned} |a| &= |a+b-b| \\ &\leq |a+b|+|-b| \\ &\leq |a+b|+|b| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |b| &= |a+b-a| \\ &\leq |a+b|+|-a| \\ &= |a+b|+|a| \end{aligned}$$

donc

$$|b|-|a+b| \leq |a|$$

On a donc bien

$$|b|-|a+b| \leq |a| \leq |b|+|a+b|$$

donc

$$||a|-|b|| \leq |a+b|$$

□

7.3 Parties bornées

Définition 7.3.1 – Partie minorée, minorant

Soit A une partie de \mathbb{R} et m un réel.

On dit que m est un *minorant* de A lorsque

$$\forall x \in A, m \leq x$$

S'il existe, dans \mathbb{R} , un minorant de A , on dit que A est *minorée*.

Définition 7.3.2 – Partie majorée, majorant

Soit A une partie de \mathbb{R} et M un réel.

On dit que M est un *majorant* de A lorsque

$$\forall x \in A, x \leq M$$

S'il existe, dans \mathbb{R} , un majorant de A , on dit que A est *majorée*.

Définition 7.3.3 – Partie bornée de \mathbb{R}

Soit A une partie de \mathbb{R} . On dit que A est *bornée* lorsque A est minorée et majorée.

Exemple 7.3.4

$[3; +\infty[$ est minorée par -2 : en effet, pour tout $x \in [3; +\infty[$, on a $-2 \leq x$ puisque $x \geq 3$. **Remarquons qu'un minorant, s'il existe, n'a aucune raison d'être unique** : -5 , -12 , 1 et 3 sont aussi des minorants de $[3; +\infty[$.

$[3; +\infty[$ n'est pas majorée. En effet, la négation de l'assertion

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [3; +\infty[, x \leq M$$

est

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [3; +\infty[, x > M$$

et cette négation est vraie : en effet, soit M un réel. Si $M < 3$, alors $3 \in [3; +\infty[$ et $3 > M$. Si $M \geq 3$, alors $M + 1 \in [3; +\infty[$ et $M + 1 > M$. Dans les deux cas, on a montré l'existence d'un réel x dans $[3; +\infty[$ tel que $x > M$: $[3; +\infty[$ n'admet donc aucun majorant.

En tant que partie minorée mais non majorée, $[3; +\infty[$ n'est pas bornée.

Cependant, $] -1; 12]$ est bornée : elle est minorée (par -1 , par exemple) et majorée (par 12 , mais aussi par 13 , 25.3 ou tout réel supérieur à 12).

Définition 7.3.5 – Minimum, maximum

Soit A une partie de \mathbb{R} .

S'il existe un minorant de A qui appartient à A , celui-ci est appelé *minimum* de A . Il est noté $\min(A)$ ou $\min_{a \in A}(a)$.

S'il existe un majorant de A qui appartient à A , celui-ci est appelé *maximum* de A . Il est noté $\max(A)$ ou $\max_{a \in A}(a)$.

Remarque 7.3.6

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Même si A est minorée (ce qui n'a aucune raison d'être vrai en général), rien ne dit que A admet un minimum : il faudrait pour cela montrer qu'il existe un minorant de A qui appartient à A . Il en est de même pour les majorants et maxima.

Exemple 7.3.7

$]1;2]$ est majorée par 2 et $2 \in]1;2]$: cette partie admet donc 2 pour maximum.

$]1;2]$ est minorée, mais n'admet pas pour autant de minimum. Pour le montrer, considérons un élément $m \in]1;2]$.

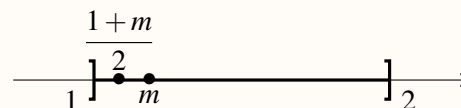
Alors $1 < m$. m n'est alors pas un minorant de $]1;2]$, puisque $\frac{1+m}{2}$ est un élément de $]1;2]$ strictement inférieur à m .

En effet :

$$1 = \frac{1+1}{2} < \frac{1+m}{2} < \frac{m+m}{2} = m \leq 2$$

donc $\frac{1+m}{2} \in]1;2]$ et $\frac{1+m}{2} < m$.

Aucun élément de $]1;2]$ ne pouvant être un minorant de cette même partie, celle-ci n'admet pas de minimum.

**Propriété 7.3.8**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$. Le tableau suivant récapitule les intervalles de \mathbb{R} majorés, minorés, bornés, ayant un minimum et/ou un maximum.

	Minoré	Majoré	Borné	Minimum	Maximum
$[a; b]$	Oui	Oui	Oui	a	b
$]a; b]$	Oui	Oui	Oui	Non	b
$[a; b[$	Oui	Oui	Oui	a	Non
$]a; b[$	Oui	Oui	Oui	Non	Non
$]-\infty; b[$	Non	Oui	Non	Non	Non
$]-\infty; b]$	Non	Oui	Non	Non	b
$]a; +\infty[$	Oui	Non	Non	Non	Non
$[a; +\infty[$	Oui	Non	Non	a	Non

Propriété 7.3.9

Soient A et B deux parties de \mathbb{R} .

— Si A et B admettent un maximum, alors $A \cup B$ aussi, et

$$\max(A \cup B) = \max\{\max A, \max B\}$$

— Si A et B admettent un minimum, alors $A \cup B$ aussi, et

$$\min(A \cup B) = \min\{\min A, \min B\}$$

Démonstration. On montrera le premier cas, le second étant laissé en exercice. Supposons que A et B admettent un maximum. Alors :

— Soit $x \in A \cup B$.

— Si $x \in A$, alors $x \leq \max A \leq \max\{\max A, \max B\}$.

— Sinon $x \in B$ donc $x \leq \max B \leq \max\{\max A, \max B\}$.

Dans tous les cas, $x \leq \max\{\max A, \max B\}$. $\max\{\max A, \max B\}$ est donc un majorant de $A \cup B$.

— On a $\max\{\max A, \max B\} \in A \cup B$. En effet, $\max\{\max A, \max B\}$ ne peut valoir que $\max A$ ou $\max B$. Si $\max\{\max A, \max B\} = \max A$, alors $\max\{\max A, \max B\} \in A \subset A \cup B$. Sinon, $\max\{\max A, \max B\} = \max B \in$

$B \subset A \cup B$. Dans les deux cas, $\max\{\max A, \max B\} \in A \cup B$.
On a donc montré que $\max\{\max A, \max B\}$ est le maximum de $A \cup B$. □

Exercice 7.3.10

Soient A et B deux parties de \mathbb{R} admettant un maximum. Montrer que $\min\{\max A, \max B\}$ est un majorant de $A \cap B$.
Est-il vrai que $\max(A \cap B) = \min\{\max A, \max B\}$?

Correction. Soit $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \leq \max A$ et $x \leq \max B$: on en déduit que $x \leq \min\{\max A, \max B\}$, et $\min\{\max A, \max B\}$ est un majorant de $A \cap B$.

Cependant, $\min\{\max A, \max B\}$ n'est pas forcément dans $A \cap B$. $A \cap B$ peut parfaitement être vide. Un autre contre-exemple serait $A = [-1; 0] \cup [1; 2]$ et $B = \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$. Dans ce cas, $\min\{\max A, \max B\} = \min\left\{2, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}$ mais $\frac{3}{4} \notin A$ donc $\frac{3}{4} \notin A \cap B$.

Propriété 7.3.11

Soit A une partie finie non vide de \mathbb{R} . Alors A admet un maximum et un minimum.

Démonstration. Cela peut se montrer par récurrence sur le nombre d'éléments de A .

- Si A n'est formé que d'un seul élément, celui-ci est à la fois le minimum et le maximum de A .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que toute partie de \mathbb{R} formée de n éléments admet un minimum et un maximum. Soit A une partie de \mathbb{R} formée de $n+1$ éléments, et soit $a \in A$. Alors $A \setminus \{a\}$ est formée de n éléments : elle admet, par hypothèse de récurrence, un maximum et un minimum. Puisque $\{a\}$ admet aussi un maximum et un minimum, c'est aussi le cas de $A = (A \setminus \{a\}) \cup a$, ce qui achève la récurrence. □

Notation

Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels. Alors $\{a_i, i \in I\}$ admet un minimum et un maximum (c'est un ensemble fini). On note alors :

$$\min(\{a_i, i \in I\}) = \min_{i \in I}(a_i) = \min(a_i)_{i \in I}$$

$$\max(\{a_i, i \in I\}) = \max_{i \in I}(a_i) = \max(a_i)_{i \in I}$$

Par exemple, on a $\min(2, -1, 3) = -1$ et $\max(2, -1, 3) = 3$.

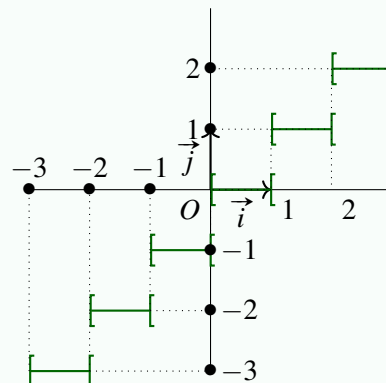
7.4 Partie entière

Définition 7.4.1 – Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif, noté $\lfloor x \rfloor$, tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Cet entier est appelé *partie entière* de x .



Démonstration. L'existence de $\lfloor x \rfloor$ sera admise. Elle repose sur le fait que \mathbb{R} est archimédien, ce qui est hors-programme. Il reste à montrer l'unicité de $\lfloor x \rfloor$. Soient n et m deux entiers relatifs tels que $n \leq x < n+1$ et $m \leq x < m+1$. Alors

$$n \leq x < n+1 \text{ et } -(m+1) < -x \leq -m$$

et par somme

$$n - (m+1) < x - x < n+1 - m$$

ou encore

$$n - m - 1 < 0 < n - m + 1$$

donc

$$n - m - 1 < 0 \text{ et } 0 < n - m + 1$$

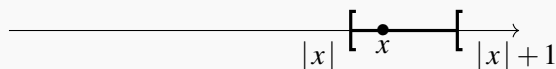
Ainsi

$$-1 < n - m < 1$$

Cependant, $n - m$ est un entier, or le seul entier appartenant à $] -1; 1[$ est 0. Ainsi $n - m = 0$ et $n = m$, d'où l'unicité de $\lfloor x \rfloor$. \square

Remarque 7.4.2

Pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor$ peut être vu comme étant le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x . Autrement dit, $\lfloor x \rfloor = \max \mathbb{Z} \cap]-\infty; x]$.



Exemple 7.4.3

$$\lfloor 3.6 \rfloor = 3 \text{ et } \lfloor -2.3 \rfloor = -3.$$

Exercice 7.4.4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

7.5 Exercices

Exercice 7.5.1

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2x^2 + 5x}{7 + x^2} \geq 1$$

Exercice 7.5.2

Résoudre les inéquations suivantes, après avoir précisé leurs domaines de définition.

1.

$$\frac{x+1}{x^2+1} \leq 0$$

2.

$$\frac{x+1}{x^2+1} \leq 1$$

3.

$$x^4 - 3x^2 + 1 \geq -1$$

Exercice 7.5.3

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$.

2. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

3. En déduire un encadrement simple de

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$$

Exercice 7.5.4 – Utilisation d'expressions conjuguées

Résoudre^a l'inéquation suivante, après avoir préciser son domaine de définition, l'inconnue x étant dans \mathbb{R} :

$$\frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}} \leq 0 \quad (E)$$

a. On pourra utiliser la technique des « quantités conjuguées » : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, on a

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{x+5}$ est bien défini si et seulement si $x+5 \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geq -5$.

De même, $\sqrt{3-x}$ est bien défini si et seulement si $3-x \geq 0$ c'est-à-dire si et seulement si $3 \geq x$.

Ainsi, $\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}$ est bien défini si et seulement si $x \in [-5; 3]$.

De la même façon $\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}$ est bien défini si et seulement si $x \in [-3; 5]$. Cependant, puisque cette expression est

au dénominateur, elle ne doit pas être nulle. Or, pour tout $x \in [-3; 5]$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x} = 0 &\iff \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}} = 0 \\ &\iff \sqrt{x+3}^2 - \sqrt{5-x}^2 = 0 \\ &\iff x+3 - (5-x) = 0 \\ &\iff 2x-2 = 0 \\ &\iff x = 1\end{aligned}$$

Finalement, l'inéquation (E) est bien définie sur $[-3; 3] \setminus \{1\}$. Soit x dans cet ensemble. Alors :

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}} \leq 0 \\ &\iff \frac{(\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x})(\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x})}{\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}}{(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \leq 0 \\ &\iff \underbrace{\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}}}_{>0} \times \frac{\sqrt{x+5}^2 - \sqrt{3-x}^2}{\sqrt{x+3}^2 - \sqrt{5-x}^2} \leq 0 \\ &\iff \frac{x+5 - (3-x)}{x+3 - (5-x)} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x+2}{2x-2} \leq 0 \\ &\iff \frac{2(x+1)}{2(x-1)} \leq 0 \\ &\iff \frac{x+1}{x-1} \leq 0\end{aligned}$$

On peut alors établir un tableau de signe :

x	-3	-1	1	3
$x+1$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x-1}$	+	0	-	+

L'ensemble des solutions de (E) est donc $[-1; 1[$.

Exercice 7.5.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

Exercice 7.5.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n |i - j|$$

Exercice 7.5.7

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x :

1. $|x - 2| \leq 4$

2. $|x + 5| \geq 2$

3. $|x^2 - 2x| \leq 3$

4. $\lfloor x - 2 \rfloor \leq 4$

5. $\lfloor x + 5 \rfloor \geq 2$

6. $\lfloor x^2 - 2x \rfloor \leq 3$

Exercice 7.5.8

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z| \text{ et } |x - y| + |x + y| \geq |x| + |y|$$

Exercice 7.5.9

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x - \lfloor x \rfloor \in [0; 1[$.

Le nombre $x - \lfloor x \rfloor$ est appelé *partie fractionnaire* de x .

2. Quelle est la partie fractionnaire de 3.4 ? De -2.4 ?

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor$.

On pourra distinguer les cas selon la valeurs des parties fractionnaires de x et y .

Exercice 7.5.10

Les ensembles suivants sont-ils majorés, minorés ?

1. $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}; 2 + \frac{1}{n} \right]$.

2. $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [n; n + 1]$.

3. $C = \{x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$.

4. $D = \{x^2 + 1, x \in [-1; 2]\}$.

5. $E = \left\{ \frac{1+x}{x}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

6. $F = \left\{ x \in \mathbb{R}, \frac{2x+1}{x^2+1} \leq 1 \right\}$.

Exercice 7.5.11

Les ensembles de l'exercice 7.5.10 admettent-ils un minimum ? Un maximum ?

7.6 DM conducteur**Exercice 23**

Résoudre les inéquations suivantes, après avoir précisé leur domaine de définition : P.S. 1 pour chaque

$$1. \quad \frac{x+2}{x-3} < 0$$

$$2. \quad \frac{x+2}{x-3} < 1$$

$$3. \quad \frac{x+2}{x^2+3} < 1$$

$$4. \quad \frac{3x^2+1}{4x^2+1} \geq 2$$

Correction. 1. Cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

On peut établir le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+2}{x-3}$	$+$	0	$-$	$+$

L'ensemble des solutions est donc $] -2; 3[$.

2. De même, cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{x+2}{x-3} < 1 &\iff \frac{x+2}{x-3} - 1 < 0 \\
 &\iff \frac{x+2-(x-3)}{x-3} < 0 \\
 &\iff \frac{5}{x-3} < 0 \\
 &\iff x-3 < 0 \\
 &\iff x < 3
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S =] -\infty; 3[$.

3. Pour tout réel x , on a $x^2 + 3 > 0$ donc cette inéquation est définie sur \mathbb{R} . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et puisque $x^2 + 3 > 0$:

$$\begin{aligned}
 \frac{x+2}{x^2+3} < 1 &\iff x+2 < x^2+3 \\
 &\iff x+2-x^2-3 < 0 \\
 &\iff -x^2+x-1 < 0
 \end{aligned}$$

La fonction polynomiale du second degré $x \mapsto -x^2 + x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = -3 < 0$. Cette fonction est ainsi strictement négative (vu le signe du coefficient devant le terme de degré 2) sur \mathbb{R} .

L'ensemble des solutions de l'inéquation posée est donc \mathbb{R} .

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $4x^2 + 1 \geq 1 > 0$ donc cette inéquation est définie sur \mathbb{R} . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{3x^2+1}{4x^2+1} \geq 2 &\iff 3x^2+1 \geq 2(4x^2+1) \\
 &\iff 0 \geq 5x^2+1
 \end{aligned}$$

et ce dernier prédicat est toujours faux. L'ensemble des solutions de l'inéquation posée est donc vide.

Exercice 24Résoudre les inéquations suivantes : PTS 1 pour chaque

1. $|x-7| \geq 5$

2. $|x+2| > 3$

3. $|x^2 - 4x + 2| < 1$

4. $\lfloor x^2 + 1 \rfloor \geq \frac{1}{2}$ (attention, c'est une partie entière !)

Correction. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 |x-7| \geq 5 &\iff x-7 \geq 5 \text{ ou } x-7 \leq -5 \\
 &\iff x \geq 12 \text{ ou } x \leq 2
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S =]-\infty; 2] \cup [12; +\infty[$.2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 |x+2| > 3 &\iff x+2 > 3 \text{ ou } x+2 < -3 \\
 &\iff x > 1 \text{ ou } x < -5
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S =]-\infty; -5[\cup]1; +\infty[$.3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 |x^2 - 4x + 2| < 1 &\iff -1 < x^2 - 4x + 2 \text{ et } x^2 - 4x + 2 < 1 \\
 &\iff 0 < x^2 - 4x + 3 \text{ et } x^2 - 4x + 1 < 0
 \end{aligned}$$

La fonction polynomiale du second degré $x \mapsto x^2 - 4x + 3$ a pour discriminant $\Delta_1 = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 = 2^2 > 0$, et deux racines réelles sont

$$\frac{4+2}{2} = 3$$

$$\frac{4-2}{2} = 1$$

La fonction polynomiale du second degré $x \mapsto x^2 - 4x + 1$ a pour discriminant $\Delta_2 = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 = (2\sqrt{3})^2$ et ses racines sont

$$\frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

On peut donc établir le tableau suivant :

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	1	3	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$		
x^2-4x+3		+	+	0	-	0	+	+
x^2-4x+1		+	0	-	-	-	0	+

L'ensemble des solutions est donc $S =]2 - \sqrt{3}; 1[\cup]3; 2 + \sqrt{3}[$.4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \lfloor x^2 + 1 \rfloor \geq \frac{1}{2} &\iff \lfloor x^2 + 1 \rfloor \geq 1 \text{ car } \lfloor x^2 + 1 \rfloor \text{ est un entier} \\
 &\iff x^2 + 1 \geq 1 \\
 &\iff x^2 \geq 0 \text{ ce qui est toujours vrai}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \mathbb{R}$.

Exercice 25

Soit x un réel.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

PTS 1

2. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$. PTS 1

Correction. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

et en divisant par 10^n :

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après ce qui précède (en soustrayant $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$) :

$$0 \leq x - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} < \frac{1}{10^n}$$

Or, il est possible de choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$. Pour un tel n , on a bien $\left| x - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \right| < \varepsilon$.

Il ne reste plus qu'à poser $p = \lfloor 10^n x \rfloor$ et $q = 10^n$ pour conclure.

Exercice 26

Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} . On note

$$A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}$$

1. On suppose que A est majorée et que B est minorée. Montrer que $A - B$ est majorée. PTS 1
2. On suppose que A admet un maximum et B que B admet un minimum.
 - (a) Montrer que $A - B$ admet un maximum et exprimer celui-ci en fonction de $\max(A)$ et $\min(B)$.
 - (b) $A - B$ admet-il nécessairement un minimum ? On justifiera la réponse.

Correction. 1. A est supposée majorée et B est supposée minorée : il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall a \in A, a \leq M \text{ et } \forall b \in B, m \leq b$$

Soit $x \in A - B$: par définition, il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a - b$. Or $a \leq M$ et $m \leq b$ (donc $-b \leq -m$), de sorte que

$$x = a - b \leq M - m$$

$M - m$ est donc un majorant de $A - B$ (qui est donc majoré).

2. Ici, on suppose que A admet un maximum et que B admet un minimum.

- (a) D'après la question précédente, $\max(A) - \min(B)$ est un majorant de $A - B$. De plus, $\max(A) \in A$ et $\min(B) \in B$ donc $\max(A) - \min(B) \in A - B$: $\max(A) - \min(B)$ est donc le maximum de $A - B$.

- (b) Non, et on peut donner un contre-exemple. Posons $A = \mathbb{R}_-$ (qui a pour maximum 0) et $B = \mathbb{R}_+$ (qui a pour minimum 0). Alors :

$$A - B = \{a - b, a \in \mathbb{R}_-, b \in \mathbb{R}_+\}$$

et en particulier $\mathbb{R}_- = \{a - 0, a \in \mathbb{R}_-\} \subset A - B$

Or \mathbb{R}_- n'est pas minoré : $A - B$ ne l'est donc pas non plus.

Chapitre 8

Trigonométrie

8.1	Le cercle trigonométrique	156
8.1.1	Définition	156
8.1.2	Congruence	157
8.2	Fonctions circulaires	158
8.2.1	Définitions	158
8.2.2	Paramétrisation du cercle trigonométrique	160
8.2.3	Fonction tangente	163
8.3	Formulaire	165
8.3.1	Formules d'addition	165
8.3.2	Valeurs particulières des fonctions circulaires	169
8.4	Continuité et dérivabilité des fonctions circulaires	172
8.4.1	Rappels	172
8.4.2	Une inégalité fondamentale	173
8.4.3	Cosinus et sinus	174
8.5	Exercices	178
8.6	DM conducteur	181

Dans ce chapitre, le plan sera ramené à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

8.1 Le cercle trigonométrique

8.1.1 Définition

Définition 8.1.1 – Cercle trigonométrique

On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de centre O et de rayon 1.
Son demi-périmètre est noté π , de sorte que son périmètre est 2π .

Définition 8.1.2 – Mesure d'angle orienté

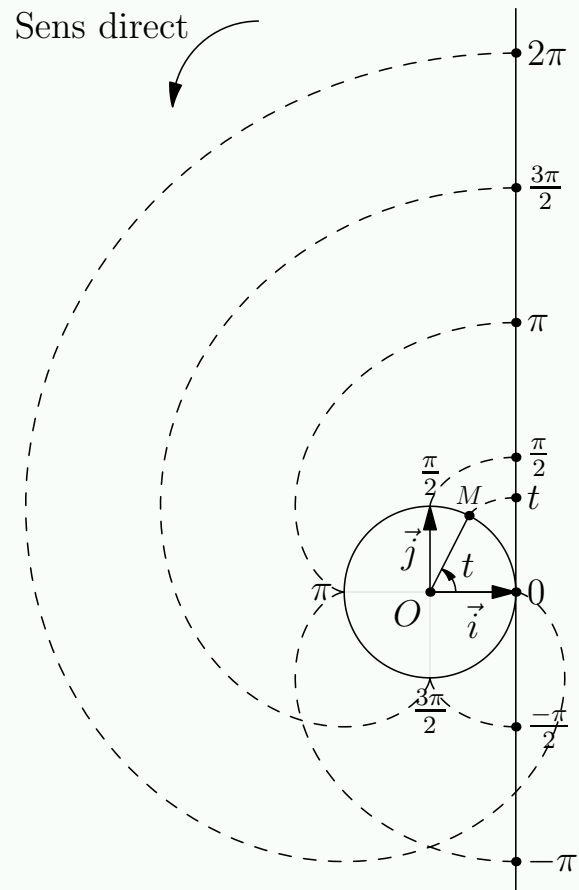
A tout réel t , on associe un point du cercle trigonométrique de la façon suivante :

- Si $t \geq 0$, on parcourt, sur le cercle trigonométrique et en partant du point de coordonnées $(1, 0)$, une longueur égale à t dans le sens direct^a.
- Si $t < 0$, on parcourt, sur le cercle trigonométrique et en partant du point de coordonnées $(1, 0)$, une longueur égale à $-t$ dans le sens indirect^b.

Soit M un point du cercle trigonométrique. On appelle *mesure de l'angle orienté* $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ tout réel t pour lequel le point ainsi associé est M .

^a. C'est-à-dire dans le même sens que le chemin le plus court, sur le cercle trigonométrique, permettant de passer du point de coordonnées $(1, 0)$ au point $(0, 1)$, c'est-à-dire de " \vec{i} à \vec{j} ".

^b. Le sens indirect correspond au sens inverse du sens direct.



Dans la suite de ce chapitre, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on notera $M(t)$ le point du cercle trigonométrique tel que t soit une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM(t)})$.

Définition 8.1.3 – Mesure principale d'un angle orienté

Soit M un point du cercle trigonométrique. On appelle *mesure principale* de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM(t)})$ l'unique mesure de celui-ci comprise dans $]-\pi; \pi]$.

8.1.2 Congruence

Si M est un point du cercle trigonométrique, la seule façon de revenir sur M en parcourant le cercle trigonométrique est de faire des tours complets du cercle, dans le sens direct ou indirect. Nous avons donc la propriété suivante :

Propriété 8.1.4

Soient t et t' deux réels. Alors :

$$M(t) = M(t') \iff \exists k \in \mathbb{Z}, t = t' + k \times 2\pi$$

La notion de congruence permet alors de reformuler cette propriété.

Définition 8.1.5 – Congruence

Soient t et t' réels. On dit que t et t' sont congrus modulo 2π s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = t' + ka$.
On note alors $t \equiv t' [2\pi]$.

La propriété 8.1.4 devient alors :

Propriété 8.1.6

Soient t et t' deux réels. Alors :

$$M(t) = M(t') \iff t \equiv t' [2\pi]$$

Propriété 8.1.7 – La congruence est une relation d'équivalence

— La relation de congruence modulo 2π est *réflexive* :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t \equiv t [2\pi]$$

— La relation de congruence modulo 2π est *symétrique* :

$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, t \equiv t' [2\pi] \implies t' \equiv t [2\pi]$$

— La relation de congruence modulo 2π est *transitive* :

$$\forall (t, t', t'') \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} t \equiv t' [2\pi] \\ t' \equiv t'' [2\pi] \end{cases} \implies t \equiv t'' [2\pi]$$

Démonstration. — Soit t un réel. Alors $t = t + 0 \times 2\pi$ donc $t \equiv t [2\pi]$, ce qui prouve la réflexivité.

— Soit $(t, t') \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $t \equiv t' [2\pi]$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = t' + k \times 2\pi$. On a donc $t' = t - k \times 2\pi = t + k' \times 2\pi$ avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$: ainsi $t' \equiv t [2\pi]$, ce qui prouve la symétrie.

— Soit $(t, t', t'') \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $t \equiv t' [2\pi]$ et $t' \equiv t'' [2\pi]$. Il existe alors $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $t = t' + k \times 2\pi$ et $t' = t'' + k' \times 2\pi$. On a donc $t = t'' + k' \times 2\pi + k \times 2\pi = t'' + (k' + k) \times 2\pi = t'' + k'' \times 2\pi$ avec $k'' = k' + k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $t \equiv t'' [2\pi]$ ce qui prouve la transitivité. □

8.2 Fonctions circulaires

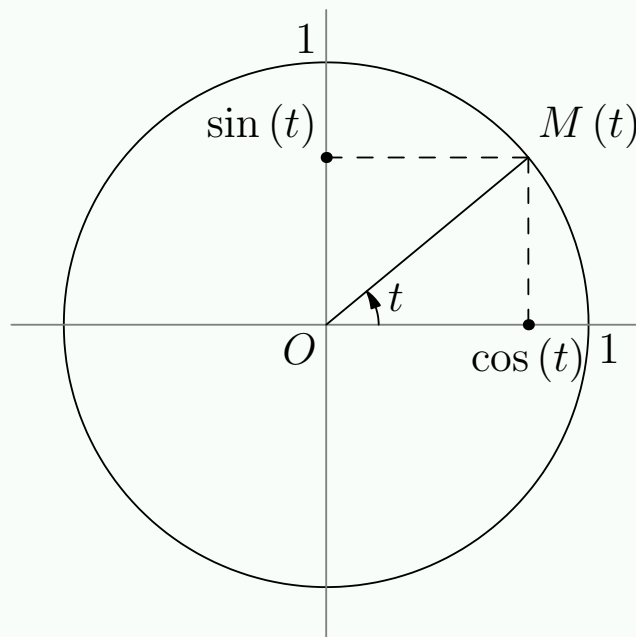
8.2.1 Définitions

Définition 8.2.1 – Cosinus et sinus

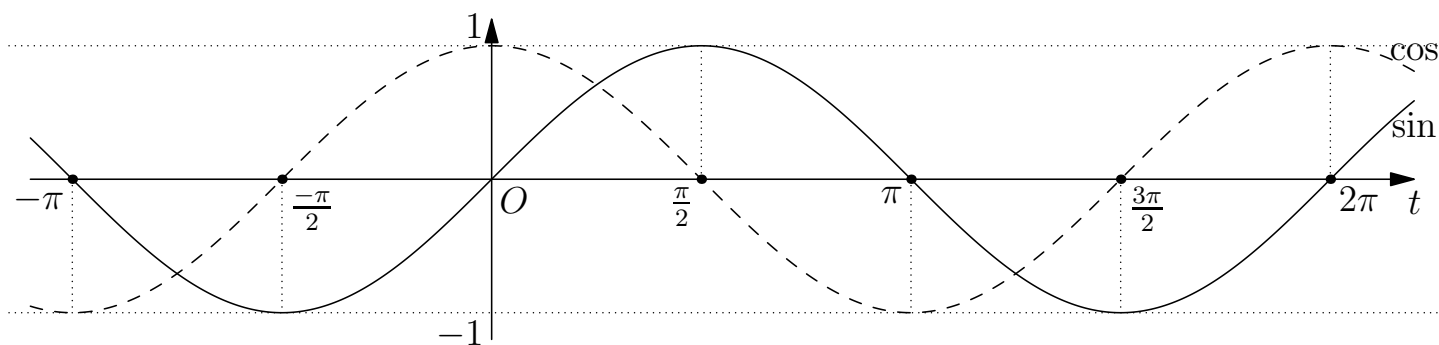
Soit t un réel, et $M(t)$ le point du cercle trigonométrique tel que t soit une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM(t)})$.

On appelle *cosinus* et *sinus* de t , et on note respectivement $\cos(t)$ et $\sin(t)$, les deux réels tels que $M(t)$ a pour coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$ dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Les réels $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont donc définis par la relation :



Voici les courbes représentatives des fonctions cos et sin.



Propriété 8.2.2

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos(t) \text{ et } \sin(t + 2k\pi) = \sin(t)$$

En particulier, les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos(t + 2\pi) = \cos(t) \text{ et } \sin(t + 2\pi) = \sin(t)$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Les points $M(t)$ et $M(t + 2k\pi)$ sont les mêmes, et ont donc même abscisse et même ordonnée. □

Propriété 8.2.3 – Symétries

Pour tout réel t :

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

$$\cos(\pi - t) = -\cos(t)$$

$$\cos(t + \pi) = -\cos(t)$$

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

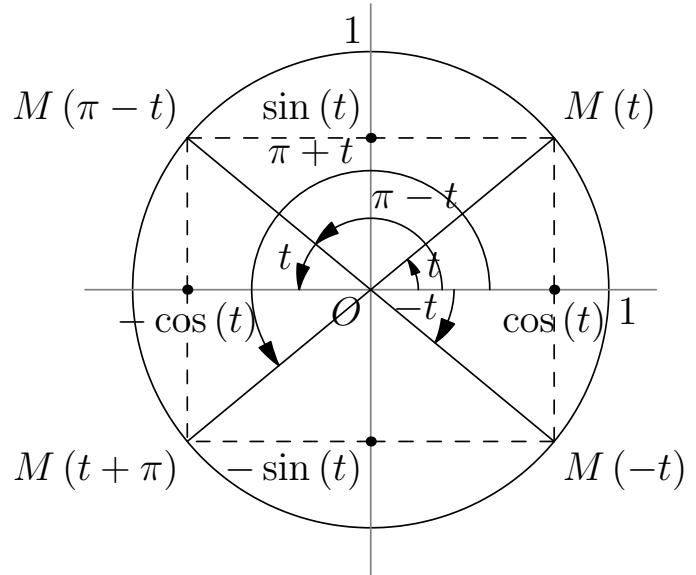
$$\sin(\pi - t) = \sin(t)$$

$$\sin(t + \pi) = -\sin(t)$$

Démonstration. $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi, $M(-t)$ et $M(t)$ ont même abscisse, et leurs ordonnées sont l'opposée l'une de l'autre. On a donc bien $\cos(t) = \cos(-t)$ et $\sin(-t) = -\sin(t)$.

De la même manière, $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées. Ces deux points ont donc même ordonnée, mais leurs abscisses sont l'opposée l'une de l'autre. On a donc bien $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$.

Enfin, $M(t + \pi)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à O . L'abscisse (respectivement l'ordonnée) de $M(t + \pi)$ est donc l'opposée de celle de $M(t)$, ainsi $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ et $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$.



□

En particulier, pour tout réel t , on a $\cos(-t) = \cos(t)$. La fonction \cos est donc *paire*, ce qui explique que sa courbe soit symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

De même, pour tout réel t , on a $\sin(-t) = -\sin(t)$ donc la fonction \sin est *impaire* : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Propriété 8.2.4 – Rotations

Pour tout réel t :

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t)$$

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(t)$$

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t)$$

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t)$$

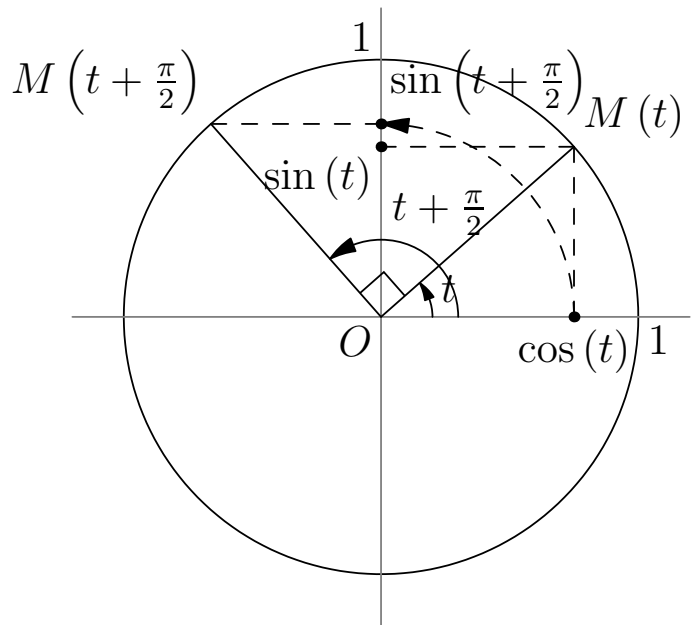
Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. $M\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ est obtenu en appliquant une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O au point $M(t)$. Ainsi, l'ordonnée de $M\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ est l'abscisse de $M(t)$, donc $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t)$.

Les autres formules peuvent se démontrer de la même façon (et le faire permet de mieux mémoriser ces formules), mais nous allons les déduire des égalités précédentes :

$$\begin{aligned}\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin(t + \pi) \\ &= -\sin(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(t - \frac{\pi}{2} + \pi\right) \\ &= -\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos(t)\end{aligned}$$



□

8.2.2 Paramétrisation du cercle trigonométrique

Propriété 8.2.5

Le cercle trigonométrique est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) vérifiant

$$x^2 + y^2 = 1$$

Démonstration. Considérons un point M de coordonnées (x, y) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Alors :

M est sur le cercle trigonométrique \iff la distance entre M et O vaut 1

$$\iff \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1$$

$$\iff \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$\iff x^2 + y^2 = 1$$

□

Corollaire 8.2.6

Pour tout réel t , on a

$$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$$

■ **Démonstration.** En effet, par définition, le point de coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$ est sur le cercle trigonométrique. □

Théorème 8.2.7 – Paramétrisation du cercle trigonométrique

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, il existe un unique réel $t \in]-\pi; \pi]$ tel que $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$.

Démonstration. Nous admettrons temporairement la continuité de la fonction \cos sur $[0; \pi]$, dans le but d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Cette continuité sera démontrée dans le théorème 8.4.4.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$.

Existence : Le carré d'un nombre réel étant toujours positif, on a :

$$0 \leq x^2 = 1 - y^2 \leq 1$$

On en déduit que $x \in [-1; 1]$.

Or, la fonction \cos est continue sur $[0; \pi]$, avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$: puisque $x \in [-1; 1]$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in [0; \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.

On a alors $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = \sin(\theta)^2$, ainsi $y = \sin(\theta)$ ou $y = -\sin(\theta)$.

Remarquons que $\theta \in [0; \pi]$ et donc que $\sin(\theta) \geq 0$, ce qui nous invite à effectuer une distinction de cas selon le signe de y :

— **Si $y > 0$:** puisque $-\sin(\theta) \leq 0$, on a forcément $y = \sin(\theta)$. Ainsi, en posant $t = \theta$, on a bien $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$.

— **Si $y = 0$:** puisque $y^2 = \sin(\theta)^2$, on a $0 = \sin(\theta)^2$ donc $\sin(\theta) = 0$. Ainsi, en posant $t = \theta$, on a de nouveau $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$.

— **Si $y < 0$:** puisque $\sin(\theta) \geq 0$, on a nécessairement $y = -\sin(\theta) = \sin(-\theta)$. En posant $t = -\theta$, on a donc $\cos(t) = \cos(-\theta) = \cos(\theta) = x$ et $\sin(t) = y$.

De plus, puisque $\theta \in [0; \pi]$, on sait que $t = -\theta \in [-\pi; 0]$. Or $y \neq 0$ donc $\theta \neq \pi$ et $-t \neq -\pi$: on sait donc que $t \in]-\pi; 0]$.

Dans tous les cas, on a bien trouvé $t \in]-\pi; \pi]$ tel que $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$.

Unicité : Soit $(t, t') \in]-\pi; \pi]$ tel que

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \cos(t') \\ y = \sin(t') \end{cases}$$

Alors les points $M(t)$ et $M(t')$ sont confondus : on en déduit que $t \equiv t' [2\pi]$ et donc qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = t' + k \times 2\pi$.

En particulier, $t - t' = k \times 2\pi$. Cependant :

$$\begin{cases} -\pi < t \leq \pi \\ -\pi \leq -t' < \pi \end{cases}$$

donc $-2\pi < t - t' < 2\pi$ puis $-2\pi < k \times 2\pi < 2\pi$. On a donc nécessairement $k = 0$ et $t - t' = 0 \times 2\pi = 0$. □

Ainsi, à chaque point M du cercle trigonométrique correspond un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, et à ce couple correspond un unique $t \in]-\pi; \pi]$ tel que $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$. En particulier :

Corollaire 8.2.8

Notons $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

L'application

$$\begin{aligned} \varphi :]-\pi; \pi] &\rightarrow \Gamma \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

est une bijection.

Propriété 8.2.9

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\cos(a) = \cos(b) \iff a \equiv b[2\pi] \text{ ou } a \equiv -b[2\pi]$$

$$\sin(a) = \sin(b) \iff a \equiv b[2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b[2\pi]$$

Démonstration. Montrons le pour sin (le raisonnement est le même pour cos)

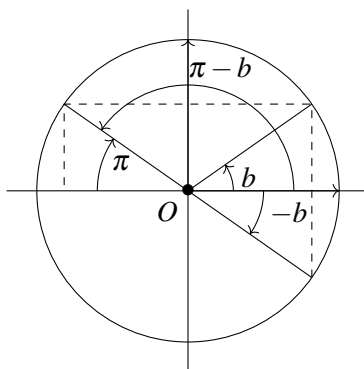
Supposons que $\sin(a) = \sin(b)$. Alors

$$\cos(a)^2 = 1 - \sin(a)^2 = 1 - \sin(b)^2 = \cos(b)^2$$

donc $\cos(a) = \cos(b)$ ou $\cos(a) = -\cos(b)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sin(a) = \sin(b) &\iff \begin{cases} \sin(a) = \sin(b) \\ \cos(a) = \cos(b) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \sin(a) = \sin(b) \\ \cos(a) = -\cos(b) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sin(a) = \sin(b) \\ \cos(a) = \cos(b) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \sin(a) = \sin(\pi - b) \\ \cos(a) = \cos(\pi - b) \end{cases} \\ &\iff M(a) = M(b) \text{ ou } M(a) = M(\pi - b) \\ &\iff a \equiv b[2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b[2\pi] \end{aligned}$$

□



Modulo 2π , les seuls réels ayant même sinus que b sont b et $\pi - b$. Les seuls réels, toujours modulo 2π , ayant même cosinus que b sont b et $-b$.

Exercice 8.2.10

Résoudre l'équation $\cos(x) = \cos(2x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \cos(x) = \cos(2x) &\iff x \equiv 2x[2\pi] \text{ ou } x \equiv -2x[2\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2x + 2k\pi \text{ ou } x = -2x + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = -2k\pi \text{ ou } 3x = 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = -2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

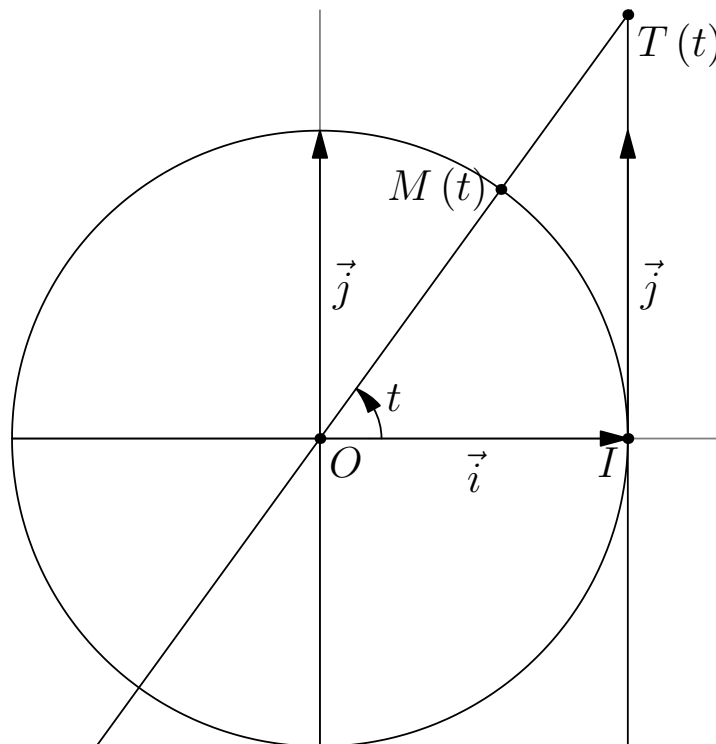
puisque s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = -2k\pi$, on peut alors écrire $x = \frac{2(-3k)\pi}{3}$ donc x s'écrit sous la forme $x = \frac{2k'\pi}{3}$ avec $k' = -3k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation donnée est donc

$$S = \left\{ \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

8.2.3 Fonction tangente

On note I le point de coordonnées $(1,0)$.



Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, la droite $(OM(t))$ coupe la droite passant par I et dirigée par \vec{j} en un point que nous noterons $T(t)$. Nous appellerons alors *tangente de t* l'unique réel, noté $\tan(t)$, tel que $\overrightarrow{IT(t)} = \tan(t) \vec{j}$.

Nous savons que $\overrightarrow{OM(t)} = \cos(t) \vec{i} + \sin(t) \vec{j}$. Puisque $T(t)$ est sur la droite $(OM(t))$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OT(t)} = k\overrightarrow{OM(t)} = k\cos(t) \vec{i} + k\sin(t) \vec{j}$. Or $T(t)$ a pour abscisse 1, donc $k\cos(t) = 1$ et $k = \frac{1}{\cos(t)}$ (qui est bien défini puisque $\cos(t) \neq 0$ dès lors que t n'est pas congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π , ce qui est le cas ici).

On a donc $\overrightarrow{OT(t)} = \vec{i} + \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \vec{j}$ et par Chasles :

$$\overrightarrow{IT(t)} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OT(t)} = -\vec{i} + \vec{i} + \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \vec{j} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \vec{j}$$

On en déduit que $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$, d'où la définition suivante.

Définition 8.2.11 – Fonction tangente

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, on appelle *tangente de t* le nombre

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

Remarque 8.2.12

Si $t \in \mathbb{R}$ est de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors la droite $(OM(t))$ est parallèle à la droite passant par I et dirigée par \vec{j} : ces droites n'ont pas d'intersection et $\tan(t)$ n'est alors pas défini.

Propriété 8.2.13

La fonction \tan est impaire :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(-t) = -\tan(t)$$

La fonction \tan est π -périodique :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(t + \pi) = \tan(t)$$

Enfin :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(\pi - t) = -\tan(t)$$

Démonstration. Notons $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Soit $t \in D$. Alors $-t \in D$, sinon il existerait $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, mais dans ce cas $t = -\frac{\pi}{2} - k\pi = \frac{\pi}{2} + (-k-1)\pi$ et t ne serait pas dans D . De plus :

$$\begin{aligned} \tan(-t) &= \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} \\ &= \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \\ &= -\tan(t) \end{aligned}$$

donc \tan est bien une fonction impaire.

De plus, $t + \pi$ est encore dans D , sinon il existerait $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mais dans ce cas $t = \frac{\pi}{2} + k\pi - \pi = \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi$ et t ne serait pas dans D . De plus :

$$\begin{aligned} \tan(t + \pi) &= \frac{\sin(t + \pi)}{\cos(t + \pi)} \\ &= \frac{-\sin(t)}{-\cos(t)} \\ &= \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \\ &= \tan(t) \end{aligned}$$

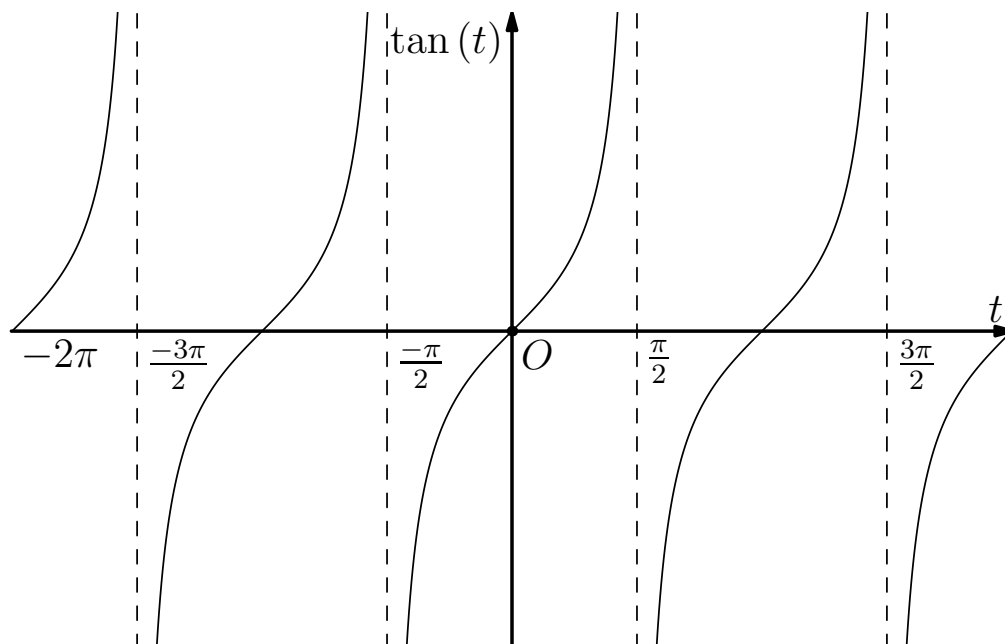
donc \tan est π -périodique.

Enfin, d'après ce qui précède, $-t \in D$ donc $\pi - t \in D$ et :

$$\begin{aligned}\tan(\pi - t) &= -\tan(t - \pi) \\ &= -\tan(t - \pi + \pi) \\ &= -\tan(t)\end{aligned}$$

□

Voici la courbe représentative de la fonction tan.



8.3 Formulaire

8.3.1 Formules d'addition

Propriété 8.3.1 – Formules d'addition

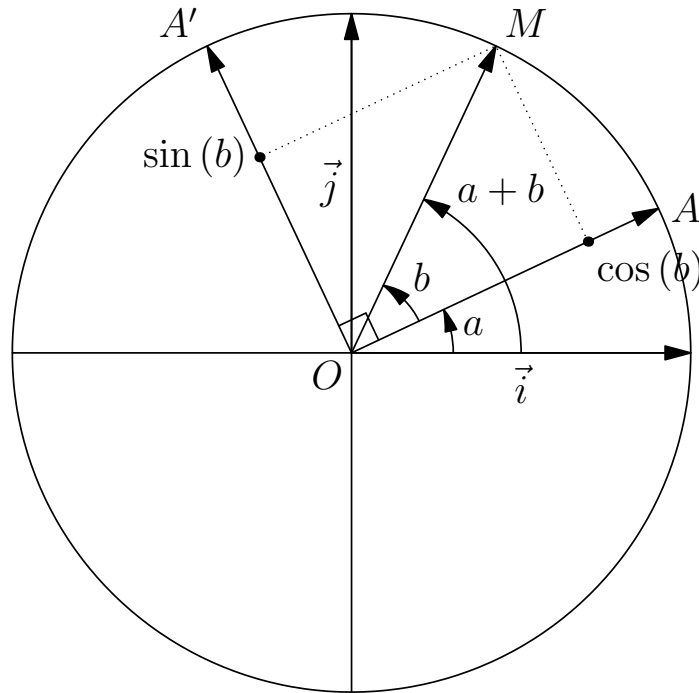
Pour tous réels a et b , on a :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (\text{a1})$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad (\text{a2})$$

Démonstration. Soient a et b deux réels. Considérons :

- Le point A du cercle trigonométrique, de coordonnées $(\cos(a), \sin(a))$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- Le point M du cercle trigonométrique, de coordonnées $(\cos(a + b), \sin(a + b))$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- Le point A' du cercle trigonométrique obtenu en appliquant une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O au point A .



Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , A' a pour coordonnées $(\cos(a + \frac{\pi}{2}), \sin(a + \frac{\pi}{2})) = (-\sin(a), \cos(a))$, de sorte que

$$\overrightarrow{OA'} = -\sin(a) \vec{i} + \cos(a) \vec{j}$$

Le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ est alors un repère orthonormé, dans lequel M a pour coordonnées $(\cos(b), \sin(b))$. En effet, le cercle trigonométrique est le même dans les deux repères (O, \vec{i}, \vec{j}) et $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \cos(b) \overrightarrow{OA} + \sin(b) \overrightarrow{OA'} \\ &= \cos(b) (\cos(a) \vec{i} + \sin(a) \vec{j}) + \sin(b) (-\sin(a) \vec{i} + \cos(a) \vec{j}) \\ &= \cos(a) \cos(b) \vec{i} + \sin(a) \cos(b) \vec{j} - \sin(a) \sin(b) \vec{i} + \cos(a) \sin(b) \vec{j} \\ &= (\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)) \vec{i} + (\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)) \vec{j} \end{aligned}$$

Ainsi, M a pour coordonnées $(\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b), \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b))$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Or, on sait que, dans ce même repère, M a pour coordonnées $(\cos(a+b), \sin(a+b))$. Par unicité de ces coordonnées, on obtient bien :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) \end{cases}$$

□

Corollaire 8.3.2 – Formules d'addition - bis

Pour tout réels a et b :

$$\cos(a-b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \quad (\text{a3})$$

$$\sin(a-b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b) \quad (\text{a4})$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos(a+(-b)) \\ &= \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)(-\sin(b)) \\ &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

puisque la fonction \cos est paire et \sin est impaire.

La deuxième formule se démontre de la même façon. □

Ces formules d'additions donnent lieu à de nombreuses autres expressions, qu'il est très utile de connaître et de savoir retrouver rapidement. En voici quelques unes.

Corollaire 8.3.3 – Formules de duplication

Pour tout réel t :

$$\begin{aligned}\cos(2t) &= \cos(t)^2 - \sin(t)^2 = 2\cos(t)^2 - 1 = 1 - 2\sin(t)^2 \\ \sin(2t) &= 2\cos(t)\sin(t)\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(2t) &= \cos(t+t) \\ &= \cos(t)\cos(t) - \sin(t)\sin(t) \\ &= \cos(t)^2 - \sin(t)^2\end{aligned}$$

Or $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ donc, d'une part :

$$\begin{aligned}\cos(2t) &= \cos(t)^2 - (1 - \cos(t)^2) \\ &= 2\cos(t)^2 - 1\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\cos(2t) &= 1 - \sin(t)^2 - \sin(t)^2 \\ &= 1 - 2\sin(t)^2\end{aligned}$$

Concernant le sinus, on a :

$$\begin{aligned}\sin(2t) &= \sin(t+t) \\ &= \sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t) \\ &= 2\cos(t)\sin(t)\end{aligned}$$

□

Corollaire 8.3.4 – Formules de linéarisation

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos(a)\cos(b) \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2\sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin(a)\cos(b)\end{aligned}$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos(a) \sin(b)$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Utilisons les formules d'addition. En particulier, avec les formules (a1) et (a3), on obtient :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ &= 2\cos(a)\cos(b) \end{aligned}$$

Les autres formules se prouvent de la même façon. □

Corollaire 8.3.5 – Formules de factorisation

Pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \cos(t) + \cos(t') &= 2 \cos\left(\frac{t+t'}{2}\right) \cos\left(\frac{t-t'}{2}\right) \\ \cos(t) - \cos(t') &= -2 \sin\left(\frac{t+t'}{2}\right) \sin\left(\frac{t-t'}{2}\right) \\ \sin(t) + \sin(t') &= 2 \sin\left(\frac{t+t'}{2}\right) \cos\left(\frac{t-t'}{2}\right) \\ \sin(t) - \sin(t') &= 2 \cos\left(\frac{t+t'}{2}\right) \sin\left(\frac{t-t'}{2}\right) \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les formules de linéarisation 8.3.4, en posant $a = \frac{t+t'}{2}$ et $b = \frac{t-t'}{2}$, de sorte que $a+b = t$ et $a-b = t'$. □

Corollaire 8.3.6 – Formule d'addition pour la fonction tan

Notons $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Alors pour tout $(a, b) \in D^2$, tel que $a+b \in D$, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in D^2$ tel que $a+b \in D$. Alors :

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\ &= \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \\ &= \frac{\cos(a)\cos(b) \frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{\cos(a)\cos(b) \left(1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)} \right)} \\ &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

□

8.3.2 Valeurs particulières des fonctions circulaires

Propriété 8.3.7 – Valeurs particulières

Les valeurs suivantes sont connues pour les fonctions cos et sin :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Pour la fonction tan :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(t)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Remarque 8.3.8 : Mnémonique

Pour retenir les valeurs remarquables de cos et sin, on peut remarquer qu'elles s'écrivent toutes sous la forme $\frac{\sqrt{k}}{2}$ avec $k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$. Pour les ordonner, il suffit de se rappeler que sin est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et que cos est décroissante sur ce même intervalle.

Démonstration. Pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$, ces valeurs sont évidentes.

Pour $t = \frac{\pi}{4}$: Utilisons le fait que $\frac{\pi}{2} = 2 \times \frac{\pi}{4}$ et que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Or :

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 &\implies \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\
 &\implies \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\
 &\implies \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 \\
 &\implies \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ ou } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

Or $\frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$: on a donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

De plus, on sait que $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, or :

$$\begin{aligned}
 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 &\implies 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
 &\implies \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \\
 &\implies \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ puisque } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour $t = \frac{\pi}{3}$: On peut raisonner de manière similaire, en remarquant que $\pi = 3 \times \frac{\pi}{3}$ et sachant que $\sin(\pi) = 0$. Or :

$$\begin{aligned}
 \sin(\pi) = 0 &\implies \sin\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\
 &\implies \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \\
 &\implies \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0 \\
 &\implies \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\
 &\implies \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\
 &\implies \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0 \\
 &\implies \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) = 0 \\
 &\implies \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(3 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0 \\
 &\implies \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \text{ ou } 3 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0
 \end{aligned}$$

Or $\frac{\pi}{3} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$. On en déduit donc que $3 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, puis que $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$ et enfin que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}}$ puisque $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 0$. On a donc bien $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
De plus :

$$\begin{aligned}
 \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= 1 - \frac{3}{4} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\pi}{3} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Pour $t = \frac{\pi}{6}$: Remarquons que $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, ainsi :

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Les valeurs remarquables pour la fonction tan se déduisent immédiatement de sa définition. □

Remarque 8.3.9 : Explication géométrique pour $\frac{\pi}{4}$

Ces valeurs peuvent aussi s'expliquer géométriquement sur le cercle trigonométrique. Pour rappel, si l'on considère une mesure, dans le sens direct, de chacun des angles d'un triangle, la somme de ces mesures est congrues à 0 modulo 2π .

Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sont positifs, leur valeur correspond respectivement aux longueurs OC et $CM\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de la figure ci-dessus.

L'angle $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$, et l'angle $\left(\overrightarrow{CM}\left(\frac{\pi}{4}\right), \overrightarrow{CO}\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

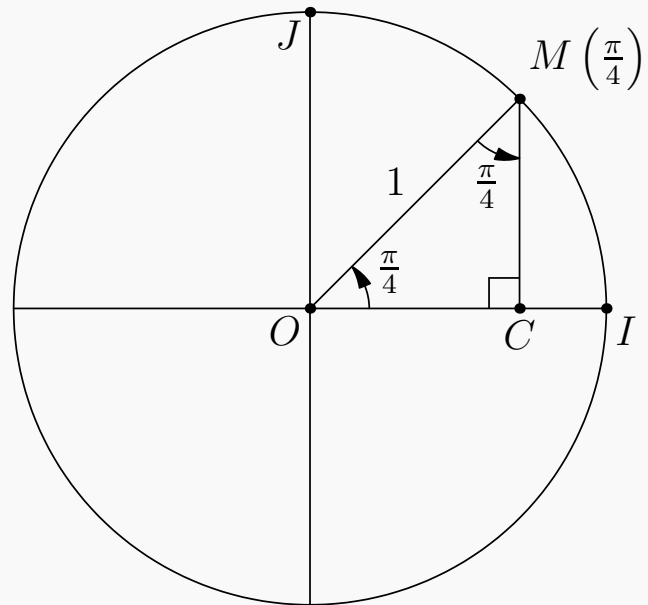
L'angle $\left(\overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{4}\right)O}, \overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{4}\right)C}\right)$ a donc pour mesure $\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ et le triangle $OCM\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est isocèle en C .

On en déduit que $OC = CM\left(\frac{\pi}{4}\right)$, or d'après Pythagore dans le triangle $OCM\left(\frac{\pi}{4}\right)$ rectangle en C :

$$OC^2 + CM\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$$

ou encore $2OC^2 = 1$ puis $OC^2 = \frac{1}{2}$ et enfin

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = OC = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Remarque 8.3.10 : Explication géométrique pour $\frac{\pi}{3}$

De la même façon, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ sont positifs donc leurs valeurs sont respectivement les longueurs OC et $CM\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de la figure ci-dessus.

Le triangle $OIM\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est isocèle en O puisque I et $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ sont sur le cercle trigonométrique. Les deux angles $\left(\overrightarrow{IM\left(\frac{\pi}{3}\right)}, \overrightarrow{IO}\right)$ et $\left(\overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{3}\right)O}, \overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{3}\right)I}\right)$ ont donc même mesure principale α .

Ainsi

$$\frac{\pi}{3} + 2\alpha \equiv \pi [2\pi]$$

puis

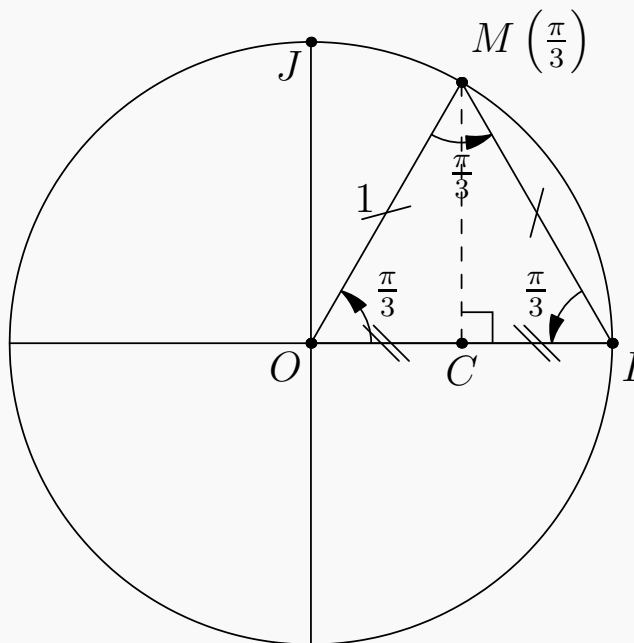
$$2\alpha \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

et

$$\alpha \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$$

donc $\alpha = \frac{\pi}{3}$ en tant que mesure principale.

Le triangle $OIM\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est donc équilatéral : en particulier, sa médiane issue de $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est confondue avec sa hauteur issue du segment $[OI]$. La longueur OC vaut donc $\frac{1}{2}$, d'où le fait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.



8.4 Continuité et dérivabilité des fonctions circulaires

8.4.1 Rappels

Nous reverrons en détails la notion de continuité et de dérivabilité d'une fonction, mais voici deux rappels que nous allons utiliser dès maintenant.

Définition 8.4.1 – Continuité d'une fonction numérique en un point

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins 2 points, et f une fonction de I vers \mathbb{R} .

Soit $a \in I$. On dit que f est *continue en a* si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

f est dite *continue sur I* si f est continue en chaque point de I .

Définition 8.4.2 – Dérivabilité d'une fonction numérique en un point

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins 2 points, et f une fonction de I vers \mathbb{R} .

Soit $a \in I$. On définit le *taux d'accroissement de f en a* :

$$\begin{aligned} \tau_a &: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

f est dite *dérivable en a* si τ_a admet une limite finie en a . Dans ce cas, on appelle *nombre dérivée de f en a* et on note $f'(a)$ le nombre

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \tau_a(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

f est dite *dérivable sur I* si f est dérivable en chaque point de I . Dans ce cas, on note f' la *fonction dérivée de f* , définie par :

$$\begin{aligned} f' &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

8.4.2 Une inégalité fondamentale

Théorème 8.4.3

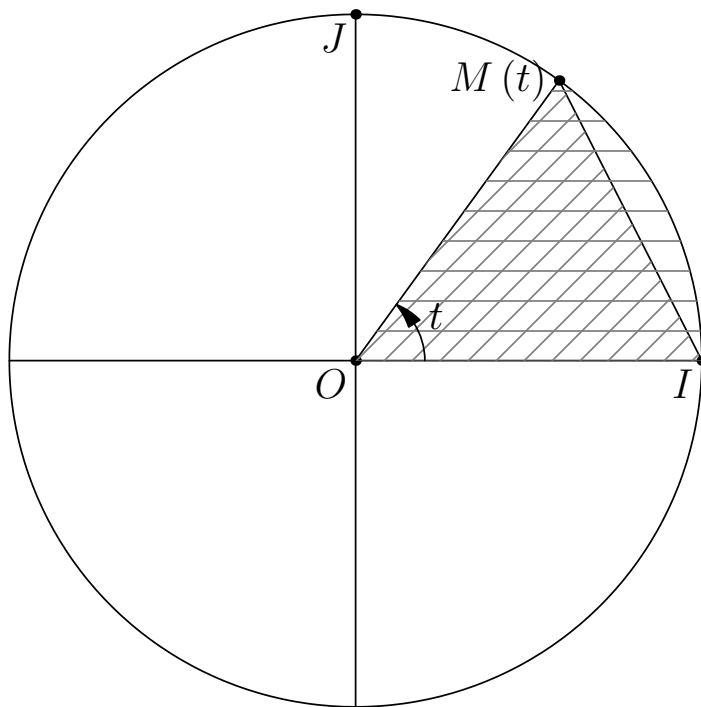
Pour tout réel t , on a :

$$|\sin(t)| \leq |t|$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. Supposons pour le moment que $t \geq 0$.

Si $t \geq 1$, il est évident que $-t \leq \sin(t) \leq t$ puisque \sin est à valeurs dans $[-1; 1]$. Nous supposons donc dans la suite que $t \in [0; 1]$. En particulier, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Considérons alors la figure suivante, représentant le cercle trigonométrique, dans le repère orthonormé direct (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) :



La hauteur du triangle $OIM(t)$ est, par définition, $\sin(t)$: son aire est donc $\frac{1 \times \sin(t)}{2}$. L'aire du triangle $OIM(t)$ est

inférieure à celle de la portion du cercle trigonométrique délimitée par I et $M(t)$. Cette portion représente une proportion égale à $\frac{t}{2\pi}$ du cercle trigonométrique, dont l'aire totale est $\pi \times 1^2 = \pi$. L'aire de cette portion est donc $\frac{t}{2\pi} \times \pi = \frac{t}{2}$.

On a donc, puisque $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$0 \leq \frac{\sin(t)}{2} \leq \frac{t}{2}$$

ou encore

$$-t \leq 0 \leq \sin(t) \leq t$$

A ce stade, on a montré que si $t \geq 0$, alors $-t \leq \sin(t) \leq t$ ou encore $|\sin(t)| \leq |t|$.

Pour finir, si $t \leq 0$, alors $-t \geq 0$ donc, d'après ce qui précède :

$$|\sin(-t)| \leq |-t|$$

ou encore, par imparité de \sin :

$$|-\sin(t)| \leq |-t|$$

et pour finir

$$|\sin(t)| \leq |t|$$

Finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t|$$

□

8.4.3 Cosinus et sinus

Théorème 8.4.4 – Continuité

Les fonctions \cos et \sin sont continues sur \mathbb{R} .

Démonstration. Montrons que \cos et \sin sont continues en 0. Pour sinus, cela découle directement du théorème 8.4.3 : en effet, pour tout réel t , on a $0 \leq |\sin(t)| \leq t$. Or $\lim_{t \rightarrow 0} |t| = 0$ et par encadrement, $\lim_{t \rightarrow 0} |\sin(t)| = 0$. On en déduit que

$\lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) = 0 = \sin(0)$ et que \sin est continue en 0.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(t)^2 = 1 - \sin(t)^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

Par continuité de la fonction racine carrée en 1, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\cos(t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} |\cos(t)| = \sqrt{1} = 1$$

et puisque $\cos(t) \geq 0$ pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) = \lim_{t \rightarrow 0} |\cos(t)| = 1 = \cos(0)$$

donc \cos est continue en 0.

Montrons maintenant la continuité de \sin sur \mathbb{R} . Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(x-a+a) \\ &= \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \times \cos(a) + 1 \times \sin(a) = \sin(a) \end{aligned}$$

En effet :

- $\lim_{x \rightarrow a} x - a = 0$.
- $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) = 0$.
- $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) = 1$.

On vient donc de montrer que sin est continue en tout réel a , et donc que sin est continue sur \mathbb{R} .

Pour finir, pour tout réel t , on a $\cos(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = (\sin \circ \varphi)(t)$ où $\varphi : t \mapsto t + \frac{\pi}{2}$. cos est donc continue sur \mathbb{R} comme composée de fonctions continues sur \mathbb{R} . \square

Corollaire 8.4.5

La fonction tan est continue sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

On a

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = +\infty$$

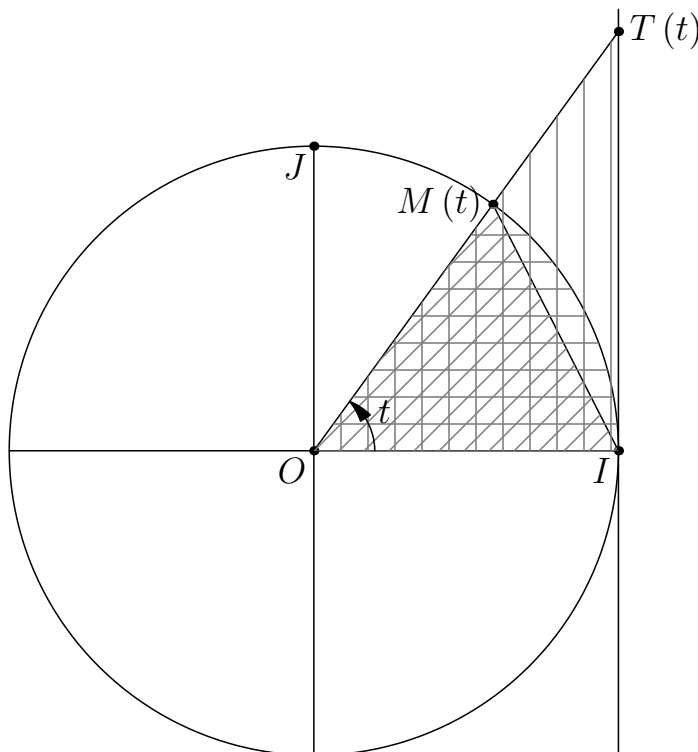
Corollaire 8.4.6

On a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t) - 1}{t} = 0$$

Démonstration. Soit $t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ et reprenons le même dessin que dans le théorème 8.4.3, en ajoutant un nouveau point $T(t)$ comme ci-dessous :



Par définition de la tangente, la hauteur du triangle $OIT(t)$ est $\tan(t)$. Par comparaison des aires, on a donc

$$0 \leq \frac{\sin(t)}{2} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\tan(t)}{2}$$

donc

$$0 \leq \sin(t) \leq t \leq \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

On en déduit, puisque $\cos(t) \geq 0$:

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], t \cos(t) \leq \sin(t) \leq t$$

puis

$$\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1$$

On peut prolonger cette inégalité au cas où $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$: en effet, dans ce cas, $-t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ donc

$$\cos(-t) \leq \frac{\sin(-t)}{-t} \leq 1$$

ou encore, par parité de \cos et imparité de \sin :

$$\cos(t) \leq \frac{-\sin(t)}{-t} = \frac{\sin(t)}{t} \leq 1$$

On a donc

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\}, \cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1$$

Or, \cos est continue en 0 et $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) = \cos(0) = 1$: par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

De plus, pour tout $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, on a

$$\sin(t)^2 = 1 - \cos(t)^2 = (1 - \cos(t))(1 + \cos(t))$$

Or $\cos(t) \geq 0$ donc $1 + \cos(t) \neq 0$ et $1 - \cos(t) = \frac{\sin(t)^2}{1 + \cos(t)}$ d'où

$$\cos(t) - 1 = \frac{-\sin(t)^2}{1 + \cos(t)}$$

Pour tout $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\}$, on a donc

$$\frac{\cos(t) - 1}{t} = \frac{1}{t} \times \frac{-\sin(t)^2}{1 + \cos(t)} = \sin(t) \times \frac{\sin(t)}{t} \times \frac{-1}{1 + \cos(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \times 1 \times \frac{-1}{2} = 0$$

□

Théorème 8.4.7

\cos et \sin sont dérivables sur \mathbb{R} , et pour tout réel t :

$$\cos'(t) = -\sin(t)$$

$$\sin'(t) = \cos(t)$$

Démonstration. Commençons par la fonction sin. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} &= \frac{\sin(x - a + a) - \sin(a)}{x - a} \\ &= \frac{\sin(x - a) \cos(a) + \cos(x - a) \sin(a) - \sin(a)}{x - a} \\ &= \frac{\sin(x - a) \cos(a) + (\cos(x - a) - 1) \sin(a)}{x - a} \\ &= \frac{\sin(x - a)}{x - a} \cos(a) + \frac{\cos(x - a) - 1}{x - a} \sin(a) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \times \cos(a) + 0 \times \sin(a) = \cos(a) \end{aligned}$$

En effet, $\lim_{x \rightarrow a} x - a = 0$ et d'après le corollaire 8.4.6, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t) - 1}{t} = 0$.

On a donc montré que sin est dérivable sur \mathbb{R} et que sa dérivée est cos.

Pour cosinus, on peut raisonner par composition : pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = (\sin \circ \varphi)(t)$ où $\varphi : t \mapsto t + \frac{\pi}{2}$. cos est donc dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos'(t) &= \varphi'(t) \sin'(\varphi(t)) \\ &= 1 \times \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin(t) \end{aligned}$$

□

Remarque 8.4.8 : Mnémonique

Pour ne pas se tromper dans les signes, on peut remarquer que cos est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: sa dérivée est donc négative sur cet intervalle, ce qui permet de retenir que $\cos' = -\sin$ et pas sin.

De même, sin est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: sa dérivée y est donc positive, ce qui permet de retenir que $\sin' = \cos$.

Corollaire 8.4.9

tan est dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, et pour tout $x \in D$:

$$\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Démonstration. tan est dérivable sur D , union d'intervalles contenant au moins deux points, en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur D , dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 \\ &= 1 + \tan(x)^2 \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2}\end{aligned}$$

□

8.5 Exercices

Exercice 8.5.1

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(3x) = \sin(x)$$

Exercice 8.5.2

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{4}$$

Exercice 8.5.3

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\sin(x) \leq x$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 8.5.4

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x)^4 + \sin(x)^4 = 1$$

On rappelle que $1 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2$.

Exercice 8.5.5

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = 1$$

On pourra factoriser par 2.

Exercice 8.5.6

1. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(t) + \cos(2t) = 0$$

2. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(t) + \cos(2t) + \cos(3t) = 0$$

Correction. 1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On pourrait utiliser les formules de factorisation, mais gardons cela pour la question suivante. De manière plus basique :

$$\begin{aligned}
 \cos(t) + \cos(2t) = 0 &\iff \cos(t) = -\cos(2t) \\
 &\iff \cos(t) = \cos(\pi - 2t) \\
 &\iff t \equiv \pi - 2t [2\pi] \text{ ou } t \equiv -(\pi - 2t) [2\pi] \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, t = \pi - 2t + 2k\pi \text{ ou } t = -\pi + 2t + 2k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 3t = \pi + 2k\pi \text{ ou } -t = -\pi + 2k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } t = \pi - 2k\pi
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Cette fois, factorisons :

$$\begin{aligned}
 \cos(t) + \cos(2t) + \cos(3t) &= \cos(t) + \cos(3t) + \cos(2t) \\
 &= 2 \cos\left(\frac{t+3t}{2}\right) \cos\left(\frac{t-3t}{2}\right) + \cos(2t) \\
 &= 2 \cos(2t) \cos(-t) + \cos(2t) \\
 &= 2 \cos(2t) \cos(t) + \cos(2t) \\
 &= 2 \cos(2t) \left(\cos(t) + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \cos(t) + \cos(2t) + \cos(3t) &= 0 \\
 \iff 2 \cos(2t) \left(\cos(t) + \frac{1}{2} \right) &= 0 \\
 \iff \cos(2t) = 0 \text{ ou } \cos(t) &= -\frac{1}{2} \\
 \iff 2t \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } 2t \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } t \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } t \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \\
 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 2t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } t = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\
 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, t = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } t = \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } t = \frac{3\pi}{4} + k\pi
 \end{aligned}$$

Exercice 8.5.7

Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 8.5.8

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\tan(x) \tan(2x) = 1$$

Exercice 8.5.9

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \sin(kt) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Exercice 8.5.10

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{\cos(nx) \sin((n+1)x)}{2 \sin(x)}$$

Correction. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin((n+1)x) \cos(nx)}{\sin(x)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons \mathcal{P}_n : « $\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin((n+1)x) \cos(nx)}{\sin(x)}$ ».

Montrons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— Posons $n = 0$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{0+1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin((0+1)x) \cos(0 \times x)}{\sin(x)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(0) \\ &= 1 \\ &= \cos(0) \\ &= \sum_{k=0}^0 \cos^2(kx) \end{aligned}$$

\mathcal{P}_0 est donc vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n est vraie. Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \cos^2(kx) = \frac{n+2}{2} + \frac{\sin((n+2)x) \cos((n+1)x)}{2 \sin(x)}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} \cos^2(kx) &= \sum_{k=0}^n \cos^2(kx) + \cos^2((n+1)x) \\
 &= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin((n+1)x) \cos(nx)}{\sin(x)} + \cos^2((n+1)x) \\
 &= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2 \sin(x)} \left(\sin((n+1)x) \cos(nx) + 2 \sin(x) \cos^2((n+1)x) \right) \\
 &= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2 \sin(x)} \left(\sin((n+1)x) \cos(nx) + \underbrace{2 \sin(x) \cos((n+1)x)}_{=\sin(x+(n+1)x) + \sin(x-(n+1)x)} \cos((n+1)x) \right) \\
 &= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2 \sin(x)} \left(\sin((n+1)x) \cos(nx) + (\sin((n+2)x) + \sin(-nx)) \cos((n+1)x) \right) \\
 &= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2 \sin(x)} \left(\sin((n+1)x) \cos(nx) + \underbrace{\sin((n+2)x) \cos((n+1)x)}_{\text{on garde ce terme}} - \sin(nx) \cos((n+1)x) \right) \\
 &= \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+2)x) \cos((n+1)x)}{2 \sin(x)} + \frac{1}{2 \sin(x)} \underbrace{(\sin((n+1)x) \cos(nx) - \sin(nx) \cos((n+1)x))}_{=\sin((n+1)x - nx)} \\
 &= \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+2)x) \cos((n+1)x)}{2 \sin(x)} + \frac{1}{2 \sin(x)} \sin(x) \\
 &= \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+2)x) \cos((n+1)x)}{2 \sin(x)} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{n+2}{2} + \frac{\sin((n+2)x) \cos((n+1)x)}{2 \sin(x)}
 \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule voulue.

\mathcal{P}_{n+1} est donc vraie, ce qui achève la récurrence.

8.6 DM conducteur

Barème total : PPS 12,5

Exercice 27

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2x+3) = \cos(1+2x)$$

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \cos(2x+3) = \cos(1+2x) &\iff 2x+3 \equiv 1+2x[2\pi] \text{ ou } 2x+3 \equiv -1-2x[2\pi] \\
 &\iff \underbrace{2 \equiv 0[2\pi]}_{\text{impossible}} \text{ ou } 4x \equiv -4[2\pi] \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 4x = -4 + 2k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = -1 + \frac{k}{2}\pi
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ -1 + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 28

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3} \cos(x) + 3 \sin(x) = \sqrt{6}$$

PTS 2

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Ainsi, on peut s'en sortir en factorisant par $2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos(x) + 3 \sin(x) = \sqrt{6} &\iff 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) \right) = \sqrt{6} \\ &\iff \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \\ &\iff \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\iff x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation donnée est donc

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 29

Résoudre l'équation

$$\frac{\cos(x) - \cos(3x)}{\sin(x) - \sin(3x)} = 1$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, après en avoir précisé le domaine de définition.

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \sin(x) - \sin(3x) = 0 &\iff \sin(x) = \sin(3x) \\ &\iff x \equiv 3x [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - 3x [2\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = 3x + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - 3x + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = -k\pi \text{ ou } 4x = \pi + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(Le « $-$ » a disparu dans le premier cas, puisque k varie dans \mathbb{Z} : il suffit d'appliquer le changement de variable $k \mapsto -k$).

L'équation est donc définie sur

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$$

Soit alors $x \in \mathcal{D}$. On a

$$\cos(x) - \cos(3x) = -2 \sin\left(\frac{x+3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-3x}{2}\right) = -2 \sin(2x) \sin(-x) = 2 \sin(2x) \sin(x)$$

$$\sin(x) - \sin(3x) = 2 \cos\left(\frac{x+3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2 \cos(2x) \sin(-x) = -2 \cos(2x) \sin(x)$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x) - \cos(3x)}{\sin(x) - \sin(3x)} = 1 &\iff \frac{2 \sin(2x) \sin(x)}{-2 \cos(2x) \sin(x)} = 1 \\ &\iff \frac{\sin(2x)}{-\cos(2x)} = 1 \\ &\iff \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = -1 \\ &\iff \tan(2x) = -1 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{-\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{-\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ est bien dans \mathcal{D} :

— Ce n'est pas un multiple de π : s'il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{-\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} = k'\pi$, on aurait (en multipliant par $\frac{2}{\pi}$)
 $\frac{-1}{4} + k = 2k'$ donc $\frac{-1}{4} = \underbrace{2k' - k}_{\in \mathbb{Z}}$: absurde.

— De même, $\frac{-\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{\pi}{4} + k'\frac{\pi}{2}$, avec $k' \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{-\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 30

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\cos((n+1)t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \left(\sin\left(\frac{n+2}{2}t\right) - \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$. Montrer **par récurrence** que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = 0$$

d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

Correction. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} & \cos((n+1)t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \left(2\cos^2\left(\frac{n+1}{2}t\right) - 1\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \times 2\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \left(\sin\left(\frac{n+1}{2}t + \frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{n+1}{2}t - \frac{t}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \left(\sin\left(\frac{n+2}{2}t\right) - \sin\left(\frac{n}{2}t\right)\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ (c'est-à-dire que $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons \mathcal{P}_n la propriété « $\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ ».

— \mathcal{P}_0 est vraie : d'une part, on a $\sum_{k=0}^0 \cos(kt) = \cos(0) = 1$ et d'autre part :

$$\frac{\sin\left(\frac{0+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{0}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) \times 1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 1$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons \mathcal{P}_n vraie. Alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n+1} \cos(kt) \\ &= \sum_{k=0}^n \cos(kt) + \cos((n+1)t) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \cos((n+1)t) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{n}{2}t\right) + \cos((n+1)t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{n}{2}t\right) + \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) (\sin\left(\frac{n+2}{2}t\right) - \sin\left(\frac{n}{2}t\right)) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{n+2}{2}t\right) + \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{n}{2}t\right) - \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{n}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{n+2}{2}t\right) + \sin\left(\frac{n+1}{2}t - \frac{n}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{n+2}{2}t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{n+2}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Remarquons que si $n = 0$, alors l'équation donnée équivaut à $1 = 0$ et n'a pas de solution. Dans la suite, on suppose donc que $n > 0$.

— S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = 2k\pi$, alors

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \sum_{k=0}^n 1 = n+1 \neq 0$$

et t n'est donc pas solution de l'équation posée.

— Sinon, $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ et d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(kt) = 0 &\iff \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 0 \\ &\iff \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{n}{2}t\right) = 0 \\ &\iff \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{n}{2}t\right) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n+1}{2}t = k\pi \text{ ou } \frac{n}{2}t = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, t = \frac{2k\pi}{n+1} \text{ ou } t = \frac{\pi + 2k\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{n} \end{aligned}$$

Attention toutefois, il ne faut pas que t soit un multiple de 2π , or pour tout $u \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{2k\pi}{n+1} = 2u\pi \iff k = u \times (n+1)$$

$$\frac{(2k+1)\pi}{n} = 2u\pi \iff 2k+1 = 2nu \text{ ce qui est impossible vu la parité de ces entiers}$$

Finalement, si $n > 0$, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \frac{2k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z}, k \text{ n'est pas multiple de } n+1 \right\} \cup \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Si $n = 0$, l'équation n'a pas de solution.

Chapitre 9

Nombres complexes

9.1	Le corps des nombres complexes	188
9.1.1	Définition	188
9.1.2	Opérations sur les nombres complexes	192
9.1.3	Conjugué d'un nombre complexe	196
9.1.4	Module d'un nombre complexe	199
9.1.5	Formulaire	204
9.2	Nombres complexes, trigonométrie et exponentielle	206
9.2.1	Le retour du cercle trigonométrique	206
9.2.2	Exponentielle complexe	207
9.2.3	Nombres complexes et trigonométrie	209
9.3	Equations algébriques	220
9.3.1	Nombres complexes et polynômes	220
9.3.2	Racines de l'unité	222
9.3.3	Équations polynomiales du second degré	227
9.4	Nombres complexes et géométrie	230
9.4.1	Translations	230
9.4.2	Positions relatives de deux vecteurs	231
9.4.3	Rotations	232
9.4.4	Homothéties	234
9.5	Exercices	239
9.6	DM conducteur	246

9.1 Le corps des nombres complexes

9.1.1 Définition

Au lycée, vous avez considéré un objet noté i tel que $i^2 = -1$, qui vous a amené à définir l'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Vous avez probablement traité des exercices montrant que ce nombre *imaginaire* i est très utile, en mathématique mais également dans d'autres matières, par exemple en sciences physiques.

Cependant, il n'est pas évident d'accepter qu'un tel objet i existe. Cela a d'ailleurs longtemps posé problème : nombreux furent ceux qui refusaient l'existence d'un tel objet, ou qui se contentaient de la tolérer par commodité. Cauchy (1789-1857) a consacré une importante partie de sa vie à donner un sens à cet objet imaginaire i (ce qu'il réussit à faire, notamment les restes de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dans la division euclidienne par $X^2 + 1$, ce que nous n'aborderons pas ici).

Une définition formelle de l'ensemble des nombres complexes, noté \mathbb{C} , pourrait être la suivante.

Définition 9.1.1 – Corps \mathbb{C} des nombres complexes

Il existe un ensemble \mathbb{C} , muni d'une *addition* notée $+$, d'une *multiplication* notée \times , et d'une opération notée \cdot tels que :

— $+$ et \times sont définies sur \mathbb{C}^2 .

— \cdot est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

— $+$ et \times sont des *lois de composition interne* sur \mathbb{C} :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' \in \mathbb{C} \text{ et } z \times z' \in \mathbb{C}$$

— \cdot est une *loi de composition externe à opérateurs réels* sur \mathbb{C} :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}, \lambda \cdot z \in \mathbb{C}$$

— $+$ et \times sont *associatives* sur \mathbb{C} :

$$\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') + z'' = z + (z' + z'') \text{ et } (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$$

— \cdot est *pseudo-associative* :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{C}, (\lambda \mu) \cdot z = \lambda \cdot (\mu \cdot z)$$

— $+$ et \times sont *commutatives* sur \mathbb{C} :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' = z' + z \text{ et } z \times z' = z' \times z$$

— \times et \cdot sont *distributives* par rapport à $+$:

$$\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \lambda \cdot (z + z') = \lambda \cdot z + \lambda \cdot z'$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{C}, (\lambda + \mu) \cdot z = \lambda \cdot z + \mu \cdot z$$

— \mathbb{C} admet un unique élément neutre, noté $0_{\mathbb{C}}$, pour $+$, et un unique élément neutre, noté $1_{\mathbb{C}}$ pour \times , c'est-à-dire tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + 0_{\mathbb{C}} = z \text{ et } z \times 1_{\mathbb{C}} = z$$

— Tout élément z de \mathbb{C} admet un unique *opposé*, noté $-z$, tel que $z + (-z) = 0_{\mathbb{C}}$.

— Tout élément z de \mathbb{C} différent de $0_{\mathbb{C}}$ admet un unique *inverse*, noté $\frac{1}{z}$, tel que $z \times \frac{1}{z} = 1_{\mathbb{C}}$.

— \mathbb{C} contient un élément, noté i , tel que $i \times i = -1$.

— L'application

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\mapsto a \cdot 1_{\mathbb{C}} + b \cdot i \end{aligned}$$

est une bijection.

\mathbb{C} , muni des lois $+$, \times et \cdot est alors appelé *corps des nombres complexes*.

On note également $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$.

Remarque 9.1.2

Tous ces points, à l'exception des deux derniers, sont vérifiés par \mathbb{R} muni de l'addition et de la multiplication habituelles, et considérant que la loi \cdot est cette même multiplication.

On cherche donc ici à construire un ensemble, muni de lois, qui, d'une certaine façon, *se comporte* comme \mathbb{R} , et dans lequel i aurait un sens.

Démonstration. La preuve qui suit n'est pas totalement développée et n'est pas exigible, les nombreux détails calculatoires étant omis. C'est un exercice intéressant que de les compléter.

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(a, b), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ et définissons les lois $+$, \times et \cdot de la façon suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2, (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

Il est alors évident que $+$ et \times sont des lois de composition interne et que \cdot est une loi de composition externe à opérateurs réels. L'associativité, la pseudo-associativité, la commutativité et la distributivité se montrent sans difficulté (mais de façon calculatoire). De même, il est immédiat que $(0, 0)$, que nous noterons $0_{\mathbb{R}^2}$ est l'élément neutre pour $+$ et que $(1, 0)$, que nous noterons $1_{\mathbb{R}^2}$, est l'élément neutre pour \times .

Si (a, b) est un élément de \mathbb{R}^2 , alors $(-a, -b)$ en est l'opposé : c'est le seul élément de \mathbb{R}^2 dont l'addition avec (a, b) donne $(0, 0)$. De plus, si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors on montre que (a, b) a pour seul inverse $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$.

De plus, en posant $i = (0, 1)$, on a

$$i \times i = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1_{\mathbb{R}^2}$$

Enfin, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = (a, b)$: l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\mapsto a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = (a, b) \end{aligned}$$

est alors clairement bijective. □

Notation

Dans la suite, on notera $1 = 1_{\mathbb{C}}$ et $0 = 0_{\mathbb{C}}$, et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$a \cdot 1_{\mathbb{C}} + b \cdot i = a + bi = a + ib \text{ et } a \cdot 1_{\mathbb{C}} + (-b) \cdot i = a - bi = a - ib$$

En particulier, lorsque $b = 0$, on confondra le complexe $a \cdot 1_{\mathbb{C}}$ et le réel a . Nous noterons donc $\mathbb{R} = \{a \cdot 1_{\mathbb{C}}, a \in \mathbb{R}\}$.

De façon similaire, on notera $i\mathbb{R} = \{ib, b \in \mathbb{R}\}$ et on appellera les éléments de cet ensemble les *imaginaires purs*.

De plus, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on omettra souvent le symbole \times en écrivant $z \times z' = zz'$. Si z' est non nul, on notera également $z \times \frac{1}{z'} = \frac{z}{z'}$.

Puisque l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (a, b) \mapsto a + ib$ est bijective, on peut définir la notion de *partie réelle* et de *partie imaginaire* d'un nombre complexe.

Définition 9.1.3 – Partie réelle, partie imaginaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$.

a est appelé *partie réelle* de z et b est appelé *partie imaginaire* de z .

On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$ et on a, par définition :

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$$

Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est un *imaginaire pur*.

Propriété 9.1.4

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Re}(z) + \mu \operatorname{Re}(z')$$

$$\operatorname{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Im}(z) + \mu \operatorname{Im}(z')$$

Démonstration. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soient $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ les couples tels que $z = a_1 + ib_1$ et $z' = a_2 + ib_2$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda z + \mu z' &= \lambda(a_1 + ib_1) + \mu(a_2 + ib_2) \\ &= \lambda a_1 + i\lambda b_1 + \mu a_2 + i\mu b_2 \\ &= \lambda a_1 + \mu a_2 + i(\lambda b_1 + \mu b_2) \end{aligned}$$

Puisque $\lambda a_1 + \mu a_2$ et $\lambda b_1 + \mu b_2$ sont des réels, alors par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire de tout nombre complexe, on a bien :

$$\operatorname{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda a_1 + \mu a_2 = \lambda \operatorname{Re}(z) + \mu \operatorname{Re}(z')$$

$$\operatorname{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda b_1 + \mu b_2 = \lambda \operatorname{Im}(z) + \mu \operatorname{Im}(z')$$

□

Définition 9.1.5 – Affixe et Image

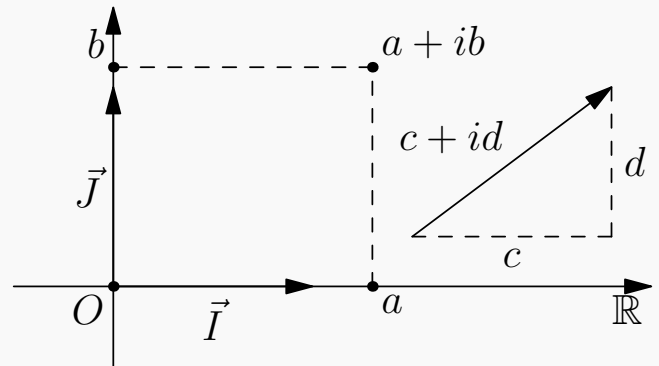
On munit le plan d'un repère orthonormé.

- Pour tout point M du plan, ayant pour coordonnées $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on dit que $z = a + ib$ est l'*affixe* de M , et que M est l'*image* de z .
- Pour tout vecteur \vec{u} du plan, ayant pour coordonnées $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on dit que $z = a + ib$ est l'*affixe* du vecteur \vec{u} .

Remarque 9.1.6

De cette manière, à chaque point et à chaque vecteur du plan muni d'un repère orthonormé, on associe un nombre complexe. Cela nous permet de visualiser l'ensemble \mathbb{C} sous la forme d'un plan... et d'y faire de la géométrie !

Dans ce plan, \mathbb{R} est représenté par l'axe des abscisses.

**Propriété 9.1.7 – Linéarité de l'afixe**

Dans un repère orthonormé du plan, on considère un vecteur \vec{u} d'afixe z , un vecteur \vec{v} d'afixe z' et deux réels λ et μ .

Alors l'afixe de $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ est $\lambda z + \mu z'$.

Démonstration. Notons (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives de \vec{u} et \vec{v} . \vec{u} a donc pour affixe $z = x + iy$ et \vec{v} a pour affixe $z' = x' + iy'$.

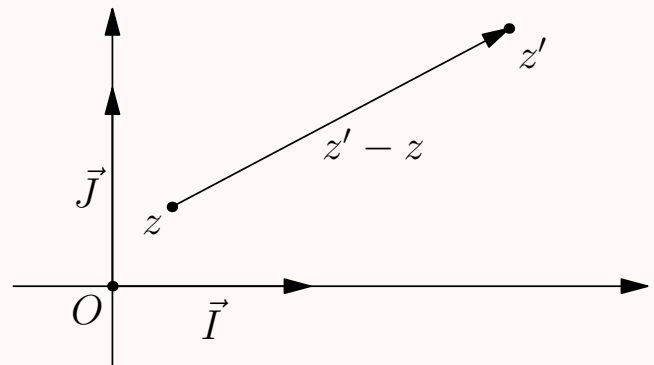
De plus, $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ a pour coordonnées $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$ et a donc pour affixe :

$$\lambda x + \mu x' + i(\lambda y + \mu y') = \lambda x + \lambda iy + \mu x' + \mu iy' = \lambda(x + iy) + \mu(x' + iy') = \lambda z + \mu z'$$

□

Propriété 9.1.8

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et, dans un repère orthonormé du plan, soient M et M' les images respectives de z et z' . Alors $z' - z$ est l'afixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.



Démonstration. Dans le repère orthonormé défini dans l'énoncé, notons (x, y) les coordonnées de M et (x', y') celles de M' , de sorte que les affixes respectifs de M et M' sont $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

Alors, dans ce même repère, $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(x' - x, y' - y)$ et a donc pour affixe $x' - x + i(y' - y) = x' + iy' - (x + iy) = z' - z$. □

9.1.2 Opérations sur les nombres complexes

Notation

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit z^n par récurrence en posant :

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z^{n+1} = z^n \times z \end{cases}$$

Si $z \in \mathbb{N}^*$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

Propriété 9.1.9 – Identités remarquables

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Démonstration. Il suffit de développer, par exemple pour la première identité :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \text{ par commutativité de } \times \end{aligned}$$

□

Remarque 9.1.10

0 n'est pas inversible, puisque pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $0 \times z = 0 \neq 1$.

Exercice 9.1.11

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Montrer que :

1. $j^3 = 1$.
2. $1 + j + j^2 = 0$.

Correction. 1. Développons :

$$\begin{aligned}
 j^2 &= j \times j \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}i + i^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} \\
 &= -\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j^3 &= j^2 \times j \\
 &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} - i^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

2. À nouveau, calculons brutalement :

$$\begin{aligned}
 1 + j + j^2 &= 1 + \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Remarque 9.1.12

Ce nombre complexe j est un grand classique, que nous allons croiser plusieurs fois. D'ailleurs, à la fin de ce chapitre, ce dernier exercice vous semblera beaucoup plus immédiat !

Propriété 9.1.13

1. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n z'^n = (zz')^n$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$:

$$z^n z^m = z^{n+m}$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$:

$$(z^n)^m = z^{nm}$$

4. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n \in \mathbb{C}^*$ et :

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$$

5. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$, on a $zz' \in \mathbb{C}^*$ et :

$$\frac{1}{zz'} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{z'}$$

6. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n z'^n = (zz')^n$$

7. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$:

$$z^n z^m = z^{n+m}$$

8. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$:

$$(z^n)^m = z^{nm}$$

Démonstration. 1. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n z'^n = (zz')^n$$

— Pour $n = 0$ c'est évident puisque $z^0 z'^0 = 1 \times 1 = 1 = (zz')^0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^n z'^n = (zz')^n$. Alors :

$$\begin{aligned} z^{n+1} z'^{n+1} &= z^n \times z \times (z')^n \times z' \\ &= z^n z'^n \times z \times z' \text{ par commutativité de } \times \\ &= (zz')^n \times (zz') \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (zz')^{n+1} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par récurrence pour montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, z^n z^m = z^{n+m} \text{ et } (z^n)^m = z^{nm}$$

— Pour $m = 0$ c'est évident puisque $z^n z^0 = z^n \times 1 = z^n = z^{n+0}$

— Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $z^n z^m = z^{n+m}$. Alors :

$$\begin{aligned} z^n z^{m+1} &= z^n z^m z \\ &= z^{n+m} z \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= z^{n+m+1} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons de nouveau par récurrence pour montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, (z^n)^m = z^{nm}$$

— Pour $m = 0$ c'est évident puisque $(z^n)^0 = 1 = z^0 = z^{n \times 0}$.

— Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $(z^n)^m = z^{nm}$. Alors :

$$\begin{aligned}(z^n)^{m+1} &= (z^n)^m z^n \\ &= z^{nm} z^n \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= z^{nm+n} \\ &= z^{n(m+1)}\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}z^n \left(\frac{1}{z}\right)^n &= \left(z \times \frac{1}{z}\right)^n \\ &= 1^n \\ &= 1 \text{ par récurrence immédiate}\end{aligned}$$

Ainsi, $\left(\frac{1}{z}\right)^n$ est bien l'inverse de z^n (qui est donc non nul), ce qui nous permet d'écrire que $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$.

5. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$. On a :

$$\begin{aligned}zz' \frac{1}{z} \frac{1}{z'} &= z \frac{1}{z} z' \frac{1}{z'} \text{ par commutativité de } \times \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{z} \frac{1}{z'}$ est l'inverse de zz' (qui est donc non nul), autrement dit $\frac{1}{zz'} = \frac{1}{z} \frac{1}{z'}$.

6. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{N}$, il suffit d'appliquer le point 1. Supposons donc que $n < 0$. Alors $-n \in \mathbb{N}$ et :

$$\begin{aligned}z^n z'^n &= \frac{1}{z^{-n}} \frac{1}{z'^{-n}} \\ &= \frac{1}{z^{-n} z'^{-n}} \\ &= \frac{1}{(zz')^{-n}} \text{ d'après le point 1} \\ &= (zz')^n\end{aligned}$$

7. — Si n et m sont positifs, il suffit d'appliquer le point 2.

— Si $n \leq 0$ et $m \geq 0$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et on distingue deux cas :

— Si $n + m \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}z^{n+m} z^{-n} &= z^{n+m-n} \\ &= z^m\end{aligned}$$

donc $z^{n+m} z^{-n} z^n = z^m z^n$ ou encore $z^{n+m} = z^n z^m$.

— Si $n + m < 0$, alors $-n - m \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned}z^{-n-m} z^m &= z^{-n-m+m} \\ &= z^{-n}\end{aligned}$$

donc $z^{-n-m} z^m z^{-n} = z^{-n} z^{-n}$ ou encore $z^{-n-m} = z^{-n} z^{-n}$. Ainsi $z^n z^m z^{-n-m} = z^n z^m z^{-n} z^{-m} = 1$ puis $z^n z^m z^{-n-m} z^{n+m} = 1 \times z^{n+m} = z^{n+m}$.

À ce stade, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a bien $z^n z^m = z^{n+m}$.

- Si $m < 0$: alors $-m \geq 0$ et on peut utiliser ce qui précède pour écrire $z^{-m} z^{-n} = z^{-m-n}$, puis comme ci-dessus que $z^n z^m = z^{n+m}$. Dans tous les cas, on a bien $z^n z^m = z^{n+m}$.

8. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.

- Si n et m sont positifs, il suffit d'appliquer le point 3.
- Si $n \leq 0$ et $m \geq 0$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et :

$$\begin{aligned} (z^n)^m &= \left(\frac{1}{z^{-n}} \right)^m \\ &= \left(\left(\frac{1}{z} \right)^{-n} \right)^m \\ &= \left(\frac{1}{z} \right)^{-nm} \\ &= z^{nm} \end{aligned}$$

À ce stade, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a bien $(z^n)^m = z^{nm}$.

- Si $m < 0$, alors $-m \in \mathbb{N}$ et on peut appliquer ce qui précède pour écrire que

$$\begin{aligned} (z^n)^m &= \frac{1}{(z^n)^{-m}} \\ &= \frac{1}{z^{-nm}} \\ &= z^{nm} \end{aligned}$$

□

9.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 9.1.14 – Conjugué d'un nombre complexe

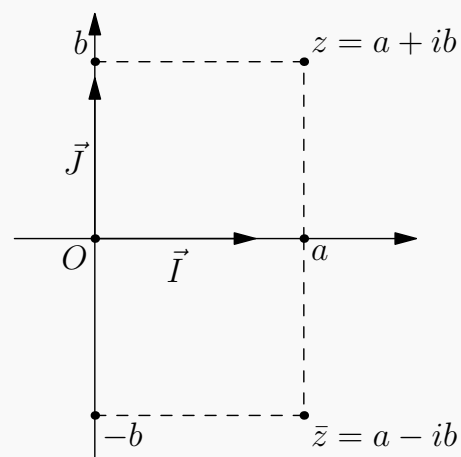
Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *conjugué de z* le nombre complexe noté \bar{z} défini par

$$\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$$

Remarque 9.1.15

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Dans un repère orthonormé du plan, le point d'affixe \bar{z} est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe des abscisses.



Propriété 9.1.16

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{z + \bar{z}}{2} &= \frac{\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)}{2} \\ &= \frac{2\operatorname{Re}(z)}{2} \\ &= \operatorname{Re}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z - \bar{z}}{2i} &= \frac{\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) - (\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z))}{2i} \\ &= \frac{2i\operatorname{Im}(z)}{2i} \\ &= \operatorname{Im}(z) \end{aligned}$$

□

Corollaire 9.1.17

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\iff z = \bar{z} \\ z \in i\mathbb{R} &\iff z = -\bar{z} \end{aligned}$$

Démonstration. C'est immédiat :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0 \iff z - \bar{z} = 0 \iff z = \bar{z} \\ z \in i\mathbb{R} &\iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff \frac{z + \bar{z}}{2} = 0 \iff z + \bar{z} = 0 \iff z = -\bar{z} \end{aligned}$$

□

Propriété 9.1.18

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\bar{\bar{z}} = z$.

Démonstration. C'est immédiat : $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$ donc $\bar{\bar{z}} = \operatorname{Re}(z) - i(-\operatorname{Im}(z)) = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = z$. □

La conjugaison est un outil plutôt sympathique puisque compatible avec la somme, le produit et le quotient, comme le montrent les propriétés suivantes.

Propriété 9.1.19

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\overline{\lambda z + \mu z'} = \lambda \bar{z} + \mu \bar{z'}$$

Démonstration. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\lambda z + \mu z' &= \lambda (\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) + \mu (\operatorname{Re}(z') + i\operatorname{Im}(z')) \\ &= \lambda \operatorname{Re}(z) + \mu \operatorname{Re}(z') + i(\lambda \operatorname{Im}(z) + \mu \operatorname{Im}(z'))\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\overline{\lambda z + \mu z'} &= \lambda \operatorname{Re}(z) + \mu \operatorname{Re}(z') - i(\lambda \operatorname{Im}(z) + \mu \operatorname{Im}(z')) \\ &= \lambda (\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)) + \mu (\operatorname{Re}(z') - i\operatorname{Im}(z')) \\ &= \lambda \bar{z} + \mu \bar{z}'\end{aligned}$$

□

Propriété 9.1.20

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

De plus, si $z' \neq 0$, alors $\bar{z}' \neq 0$ et :

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

Démonstration. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}zz' &= (\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) (\operatorname{Re}(z') + i\operatorname{Im}(z')) \\ &= \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z') + i\operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z') + i\operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}(z') + i^2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(z') \\ &= \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(z') + i(\operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}(z'))\end{aligned}$$

donc

$$\overline{zz'} = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(z') - i(\operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}(z'))$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\bar{z} \times \bar{z}' &= (\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)) (\operatorname{Re}(z') - i\operatorname{Im}(z')) \\ &= \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z') - i\operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z') - i\operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}(z') + i^2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(z') \\ &= \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(z') - i(\operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}(z'))\end{aligned}$$

et on a bien $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.

Supposons maintenant que $z' \neq 0$. Alors $(\operatorname{Re}(z'), \operatorname{Im}(z')) \neq (0, 0)$ donc $(\operatorname{Re}(z'), -\operatorname{Im}(z')) \neq (0, 0)$ et $\bar{z}' \neq 0$. De plus :

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} \times \bar{z}' &= \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \times \bar{z}' \\ &= \bar{z}\end{aligned}$$

donc

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

□

Corollaire 9.1.21

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ (en supposant z non nul si $n < 0$) :

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

— Pour $n = 0$, on a bien $\overline{z^0} = \overline{z^0} = \overline{1} = 1 = \overline{z}^0 = \overline{z}^n$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. Alors :

$$\begin{aligned} \overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n z} \\ &= \overline{z^n} \overline{z} \text{ d'après 9.1.20} \\ &= \overline{z}^n z \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \overline{z}^{n+1} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

De plus, si $z \neq 0$ et $n < 0$, alors :

$$\begin{aligned} \overline{z^n} &= \overline{\frac{1}{z^{-n}}} \\ &= \frac{\overline{1}}{\overline{z^{-n}}} \\ &= \frac{1}{\overline{z}^{-n}} \text{ car } -n \geq 0 \\ &= \overline{z}^n \end{aligned}$$

□

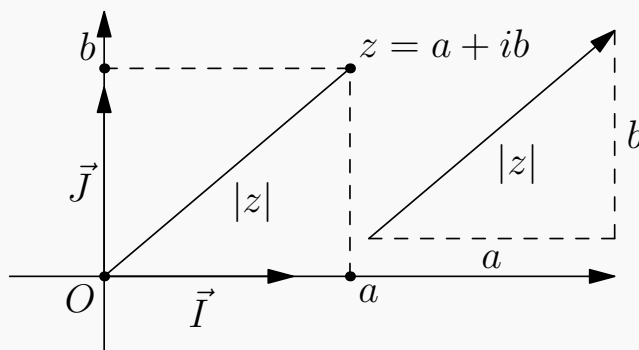
9.1.4 Module d'un nombre complexe**Définition 9.1.22 – Module**

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *module de z* le nombre noté $|z|$ défini par

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

Remarque 9.1.23

D'après le théorème de Pythagore, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z|$ est la longueur du vecteur d'affixe z dans un repère orthonormé. C'est aussi la distance entre l'origine du repère et le point d'affixe z .

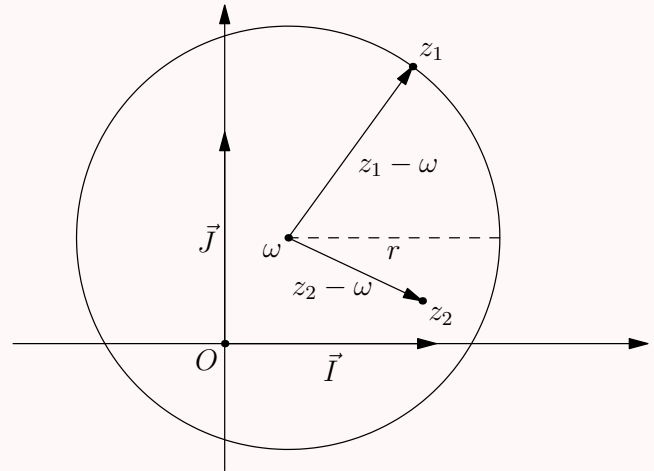


Le module permet une représentation complexe des cercles et disques du plan.

Propriété 9.1.24 – Cercles et disques

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$. On munit le plan d'un repère orthonormé, dans lequel on note Ω l'image de ω .

- Le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points du plans dont l'affixe z vérifie $|z - \omega| = r$.
- Le disque de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points du plans dont l'affixe z vérifie $|z - \omega| \leq r$.



Démonstration. Soit M un point du plan d'affixe z . M est sur le cercle (respectivement le disque) de centre Ω et de rayon r si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ a une longueur égale (respectivement inférieure ou égale) à r , c'est-à-dire si et seulement si $|z - \omega| = r$ (respectivement $|z - \omega| \leq r$). \square

Propriété 9.1.25

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|\bar{z}| = |z|$.

Démonstration. C'est immédiat :

$$\begin{aligned} |\bar{z}| &= |\operatorname{Re}(z) + i(-\operatorname{Im}(z))| \\ &= \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + (-\operatorname{Im}(z))^2} \\ &= \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \\ &= |z| \end{aligned}$$

 \square **Propriété 9.1.26**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|z| = 0 \iff z = 0$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\iff \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = 0 \\ &\iff \operatorname{Re}(z)^2 = \operatorname{Im}(z)^2 = 0 \text{ puisque } \operatorname{Re}(z)^2 \text{ et } \operatorname{Im}(z)^2 \text{ sont positifs} \\ &\iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\iff z = 0 \end{aligned}$$

 \square

Propriété 9.1.27

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z\bar{z} = |z|^2$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Il suffit de développer :

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z))(\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)) \\ &= \operatorname{Re}(z)^2 - i^2 \operatorname{Im}(z)^2 \\ &= \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

□

Il est intéressant de noter que le module est compatible avec le produit.

Corollaire 9.1.28

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$|zz'| = |z| |z'|$$

Démonstration. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= zz' \overline{zz'} \\ &= zz' \bar{z} \bar{z'} \\ &= z\bar{z} z' \bar{z'} \\ &= |z|^2 |z'|^2 \\ &= (|z| |z'|)^2 \end{aligned}$$

donc $|zz'| = |z| |z'|$ puisque ces deux réels sont positifs.

□

Attention !

Le module n'est pas compatible avec l'addition : si z et z' sont deux complexes, il est en général faux de dire que $|z + z'|$ est égal à $|z| + |z'|$.
Toutefois, c'est vrai dans certains cas, que l'*inégalité triangulaire* va préciser.

Théorème 9.1.29 – Inégalité triangulaire

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$||z| - |z'||| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

De plus :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff z\bar{z'} \in \mathbb{R}_+ \iff z' = 0 \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z = \lambda z'$$

Démonstration. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Calculons :

$$\begin{aligned}
 |z + z'|^2 - (|z| + |z'|)^2 &= (z + z') \overline{(z + z')} - (|z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2) \\
 &= (z + z') (\bar{z} + \bar{z}') - |z|^2 - 2|z||z'| - |z'|^2 \\
 &= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' - |z|^2 - 2|z||z'| - |z'|^2 \\
 &= |z|^2 + z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} + |z'|^2 - |z|^2 - 2|z||z'| - |z'|^2 \\
 &= 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') - 2|z\bar{z}'| \\
 &= 2(\operatorname{Re}(z\bar{z}') - |z\bar{z}'|)
 \end{aligned}$$

Notons alors $u = z\bar{z}'$, de sorte que :

$$\begin{aligned}
 |z + z'|^2 - (|z| + |z'|)^2 &= 2(\operatorname{Re}(u) - |u|) \\
 &= 2\left(\operatorname{Re}(u) - \sqrt{\operatorname{Re}(u)^2 + \operatorname{Im}(u)^2}\right)
 \end{aligned}$$

Or, puisque $\operatorname{Im}(u)^2 \geq 0$, on a $\sqrt{\operatorname{Re}(u)^2 + \operatorname{Im}(u)^2} \geq \sqrt{\operatorname{Re}(u)^2} = |\operatorname{Re}(u)| \geq \operatorname{Re}(u)$ donc $2\left(\operatorname{Re}(u) - \sqrt{\operatorname{Re}(u)^2 + \operatorname{Im}(u)^2}\right) \leq 0$.

On en déduit que $|z + z'|^2 - (|z| + |z'|)^2 \leq 0$, c'est-à-dire que

$$|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$$

et, puisque $|z + z'| \geq 0$ et $|z| + |z'| \geq 0$:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Traitons tout de suite le cas d'égalité. D'après les calculs précédents, et de nouveau, puisque $|z + z'| \geq 0$ et $|z| + |z'| \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 |z + z'| = |z| + |z'| &\iff |z + z'|^2 = (|z| + |z'|)^2 \\
 &\iff |z + z'|^2 - (|z| + |z'|)^2 = 0 \\
 &\iff 2\left(\operatorname{Re}(u) - \sqrt{\operatorname{Re}(u)^2 + \operatorname{Im}(u)^2}\right) = 0 \\
 &\iff \operatorname{Re}(u) = \sqrt{\operatorname{Re}(u)^2 + \operatorname{Im}(u)^2} \\
 &\iff \operatorname{Re}(u) \geq 0 \text{ et } \operatorname{Re}(u)^2 + \operatorname{Im}(u)^2 = \operatorname{Re}(u)^2 \\
 &\iff \operatorname{Re}(u) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(u) = 0 \\
 &\iff u \in \mathbb{R}_+ \\
 &\iff z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à montrer, dans l'énoncé, l'inégalité de gauche. Reformulons-la :

$$\begin{aligned}
 ||z| - |z'||| \leq |z + z'| &\iff -|z + z'| \leq |z| - |z'| \leq |z + z'| \\
 &\iff |z'| - |z + z'| \leq |z| \leq |z'| + |z + z'|
 \end{aligned}$$

Or, d'une part :

$$\begin{aligned}
 |z| &= |z + z' - z'| \\
 &\leq |z + z'| + |-z'| \\
 &= |z + z'| + |z'|
 \end{aligned}$$

et d'autre part

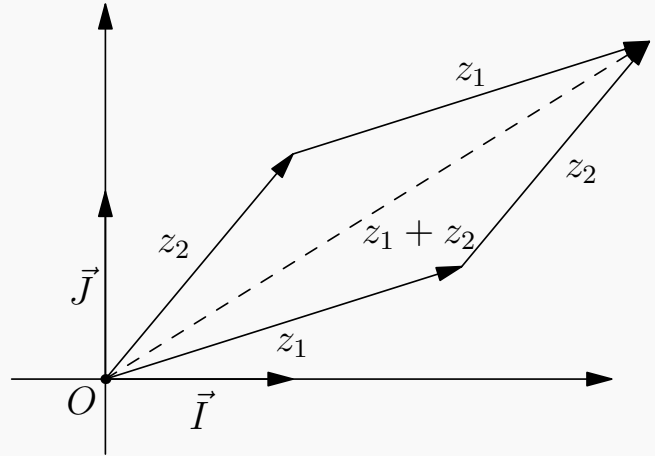
$$\begin{aligned} |z'| &= |z' + z - z| \\ &\leq |z' + z| + |-z| \\ &= |z + z'| + |z| \end{aligned}$$

donc $|z'| - |z + z'| \leq |z|$.

On a donc bien $||z| - |z'||| \leq |z + z'|$. □

Remarque 9.1.30 : Illustration

On muni le plan d'un repère orthonormé (O, \vec{I}, \vec{J}) .
L'inégalité triangulaire, du moins l'inégalité de droite, exprime le fait que le chemin le plus court pour relier O et le point d'affixe $z + z'$ est... d'aller tout droit.



Remarque 9.1.31 : Cas d'égalité

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Si $z' = 0$, alors $z\bar{z}' = 0 \in \mathbb{R}_+$. Supposons alors que $z' \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+ &\iff \exists t \in \mathbb{R}_+, z\bar{z}' = t \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}_+, z\bar{z}'z' = tz' \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}_+, z|z'|^2 = tz' \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}_+, z = \frac{t}{|z'|^2}z' \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z = \lambda z' \text{ en posant } \lambda = \frac{t}{|z'|^2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+ \iff z' = 0 \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z = \lambda z'$$

Autrement dit, dans un repère orthonormé (O, \vec{I}, \vec{J}) du plan, $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z' = 0$ ou le point d'affixe z' est sur la demi-droite $[O, M_z)$, M_z étant le point d'affixe z .

Propriété 9.1.32 – Inégalité triangulaire pour une somme finie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Démonstration. Cela se montre par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la proposition \mathcal{P}_n : « Pour tout $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ ».

— Pour $n = 1$, c'est évident : soit $z_1 \in \mathbb{C}$, alors $\left| \sum_{k=1}^1 z_k \right| = |z_1| = \sum_{k=1}^1 |z_k|$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons \mathcal{P}_n vraie. Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie. Soit $(z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Alors :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \text{ d'après 9.1.29} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |z_k| + |z_{n+1}| \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. □

Remarque 9.1.33

Le cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire généralisée est traité dans l'exercice 9.5.9.

9.1.5 Formulaire

L'addition et la multiplication sur \mathbb{C} se comportant comme ces mêmes opérations sur \mathbb{R} , les propriétés suivantes se prolongent à \mathbb{C} . Les preuves sont exactement les mêmes que celles déjà vues sur \mathbb{R} .

Propriété 9.1.34

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & \text{si } z \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Propriété 9.1.35

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Exercice 9.1.36

Trouver les nombres complexes z tels que $z^3 - \bar{z}^3 = 0$.

Correction. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
 z^3 - \bar{z}^3 = 0 &\iff (z - \bar{z})(z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2) = 0 \\
 &\iff (z - \bar{z})((z + \bar{z})^2 - z\bar{z}) = 0 \\
 &\iff (z - \bar{z})((2\operatorname{Re}(z))^2 - |z|^2) = 0 \\
 &\iff z = \bar{z} \text{ ou } (2\operatorname{Re}(z))^2 = |z|^2 \\
 &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } (2\operatorname{Re}(z))^2 = |z|^2
 \end{aligned}$$

Or, en notant $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 (2\operatorname{Re}(z))^2 = |z|^2 &\iff 4a^2 = a^2 + b^2 \\
 &\iff 3a^2 - b^2 = 0 \\
 &\iff (\sqrt{3}a - b)(\sqrt{3}a + b) = 0 \\
 &\iff b = \sqrt{3}a \text{ ou } b = -\sqrt{3}a
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $z^3 - \bar{z}^3 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, est donc :

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{R} \cup \left\{ a + \sqrt{3}ai, a \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ a - \sqrt{3}ai, a \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \mathbb{R} \cup \left\{ a(1 + \sqrt{3}i), a \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ a(1 - \sqrt{3}i), a \in \mathbb{R} \right\}
 \end{aligned}$$

Propriété 9.1.37 – Formule du binôme de Newton

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 9.1.38

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z_n = (1 + i)^{4n}$.

Correction. On a

$$(1 + i)^4 = \binom{4}{0} i^0 1^{4-0} + \binom{4}{1} i^1 1^{4-1} + \binom{4}{2} i^2 1^{4-2} + \binom{4}{3} i^3 1^{4-3} + \binom{4}{4} i^4 1^{4-4}$$

ou encore

$$(1 + i)^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + i)^{4n} = \left((1 + i)^4 \right)^n = (-4)^n$$

Ainsi

$$\operatorname{Re} \left((1 + i)^{4n} \right) = (-4)^n \text{ et } \operatorname{Im} \left((1 + i)^{4n} \right) = 0$$

On peut cependant aller plus loin. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
 (1+i)^{4n} &= \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} i^k 1^{4n-k} \\
 &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{4n} \binom{4n}{k} i^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{4n} \binom{4n}{k} i^k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} i^{2k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} (i^2)^k + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} i \times (i^2)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} (-1)^k + i \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} \times (-1)^k
 \end{aligned}$$

ainsi

$$\operatorname{Re}((1+i)^{4n}) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} (-1)^k \text{ et } \operatorname{Im}((1+i)^{4n}) = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} \times (-1)^k$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires, on obtient les formules suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} (-1)^k = (-4)^n \text{ et } \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} \times (-1)^k = 0$$

9.2 Nombres complexes, trigonométrie et exponentielle

9.2.1 Le retour du cercle trigonométrique

Dans cette section, on munit le plan d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Définition 9.2.1 – Cercle trigonométrique, version complexe

On note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1. Autrement dit,

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

Remarque 9.2.2

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
 |z| = 1 &\iff |z - 0| = 1 \\
 &\iff \text{l'image de } z \text{ est sur le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1
 \end{aligned}$$

\mathbb{U} est donc l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique.

Nous avons vu que, pour tout réel t , le point M du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure t a pour coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$, et a donc pour affixe $\cos(t) + i \sin(t)$. Cela nous invite à créer une nouvelle fonction : l'exponentielle complexe.

9.2.2 Exponentielle complexe

Définition 9.2.3 – Exponentielle complexe

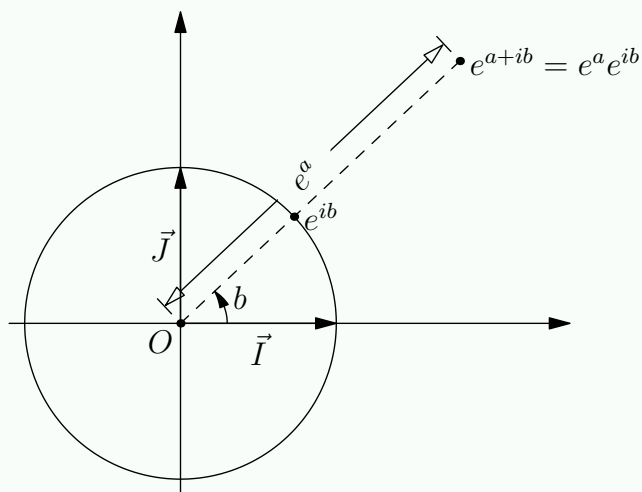
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on appelle *exponentielle de it* le nombre complexe noté e^{it} défini par

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle *exponentielle de z* le nombre complexe noté e^z défini par

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$$

En particulier, si a et b sont deux réels, on peut représenter e^{a+ib} de la façon suivante :



Exemple 9.2.4

En particulier :

$$e^{i \times 0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1 = e^0$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1$$

Remarque 9.2.5

Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{R}$, autrement dit si $\operatorname{Im}(z) = 0$, alors $z = \operatorname{Re}(z)$ et :

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)} &= e^z e^0 \\ &= e^z \end{aligned}$$

où cette dernière exponentielle est l'exponentielle sur \mathbb{R} . L'exponentielle complexe est donc un prolongement de l'exponentielle réelle.

Bien sûr, le nom de cette fonction n'a pas été choisi au hasard : même si cela ne saute pas immédiatement aux yeux, elle va nous permettre d'étendre l'exponentielle que nous connaissons déjà sur \mathbb{R} à \mathbb{C} tout entier, en préservant les propriétés algébriques.

Propriété 9.2.6

— Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

— Pour tout $z \in \mathbb{C}$, e^z est non nul et

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

— Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$

— Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$(e^z)^n = e^{nz}$$

— Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{e^{it}} = e^{-it} = \frac{1}{e^{it}}$$

— Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$$

Démonstration. — Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et notons $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$, $a' = \operatorname{Re}(z')$ et $b' = \operatorname{Im}(z')$. Alors :

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= e^a e^{ib} e^{a'} e^{ib'} \\ &= e^a e^{a'} e^{ib} e^{ib'} \text{ par commutativité} \\ &= e^{a+a'} e^{ib} e^{ib'} \text{ par propriété de l'exponentielle réelle} \\ &= e^{a+a'} (\cos(b) + i \sin(b)) (\cos(b') + i \sin(b')) \\ &= e^{a+a'} (\cos(b) \cos(b') + i \cos(b) \sin(b') + i \sin(b) \cos(b') + i^2 \sin(b) \sin(b')) \\ &= e^{a+a'} (\cos(b) \cos(b') - \sin(b) \sin(b') + i (\cos(b) \sin(b') + \sin(b) \cos(b'))) \\ &= e^{a+a'} (\cos(b+b') + i \sin(b+b')) \\ &= e^{a+a'} e^{i(b+b')} \\ &= e^{\operatorname{Re}(z+z')} e^{i \operatorname{Im}(z+z')} \\ &= e^{z+z'} \end{aligned}$$

— Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$ donc e^z admet e^{-z} pour inverse. Autrement dit, e^z est non nul et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

— Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} e^{z-z'} &= e^{z+(-z')} \\ &= e^z e^{-z'} \\ &= e^z \frac{1}{e^{z'}} \\ &= \frac{e^z}{e^{z'}} \end{aligned}$$

— Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, (e^z)^n = e^{nz}$.

— Pour $n = 0$, c'est évident : $e^{0 \times z} = e^0 = 1 = (e^z)^0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(e^z)^n = e^{nz}$. Alors :

$$\begin{aligned} (e^z)^{n+1} &= (e^z)^n e^z \\ &= e^{nz} e^z \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= e^{nz+z} \\ &= e^{(n+1)z} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Soit maintenant $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Alors $-n \in \mathbb{N}$ donc d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}(e^z)^n &= \frac{1}{(e^z)^{-n}} \\ &= \frac{1}{e^{-nz}} \\ &= e^{nz}\end{aligned}$$

— Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\overline{e^{it}} &= \overline{\cos(t) + i \sin(t)} \\ &= \cos(t) - i \sin(t) \\ &= \cos(-t) + i \sin(-t) \\ &= e^{-it} \\ &= \frac{1}{e^{it}}\end{aligned}$$

— Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}e^{\bar{z}} &= e^{\operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)} \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)} e^{-i \operatorname{Im}(z)} \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)} \overline{e^{i \operatorname{Im}(z)}} \\ &= \overline{e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}} \text{ puisque } e^{\operatorname{Re}(z)} \in \mathbb{R} \\ &= \overline{e^z}\end{aligned}$$

□

9.2.3 Nombres complexes et trigonométrie

Le cercle trigonométrique

Propriété 9.2.7

— Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|e^{it}| = 1$.

— Pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$e^{it} = e^{it'} \iff t \equiv t' [2\pi]$$

— Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$e^z = e^{z'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z - z' = 2ik\pi \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

en notant $2i\pi\mathbb{Z} = \{2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration. — Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}|e^{it}| &= |\cos(t) + i \sin(t)| \\ &= \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \\ &= \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

— Soit $(t, t') \in \mathbb{R}^2$. Par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un nombre complexe :

$$\begin{aligned} e^{it} = e^{it'} &\iff \cos(t) + i \sin(t) = \cos(t') + i \sin(t') \\ &\iff \begin{cases} \cos(t) = \cos(t') \\ \sin(t) = \sin(t') \end{cases} \\ &\iff t \equiv t' [2\pi] \end{aligned}$$

— Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Notons $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$, $a' = \operatorname{Re}(z')$ et $b' = \operatorname{Im}(z')$.

— Supposons que $e^z = e^{z'}$. Alors $|e^z| = |e^{z'}|$ donc $|e^a e^{ib}| = |e^{a'} e^{ib'}|$ ou encore $|e^a| |e^{ib}| = |e^{a'}| |e^{ib'}|$. Or e^a et $e^{a'}$ sont des réels positifs et $|e^{ib}| = |e^{ib'}| = 1$: l'égalité précédente donne donc $e^a = e^{a'}$ et, par injectivité de l'exponentielle sur \mathbb{R} , on en déduit que $a = a'$.

Or, $e^z = e^{z'}$ ainsi $e^a e^{ib} = e^{a'} e^{ib'}$. On a donc $e^a e^{ib} e^{-a'} = e^{a'} e^{ib'} e^{-a'}$ puis $e^{a-a'} e^{ib} = e^{ib'}$. Cependant, $a = a'$ donc $e^{a-a'} = 1$ puis $e^{ib} = e^{ib'}$ et finalement $b \equiv b' [2\pi]$.

En ayant supposé que $e^z = e^{z'}$, on a montré que $a = a'$ et $b \equiv b' [2\pi]$. En particulier, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = b' + 2k\pi$. Ainsi :

$$\begin{aligned} z - z' &= a + ib - (a' + ib') \\ &= a - a' + i(b - b') \\ &= i(b - b') \\ &= 2ik\pi \in 2i\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

— Réciproquement, supposons que $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z - z' = 2ik\pi$, ou encore tel que $z = z' + 2ik\pi$. On a alors :

$$\begin{aligned} e^z &= e^{z' + 2ik\pi} \\ &= e^{z'} e^{2ik\pi} \\ &= e^{z'} (e^{2i\pi})^k \\ &= e^{z'} 1^k \\ &= e^{z'} \end{aligned}$$

Finalement, on a bien :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

□

Propriété 9.2.8 – Paramétrisation de \mathbb{U}

L'application

$$\begin{array}{ccc} \psi & : &]-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{U} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. Notons $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$,

$$\begin{array}{ccc} f & : &]-\pi; \pi] \rightarrow \Gamma \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} g &: \Gamma \rightarrow \mathbb{U} \\ (a, b) &\mapsto a + ib \end{aligned}$$

On sait déjà que f est une bijection. De plus, pour tout $(a, b) \in \Gamma$, on a $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1} = 1$ donc $g(a, b) \in \mathbb{U}$ et g est bien définie. Enfin, g est bijective : pour tout $z \in \mathbb{U}$, $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ est l'unique l'antécédent de z par g . Enfin, pour tout $t \in]-\pi; \pi]$, on a

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t) = g(\cos(t), \sin(t)) = g(f(t))$$

donc $\psi = g \circ f$ est une bijection en tant que composée de bijections. \square

Propriété 9.2.9

Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et tout $(r', \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $(r', \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- Supposons que $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$. En particulier, $|re^{i\theta}| = |r'e^{i\theta'}|$ ou encore $|r||e^{i\theta}| = |r'||e^{i\theta'}|$. Comme $|e^{i\theta}| = |e^{i\theta'}| = 1$, on obtient alors $|r| = |r'|$ ce qui donne $r = r'$ puisque r et r' sont positifs. L'égalité de départ devient donc $re^{i\theta} = re^{i\theta'}$, et puisque $r \neq 0$, on obtient $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$: ainsi $\theta \equiv \theta' [2\pi]$.
- La réciproque est évidente. \square

Formules d'Euler, formule de Moivre et applications en trigonométrie

Les nombres complexes sont très pratiques pour résoudre des problèmes trigonométriques. Voici deux résultats fondamentaux.

Théorème 9.2.10 – Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a, par parité de \cos et imparité de \sin :

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta) \end{cases}$$

donc $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta)$. Il ne reste plus qu'à diviser respectivement par 2 et $2i$. \square

Exemple 9.2.11 – Linéarisation

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \cos(t)^3 &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{8} (e^{it} + e^{-it})^3 \\
 &= \frac{1}{8} \left(e^{3it} + \binom{3}{1} e^{2it} e^{-it} + \binom{3}{2} e^{it} e^{-2it} + e^{-3it} \right) \text{ d'après la formule du binôme} \\
 &= \frac{1}{8} (e^{3it} + e^{-3it} + 3(e^{it} + e^{-it})) \\
 &= \frac{1}{8} (2\cos(3t) + 6\cos(t)) \\
 &= \frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos(t)
 \end{aligned}$$

C'est très utile, par exemple lors de la recherche de primitives : la fonction $t \mapsto (\cos(t))^3$ a pour primitive $t \mapsto \frac{1}{12} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin(t)$.

Méthode 9.2.12 : Technique de l'angle moitié

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si l'on cherche à factoriser une expression de la forme $e^{iat} \pm e^{ibt}$, on peut utiliser la *technique de l'angle moitié*, qui consiste à factoriser par $e^{i\frac{a+b}{2}t}$. De cette façon :

$$\begin{aligned}
 e^{iat} \pm e^{ibt} &= e^{i\frac{a+b}{2}t} \left(e^{i\frac{a-b}{2}t} \pm e^{i\frac{b-a}{2}t} \right) \\
 &= e^{i\frac{a+b}{2}t} \left(e^{i\frac{a-b}{2}t} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}t} \right)
 \end{aligned}$$

et les formules d'Euler permettent alors de faire apparaître $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ou $\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Exemple 9.2.13

Avec la technique de l'angle moitié, on peut retrouver des formules de trigonométrie déjà vues. Par exemple, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 e^{ia} - e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) \\
 &= e^{i\frac{a+b}{2}} 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
 &= 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + i \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \\
 &= -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)
 \end{aligned}$$

En particulier, on retrouve les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(a) - \cos(b) &= \operatorname{Re}(e^{ia} - e^{ib}) \\ &= -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(a) - \sin(b) &= \operatorname{Im}(e^{ia} - e^{ib}) \\ &= 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

Théorème 9.2.14 – Formule de Moivre

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos(t) + i \sin(t))^n = \cos(nt) + i \sin(nt)$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}(\cos(t) + i \sin(t))^n &= (e^{it})^n \\ &= e^{int} \\ &= \cos(nt) + i \sin(nt)\end{aligned}$$

□

Exercice 9.2.15

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Calculer simultanément $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Correction. On a :

$$\begin{aligned}C_n + iS_n &= \sum_{k=0}^n \cos(kt) + i \sum_{k=0}^n \sin(kt) \\ &= \sum_{k=0}^n (\cos(kt) + i \sin(kt)) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{ikt} \\ &= \sum_{k=0}^n (e^{it})^k\end{aligned}$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

— Si $t \equiv 0[2\pi]$, alors $e^{it} = 1$ et $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n 1 = (n+1)$. En particulier, $C_n = n+1$ et $S_n = 0$.

— Sinon, $e^{it} \neq 1$ et par somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} C_n + iS_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)t}{2}} e^{-i\frac{(n+1)t}{2}} - e^{i\frac{(n+1)t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}} e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} \\ &= e^{i\frac{nt}{2}} \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} C_n &= \operatorname{Re}(C_n + iS_n) = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) = \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ S_n &= \operatorname{Im}(C_n + iS_n) = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) = \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

Écriture trigonométrique

Définition 9.2.16 – Écriture trigonométrique

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique couple $(r, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi; \pi]$ tel que $z = re^{i\alpha}$. On a alors $r = |z|$, et α est appelé *argument principal* de z et est noté $\arg(z)$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$re^{i\theta} = re^{i\alpha} \iff \theta \equiv \alpha [2\pi]$$

Dans ce cas, on a également $z = re^{i\theta}$: une telle écriture est appelé *écriture trigonométrique* de z , et θ est un *argument* de z .

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Existence : Remarquons que $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$ donc $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. D'après la propriété 9.2.8, il existe un $\alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\alpha}$. On a donc $z = |z|e^{i\alpha}$, ce qui prouve l'existence de l'écriture trigonométrique de z puisque $|z| \in \mathbb{R}_+^*$.

Unicité : Soit $(r, \alpha') \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi; \pi]$ tel que $z = re^{i\alpha'}$. On sait déjà que $z = |z|e^{i\alpha}$: d'après 9.2.9, et puisque $|z| > 0$, on a donc $r = |z|$ et $\alpha' \equiv \alpha [2\pi]$. Puisque α et α' sont dans $]-\pi; \pi]$, cela implique que $\alpha = \alpha'$. \square

Remarque 9.2.17

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. L'argument principal de z est l'unique argument de z compris dans $]-\pi; \pi]$.

Exemple 9.2.18

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} e^z &= e^{\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)} \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)} \end{aligned}$$

Puisque $e^{\operatorname{Re}(z)}$ est un réel strictement positif, $e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$ est une écriture trigonométrique de e^z . En particulier, $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ et $\operatorname{Im}(z)$ est un argument de e^z .

Propriété 9.2.19

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, d'argument θ .

- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\theta \equiv 0[\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\iff |z| e^{i\theta} \in \mathbb{R} \\ &\iff |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \in \mathbb{R} \\ &\iff \sin(\theta) = 0 \text{ puisque } z \neq 0 \\ &\iff \theta \equiv 0[\pi] \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} z \in i\mathbb{R} &\iff \cos(\theta) = 0 \\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{aligned}$$

□

Méthode 9.2.20 : Déterminer une écriture trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour déterminer une écriture trigonométrique, on peut :

1. Calculer $|z|$.
2. Factoriser z par $|z|$: on obtient une égalité de la forme $z = |z| (a + ib)$.
3. Chercher $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a + ib = e^{i\theta}$. Ce réel existe puisque $|a + ib| = \left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$.

On obtient alors $z = r^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.2.21

Soit $z = \sqrt{3} + i$. Déterminer une écriture trigonométrique de z .

Correction. On a

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{3 + 1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} z &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Une écriture trigonométrique de z est donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Propriété 9.2.22 – Propriétés algébriques des arguments

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$:

$$\begin{aligned} \arg(\bar{z}) &\equiv -\arg(z) [2\pi] \\ \arg(zz') &\equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi] \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi] \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$.

Notons $\alpha = \arg(z)$. Alors $z = re^{i\alpha}$, avec $r = |z|$, et :

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{re^{i\alpha}} \\ &= r\overline{e^{i\alpha}} \\ &= re^{-i\alpha} \end{aligned}$$

Puisque $r > 0$, $-\alpha$ est un argument de \bar{z} , ainsi $\arg(\bar{z}) \equiv -\alpha [2\pi]$ ou encore $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$.

Notons ensuite $\alpha' = \arg(z')$ et $r' = |z'|$. On a :

$$\begin{aligned} zz' &= re^{i\alpha} r' e^{i\alpha'} \\ &= rr' e^{i\alpha+i\alpha'} \\ &= rr' e^{i(\alpha+\alpha')} \end{aligned}$$

Puisque $rr' > 0$, $\alpha + \alpha'$ est un argument de zz' , ainsi $\arg(zz') \equiv \alpha + \alpha' [2\pi]$ ou encore $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$.

Enfin :

$$\begin{aligned} \frac{z}{z'} &= \frac{re^{i\alpha}}{r'e^{i\alpha'}} \\ &= \frac{r}{r'} e^{i\alpha-i\alpha'} \\ &= \frac{r}{r'} e^{i(\alpha-\alpha')} \end{aligned}$$

Puisque $\frac{r}{r'} > 0$, $\alpha - \alpha'$ est un argument de $\frac{z}{z'}$: on a donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \alpha - \alpha' [2\pi]$ ou encore $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$. \square

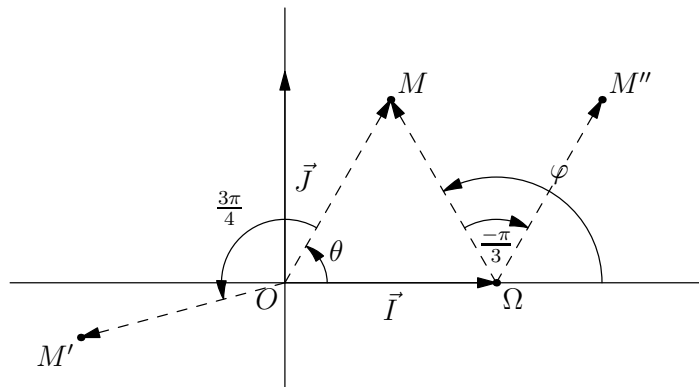
Exercice 9.2.23

On se place dans un repère orthonormé (O, \vec{I}, \vec{J}) du plan.

Soit $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et M l'image de z .

1. Déterminer les coordonnées du point M' obtenu en appliquant une rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ à M .
2. Déterminer les coordonnées du point M'' obtenu en appliquant une rotation de centre Ω , de coordonnées $(1, 0)$, et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ à M .

Correction. On peut tracer la figure suivante :



Notons z' et z'' les affixes respectives de M' et M'' . Soit θ un argument de z , de sorte que $z = |z|e^{i\theta}$. Les longueurs OM et OM' sont identiques, ainsi $|z'| = |z|$. De plus, par rotation, $\theta + \frac{3\pi}{4}$ est un argument de z' . On a donc :

$$\begin{aligned}
 z' &= |z'| e^{i(\theta + \frac{3\pi}{4})} \\
 &= |z| e^{i\theta} e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
 &= z e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
 &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= \frac{-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\
 &= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}
 \end{aligned}$$

M' a donc pour coordonnées $\left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \right)$ dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) .

Pour M'' , concentrons sur les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M''}$, d'affixes respectives $z - \omega$ et $z'' - \omega$ où $\omega = 1$. Soit φ un argument

de $z - \omega : z'' - \omega$ a alors pour argument $\varphi - \frac{\pi}{3}$ et a même module que $z - \omega$, ainsi :

$$\begin{aligned} z'' - \omega &= |z - \omega| e^{i(\varphi - \frac{\pi}{3})} \\ &= |z - \omega| e^{i\varphi} e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= (z - \omega) e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &= -\left(\frac{1}{4} - 2i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

et finalement

$$z'' = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \omega = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

M'' a donc pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) .

Propriété 9.2.24 – Factorisation de $a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = A \cos(\theta - \varphi)$$

où $A = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ est un argument de $a + ib$ ($Ae^{i\varphi}$ est donc une écriture trigonométrique de $a + ib$).

Remarque 9.2.25

Plus que le résultat, il est intéressant de retenir la méthode permettant de l'obtenir.

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et soit φ un argument de $a + ib$, de sorte que $a + ib = Ae^{i\varphi}$ avec $A = |a + ib|$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ et que

$$-ie^{i\theta} = -i(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = -i\cos(\theta) + \sin(\theta)$$

donc $\sin(\theta) = \operatorname{Re}(-ie^{i\theta})$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 a \cos(\theta) + b \sin(\theta) &= a \operatorname{Re}(e^{i\theta}) + b \operatorname{Re}(-ie^{i\theta}) \\
 &= \operatorname{Re}(ae^{i\theta} - ibe^{i\theta}) \\
 &= \operatorname{Re}((a - ib)e^{i\theta}) \\
 &= \operatorname{Re}(\overline{a + ib} \times e^{i\theta}) \\
 &= \operatorname{Re}(\overline{Ae^{i\varphi}} e^{i\theta}) \\
 &= \operatorname{Re}(Ae^{-i\varphi} e^{i\theta}) \\
 &= A \operatorname{Re}(e^{i(\theta - \varphi)}) \\
 &= A \cos(\theta - \varphi)
 \end{aligned}$$

□

Exercice 9.2.26

Résoudre l'équation

$$\sqrt{3} \cos(t) + \sin(t) = 0$$

d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

Correction. Commençons par chercher l'écriture trigonométrique de $\sqrt{3} + i$. D'une part, $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, et d'autre part :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} + i &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\
 &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel t , on a :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} \cos(t) + \sin(t) = 0 &\iff 2 \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, t = \frac{2\pi}{3} + k\pi
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

9.3 Equations algébriques

9.3.1 Nombres complexes et polynômes

Un chapitre entier sera consacré aux polynômes, mais voici quelques résultats essentiels d'ores et déjà accessibles à propos des fonctions polynomiales. Dans cette partie, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Théorème 9.3.1 – Principe d'identification

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Alors :

$$\begin{aligned} &(\forall z \in \mathbb{K}, a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n) \\ \iff &(a_0, a_1, \dots, a_n) = (b_0, b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

Démonstration. Le sens réciproque étant évident, occupons-nous du sens direct. Supposons que

$$\forall z \in \mathbb{K}, a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n$$

Pour tout $z \in \mathbb{K}$, notons $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ et $Q(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n = \sum_{k=0}^n b_k z^k$. On a donc, pour tout $z \in \mathbb{K}$, $P(z) = Q(z)$.

Supposons que $(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (b_0, b_1, \dots, b_n)$ et notons n_0 le plus petit entier de $\llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Pour tout $z \in \mathbb{K}$, on a donc :

$$\begin{aligned} P(z) - Q(z) &= \sum_{k=n_0}^n a_k z^k - \sum_{k=n_0}^n b_k z^k \\ &= \sum_{k=n_0}^n (a_k - b_k) z^k \end{aligned}$$

Pour tout $z \in \mathbb{K}$ non nul, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{P(z) - Q(z)}{z^{n_0}} &= \frac{\sum_{k=n_0}^n (a_k - b_k) z^k}{z^{n_0}} \\ &= \sum_{k=n_0}^n (a_k - b_k) z^{k-n_0} \\ &= \sum_{k=0}^{n-n_0} (a_{k+n_0} - b_{k+n_0}) z^k \text{ par changement d'indice} \end{aligned}$$

Cependant, pour tout $z \in \mathbb{K}$, on a $P(z) = Q(z)$ donc $P(z) - Q(z) = 0$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R}$ non nul :

$$0 = \sum_{k=0}^{n-n_0} (a_{k+n_0} - b_{k+n_0}) z^k \xrightarrow{z \rightarrow 0} a_{n_0} - b_{n_0}$$

On en déduit que $a_{n_0} - b_{n_0} = 0$, donc que $a_{n_0} = b_{n_0}$ ce qui contredit la définition de n_0 .

On a donc montré, par l'absurde, que $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$. □

Définition 9.3.2 – Fonction polynomiale

On appelle *fonction polynomiale à coefficients dans \mathbb{K}* , toute fonction, définie sur \mathbb{K} , de la forme

$$P : z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Le *degré* de P , noté $\deg(P)$ est le plus grand entier $d \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $a_d \neq 0$, si cet entier existe, ou bien $-\infty$ si P est la fonction nulle.

Exemple 9.3.3

$z \mapsto 1 - z + z^2$ est une fonction polynomiale à coefficients réels de degré 2. $z \mapsto \sqrt{2}z^{12} - (3 - 2i)z^{34} + 3iz^2$ est une fonction polynomiale de degré 34.

Définition 9.3.4 – Racine d'un polynôme

Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans \mathbb{K} . et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une *racine* de P si $P(\alpha) = 0$.

Propriété 9.3.5

La somme et le produit de fonctions polynomiales à coefficients dans \mathbb{K} est encore une fonction polynomiale à coefficients dans \mathbb{K} .

De plus, pour toutes fonctions polynomiales non nulles P et Q à coefficients dans \mathbb{K} :

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \text{ et } \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Théorème 9.3.6

Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans \mathbb{K} et $\alpha \in \mathbb{K}$. On suppose que α est racine de P . Alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans \mathbb{K} telle que

$$\forall z \in \mathbb{K}, P(z) = (z - \alpha)Q(z)$$

De plus, si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Démonstration. Ce résultat sera prouvé dans le chapitre sur les polynômes. □

Corollaire 9.3.7 – Nombre de racines d'un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P une fonction polynomiale non nulle à coefficients dans \mathbb{K} . On suppose que $\deg(P) = n$. Alors P admet au maximum n racines.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n : "pour tout fonction polynomiale non nulle P à coefficients dans \mathbb{K} de degré n , P admet au maximum n racines". Raisonnons par récurrence sur n .

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et P une fonction polynomiale non nulle, à coefficients dans \mathbb{K} et de degré n . P est donc une fonction constante non nulle et n'a aucune racine. P_0 est donc vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie. Soit P une fonction polynomiale non nulle, à coefficients dans \mathbb{K} et de degré $n + 1$. Si P n'a aucune racine, alors il ne reste rien à prouver. Supposons que P admette au moins une racine et soit α une racine de P . D'après le théorème 9.3.6, il existe une fonction polynomiale Q , à coefficients dans \mathbb{K} , de degré n tel que pour tout $z \in \mathbb{K}$, $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$. Par hypothèse de récurrence, Q admet au plus n racines, qui

sont, avec α , les racines de P . P admet donc au plus $n + 1$ racines, ce qui achève la récurrence. □

Remarque 9.3.8 : Les racines du polynôme nul

La fonction nulle est donc la seule fonction polynomiale à avoir une infinité de racines.

9.3.2 Racines de l'unité

Définition 9.3.9 – Racine n -ième de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *racine n -ième de l'unité* tout complexe z tel que $z^n = 1$.
L'ensemble des racines n -ième de l'unité est noté \mathbb{U}_n .

Propriété 9.3.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe exactement n racines n -ièmes de l'unité et :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors $z^n = 0 \neq 1$. Supposons donc que $z \neq 0$, et soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta}$. Alors :

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff (re^{i\theta})^n = 1 \\ &\iff r^n e^{in\theta} = 1 \times e^{i \times 0} \\ &\iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \text{ car } r > 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Cependant, \mathbb{U}_n est aussi l'ensemble des racines complexes de la fonction polynomiale $z \mapsto z^n - 1$, qui est de degré n : on en déduit que \mathbb{U}_n contient au maximum n éléments.

Montrons alors que les complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, sont deux-à-deux distincts. Si tel est le cas, ces complexes seront les n racines n -ièmes de l'unité.

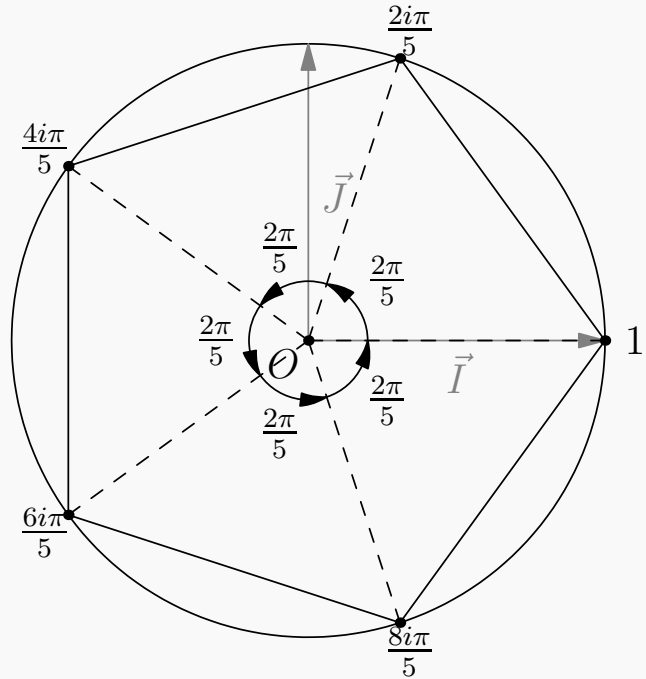
Soit $(k, k') \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2$ avec $k \neq k'$. Alors :

$$\begin{aligned} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}} &\iff \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} [2\pi] \\ &\iff \exists q \in \mathbb{Z}, \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2q\pi \\ &\iff \exists q \in \mathbb{Z}, k = k' + qn \\ &\iff \exists q \in \mathbb{Z}, k - k' = qn \\ &\iff k - k' \text{ est un multiple de } n \end{aligned}$$

Or, $0 \leq k < n$ et $-n < -k' \leq 0$ donc $-n < k - k' < n$: le seul multiple de n strictement compris entre $-n$ et n étant 0, on en déduit que $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$ si et seulement si $k - k' = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $k = k'$.
 Finalement, les complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, sont bien deux-à-deux distincts et sont les n racines n -ième de l'unité.
 On a donc également $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$. \square

Remarque 9.3.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans un repère orthonormé (O, \vec{I}, \vec{J}) , les éléments de \mathbb{U}_n sont les affixes des sommets du polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique, et dont l'un des sommets est le point de coordonnées $(1, 0)$.

**Propriété 9.3.12 – Résolution de $z^n = c$**

Soit $c \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note α un argument de c .

Alors l'équation $z^n = c$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, admet exactement n solutions et a pour ensemble de solutions

$$\left\{ |c|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$, alors $z^n = 0 \neq c$: on peut donc supposer que $z \neq 0$ sans perte de généralité.
 α étant un argument de c , on a $c = |c| e^{i\alpha}$. On peut se ramener aux racines n -ième de l'unité :

$$\begin{aligned}
z^n = c &\iff z^n = |c| e^{i\alpha} \\
&\iff \frac{z^n}{|c|} e^{-i\alpha} = 1 \\
&\iff \left(\frac{z}{|c|^{\frac{1}{n}}} e^{-\frac{i\alpha}{n}} \right)^n = 1 \\
&\iff \frac{z}{|c|^{\frac{1}{n}}} e^{-\frac{i\alpha}{n}} \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \exists \omega \in \mathbb{U}_n, \frac{z}{|c|^{\frac{1}{n}}} e^{-\frac{i\alpha}{n}} = \omega \\
&\iff \exists \omega \in \mathbb{U}_n, z = |c|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n}} \omega \\
&\iff z \in \left\{ |c|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n}} \omega, \omega \in \mathbb{U}_n \right\} \\
&\iff z \in \left\{ |c|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} \\
&\iff z \in \left\{ |c|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}
\end{aligned}$$

De plus, ces éléments sont deux-à-deux distincts. En effet, soit $(k, l) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que

$$|c|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} = |c|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n} + \frac{2il\pi}{n}}$$

On a alors, en simplifiant :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2il\pi}{n}}$$

et donc $k = l$ comme dans la preuve précédente. □

Remarque 9.3.13

La propriété 9.3.12 implique que tout nombre complexe admet une ou deux racine(s) carrée(s). Plus précisément, pour tout $c \in \mathbb{C}$:

- Si $c \neq 0$, alors l'équation $z^2 = c$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions : c admet deux racines carrées.
- Si $c = 0$, alors l'équation $z^2 = c$ a pour unique solution $z = 0$, seule racine carrée de c .

Méthode 9.3.14 : Trouver les racines carrées d'un complexe

oit $c \in \mathbb{C}$. Si c est nul, sa seule racine carrée est 0. Supposons donc que c soit non nul. On cherche les racines carrées de c .

Méthode 1 : utiliser une forme trigonométrique de c .

Pour trouver les racines carrées de c , nous pouvons utiliser par exemple écrire c sous forme trigonométrique : $c = |c| e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de c . Les racines carrées de c sont alors $\sqrt{|c|} e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $\sqrt{|c|} e^{\frac{i\theta}{2} + i\pi} = -\sqrt{|c|} e^{\frac{i\theta}{2}}$.

Méthode 2 : résoudre un système.

Utiliser la forme trigonométrique de c nécessite d'en trouver un argument, ce qui n'est pas toujours évident. On peut dès lors utiliser l'écriture algébrique de c , c'est-à-dire $c = \operatorname{Re}(c) + i\operatorname{Im}(c)$.

Si l'on pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on est amené à résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} z^2 = c &\iff (x + iy)^2 = \operatorname{Re}(c) + i\operatorname{Im}(c) \\ &\iff x^2 + 2ixy - y^2 = \operatorname{Re}(c) + i\operatorname{Im}(c) \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= \operatorname{Re}(c) \\ 2xy &= \operatorname{Im}(c) \end{cases} \end{aligned}$$

On peut résoudre plus facilement ce système en remarquant que, si $z^2 = c$, alors $|z|^2 = |c|$. On gagne ainsi une équation :

$$\begin{aligned} z^2 = c &\iff \begin{cases} |z|^2 &= |c| \\ (x + iy)^2 &= \operatorname{Re}(c) + i\operatorname{Im}(c) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 &= |c| \\ x^2 - y^2 &= \operatorname{Re}(c) \\ 2xy &= \operatorname{Im}(c) \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux premières lignes nous fournissent alors x^2 et y^2 , et la dernière ligne permet de décider de leurs signes respectifs.

Exercice 9.3.15

- Déterminer les racines carrées de $c_1 = -1 + \sqrt{3}i$.
- Déterminer les racines carrées de $c_2 = -5 - 12i$.
- Déterminer les racines carrées, sous forme trigonométrique, de $c_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On a :

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Les racines carrées de } c_1 \text{ sont donc } \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ et } -\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2. On calcule le module de c_2 :

$$\begin{aligned} |c_2| &= \sqrt{5^2 + 12^2} \\ &= 13 \end{aligned}$$

Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 z^2 = c_2 &\iff \begin{cases} |z|^2 = |c_2| \\ (x + iy)^2 = -5 - 12i \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 + 2ixy - y^2 = -5 - 12i \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x^2 = 8 \\ 2xy = -12 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\
 &\iff \begin{cases} y^2 = 13 - 4 = 9 \\ x^2 = 4 \\ 2xy = -12 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 3 \text{ ou } y = -3 \\ x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ 2xy = -12 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Or, si $2xy = -12$, c'est que x et y sont de signes opposés. Les racines carrées de c_2 sont donc $2 - 3i$ et $-2 + 3i$.

3. Remarquons que $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\frac{i\pi}{4}}$: cela peut nous orienter (éventuellement à tort) vers l'utilisation d'une forme trigonométrique de c_3 . Avec la technique de l'angle moitié, on peut en effet écrire que :

$$\begin{aligned}
 c_3 &= 1 + e^{\frac{i\pi}{4}} \\
 &= e^{0i} + e^{\frac{i\pi}{4}} \\
 &= e^{\frac{i\pi}{8}} \left(e^{-\frac{i\pi}{8}} + e^{\frac{i\pi}{8}} \right) \\
 &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{\frac{i\pi}{8}}
 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\pi}{8} \in [-\pi; \pi]$, on sait que $2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$. Ainsi, les racines carrées de c_3 sont $\sqrt{2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} e^{\frac{i\pi}{16}}$ et $-\sqrt{2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} e^{\frac{i\pi}{16}}$.

On peut aussi calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. On peut cela de différentes manières ($e^{\frac{i\pi}{8}}$ est une racine carrée de $e^{\frac{i\pi}{4}}$). Nous utiliserons ici les formules de duplication :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - 1$$

ainsi

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 &= \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} \\
 &= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\
 &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est positif, ainsi :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

Finalement, les racines carrées, écrites sous formes trigonométrique, de c_3 sont

$$(2+\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{16}}$$

et

$$-(2+\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{16}} = (2+\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{16}+i\pi} = (2+\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{17i\pi}{16}}$$

9.3.3 Équations polynomiales du second degré

Théorème 9.3.16 – Résolution d’une équation du second degré

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$. On note

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Δ est appelé *discriminant* de la fonction polynomiale $z \mapsto az^2 + bz + c$.

Les racines, éventuellement complexes, de cette fonction polynomiale sont

$$r_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée^a de Δ .

De plus, on a la factorisation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - r_1)(z - r_2)$$

^a. Autrement dit, δ est un complexe vérifiant $\delta^2 = \Delta$.

Démonstration. L’idée est de faire apparaître une identité remarquable. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \text{ puisque } a \neq 0 \\ &= a\left(z^2 + 2 \times \frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)\end{aligned}$$

en notant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Soit alors δ une racine carrée de Δ , de sorte que $\delta^2 = \Delta$, et continuons à factoriser :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \\ &= a \left(z - \frac{-b + \delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - \delta}{2a} \right) \\ &= a(z - r_1)(z - r_2) \end{aligned}$$

en notant $r_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$.

Finalement, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff a(z - r_1)(z - r_2) = 0 \\ &\iff z - r_1 = 0 \text{ ou } z - r_2 = 0 \text{ puisque } a \neq 0 \\ &\iff z = r_1 \text{ ou } z = r_2 \end{aligned}$$

□

Remarque 9.3.17

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$, si $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul, alors les racines de la fonction polynomiale $z \mapsto az^2 + bz + c$ sont confondues. Si on note r cette racine, r vaut $-\frac{b}{2a}$ et on a la factorisation

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - r)^2$$

Exercice 9.3.18

Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation

$$2z^2 + z(-7 - i) + 4 - 2i = 0$$

Correction. Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2, dont le discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-7 - i)^2 - 4 \times 2 \times (4 - 2i) \\ &= 16 + 30i \end{aligned}$$

Il s'agit alors de trouver une racine carrée de Δ . Calculons son module :

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \sqrt{16^2 + 30^2} \\ &= \sqrt{2^2 8^2 + 2^2 15^2} \\ &= 2\sqrt{8^2 + 15^2} \\ &= 2\sqrt{64 + 225} \\ &= 2\sqrt{289} \\ &= 34 \end{aligned}$$

Posons $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 \delta^2 = \Delta &\iff \begin{cases} |\delta|^2 = |\Delta| \\ (x + iy)^2 = 16 + 30i \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 + 2ixy - y^2 = 16 + 30i \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = 16 \\ 2xy = 30 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ 2x^2 = 50 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ 2xy = 30 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y^2 = 34 - 25 = 9 \\ x^2 = 25 \\ 2xy = 30 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 3 \text{ ou } y = -3 \\ x = 5 \text{ ou } x = -5 \\ 2xy = 30 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Or, si $2xy = 30$, c'est que x et y sont du même signe. Les deux racines carrées de Δ sont donc $5 + 3i$ et $-5 - 3i$. On choisit de poser $\delta = 5 + 3i$.

Finalement, les deux solutions r_1 et r_2 de l'équation $2z^2 + z(-7 - i) + 4 - 2i = 0$ sont

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{-(-7 - i) - \delta}{2 \times 2} & r_2 &= \frac{-(-7 - i) + \delta}{2 \times 2} \\
 &= \frac{7 + i - 5 - 3i}{4} & &= \frac{7 + i + 5 + 3i}{4} \\
 &= \frac{2 - 2i}{4} & &= \frac{12 + 4i}{4} \\
 &= \frac{1 - i}{2} & &= 3 + i
 \end{aligned}$$

Propriété 9.3.19 – Somme et produit des racines

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$. On note r_1 et r_2 les racines, éventuellement confondues, de la fonction polynomiale $z \mapsto az^2 + bz + c$. Alors :

$$r_1 r_2 = \frac{c}{a} \text{ et } r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

Démonstration. On peut calculer directement $r_1 r_2$ et $r_1 + r_2$ pour conclure, mais nous allons utiliser un raisonnement algébrique plus général.

En effet, on sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z - r_1)(z - r_2)$. Or, en développant :

$$\begin{aligned}
 a(z - r_1)(z - r_2) &= a(z^2 - (r_1 + r_2)z + r_1 r_2) \\
 &= az^2 - a(r_1 + r_2)z + ar_1 r_2
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$az^2 + bz + c = aX^2 - a(r_1 + r_2)z + ar_1 r_2$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} -a(r_1 + r_2) = b \\ ar_1 r_2 = c \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} \\ r_1 r_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

□

Exercice 9.3.20

Trouver les couples de complexes (z_1, z_2) tels que $z_1 z_2 = 5 + \sqrt{3}i$ et $z_1 + z_2 = 2\sqrt{3} + i$.

Correction. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. z_1 et z_2 sont les racines de l'équation polynomiale $(z - z_1)(z - z_2) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Cette équation s'écrit aussi $z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = 0$.

Ainsi, si $z_1 z_2 = 5 + \sqrt{3}i$ et $z_1 + z_2 = 2\sqrt{3} + i$, alors z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $z^2 - (2\sqrt{3} + i)z + 5 + \sqrt{3}i = 0$.

La propriété 9.3.19 assure la réciproque.

Il s'agit donc ici de déterminer les racines de l'équation polynomiale

$$z^2 - (2\sqrt{3} + i)z + 5 + \sqrt{3}i = 0$$

Son discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(-(2\sqrt{3} + i) \right)^2 - 4(5 + \sqrt{3}i) \\ &= 12 + 4\sqrt{3}i - 1 - 20 - 4\sqrt{3}i \\ &= -9 \\ &= (3i)^2 \end{aligned}$$

Ses racines sont $r_1 = \frac{2\sqrt{3} + i - 3i}{2} = \sqrt{3} - i$ et $r_2 = \frac{2\sqrt{3} + i + 3i}{2} = \sqrt{3} + 2i$.

Les couples cherchés sont alors (r_1, r_2) et (r_2, r_1) .

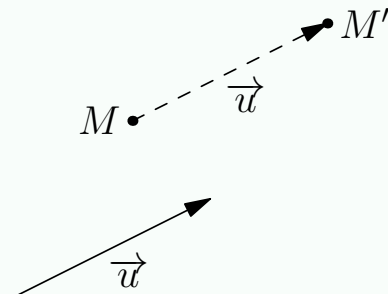
9.4 Nombres complexes et géométrie

9.4.1 Translations

Définition 9.4.1 – Translation

Soit \vec{u} un vecteur de ce plan.

On appelle *translation de vecteur \vec{u}* l'application qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Propriété 9.4.2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, considérons un vecteur \vec{u} d'affixe u .

Pour tout point M du plan, d'affixe z , le point M' obtenu par translation de M par le vecteur \vec{u} a pour affixe $z + u$.

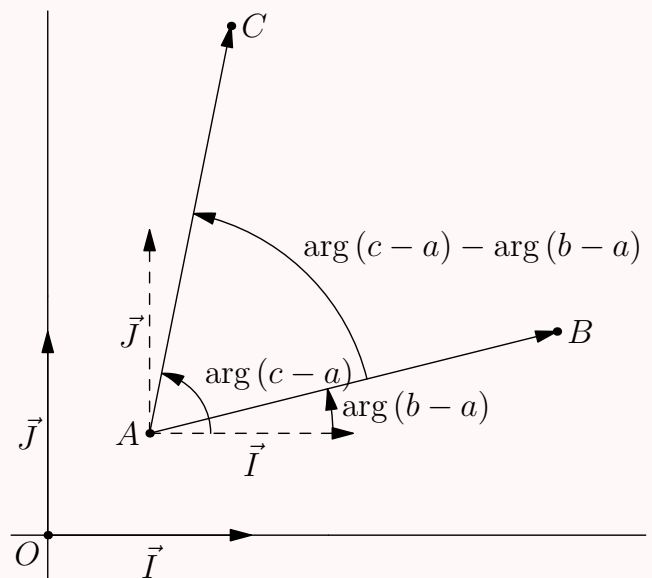
Démonstration. Soit M un point du plan et M' l'image de M par la translation de vecteur \vec{u} . On note z l'affixe de M et z' l'affixe de M' .

$\vec{MM'} = \vec{u}$ donc, en passant aux affixes, $z' - z = u$ ou encore $z' = z + u$. \square

9.4.2 Positions relatives de deux vecteurs**Propriété 9.4.3**

Considérons trois points A, B et C du plan, muni d'un repère orthonormé, tels que $B \neq A$ et $C \neq A$, d'affixes respectives a, b et c .

Alors $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB}$ et tout argument θ de $\frac{c-a}{b-a}$ est une mesure de l'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) .



Démonstration. Puisque A, B et C sont deux-à-deux distincts, il en est de même pour a, b et c . Le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$ est donc bien défini.

Remarquons que $c-a$ (respectivement $b-a$) est l'affixe du vecteur \vec{AC} (respectivement \vec{AB}). Ainsi :

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \frac{AC}{AB}$$

Soit θ un argument de $\frac{c-a}{b-a}$. Alors :

$$\theta \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$$

donc, d'après la propriété 9.2.22 :

$$\theta \equiv \arg(c-a) - \arg(b-a) [2\pi]$$

Or, $\arg(c-a)$ est une mesure de l'angle (\vec{I}, \vec{AC}) et $\arg(b-a)$ est une mesure de l'angle (\vec{I}, \vec{AB}) . Ainsi, $\arg(c-a) - \arg(b-a)$ est une mesure de l'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) , et il en est de même pour θ qui lui est congru modulo 2π . \square

Corollaire 9.4.4

Soient A, B et C trois points du plan, muni d'un repère orthonormé, d'affixes respectives a, b et c , avec $a \neq b$. Alors :

- Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel.

Démonstration. Si $a = c$, les points A et C sont confondus : \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont alors orthogonaux et les points A, B et C sont alignés.

Supposons que $a \neq c$. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, c'est-à-dire si et seulement si $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, ce qui revient à dire que $\frac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.

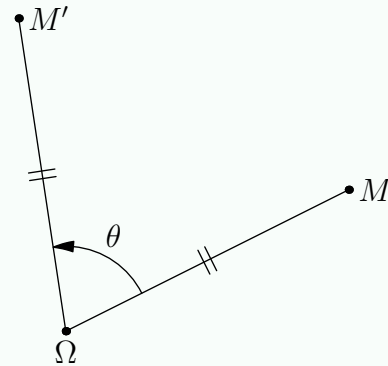
De même, A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0 [\pi]$, ce qui revient à dire que $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel. \square

9.4.3 Rotations**Définition 9.4.5 – Rotation du plan**

Soit Ω un point du plan, muni d'un repère orthonormé ^a et $\theta \in \mathbb{R}$.

La *rotation de centre Ω et d'angle θ* est l'application qui, à tout point M du plan, associe le point M' du plan tel que $\Omega M = \Omega M'$ et tel que θ soit une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$.

^{a.} et donc, d'une orientation

**Propriété 9.4.6**

On considère le plan muni d'un repère orthonormé. Soit Ω un point du plan, dont on note ω l'affixe, et $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit M un point du plan et M' l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ . On note z l'affixe de M et z' l'affixe de M' . Alors :

$$z' - \omega = (z - \omega) e^{i\theta}$$

ou encore

$$z' = (z - \omega) e^{i\theta} + \omega$$

Démonstration. On sait que $\Omega M = \Omega M'$ donc $|z - \omega| = |z' - \omega|$. Deux cas peuvent alors se présenter :

- Si $z = \omega$, alors $|z - \omega| = 0$ donc $|z' - \omega| = 0$ et $z' = \omega$. En particulier, on a bien $z' - \omega = 0 = (z - \omega) e^{i\theta}$.
- Supposons que $z \neq \omega$, alors $z' \neq \omega$ donc θ est un argument de $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$. De plus, $\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1$. On en

déduit une écriture trigonométrique de $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$:

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

ou encore

$$z' - \omega = (z - \omega) e^{i\theta}$$

**Exercice 9.4.7**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit les points Ω et M de coordonnées respectives $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $(2, -1)$.

Déterminer les coordonnées du point M' , image par M de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Correction. Notons z , ω et z' les affixes respectives de M , Ω et M' . On a :

$$\begin{aligned} z' &= (z - \omega) e^{i\frac{\pi}{6}} + \omega \\ &= \left(2 - i - \left(1 + \frac{i}{2}\right)\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) + 1 + \frac{i}{2} \\ &= \left(1 - \frac{3i}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) + 1 + \frac{i}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) + 1 + \frac{i}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{4} + i \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

Exercice 9.4.8

On se place dans un repère orthonormé du plan.

On considère les points A et B de coordonnées respectives $(2, 3)$ et $(1, 1)$.

Déterminer les coordonnées de Ω tel que B soit l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Correction. Notons a et b les affixes respectives de A et B , de sorte que $a = 2 + 3i$ et $b = 1 + i$.

Soit Ω un point du plan et ω son affixe. Alors B est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ si et seulement si :

$$b - \omega = (a - \omega) e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

ou encore

$$b - ae^{\frac{2i\pi}{3}} = \omega \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

ou enfin

$$\omega = \frac{1}{1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}} \left(b - ae^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

Calculons :

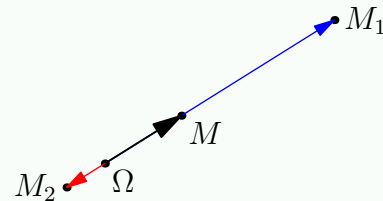
$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{1}{e^{-\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}} \left(1 + i - (2 + 3i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \\
 &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \left(1 + i + 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}i + \frac{3}{2}i \right) \\
 &= \frac{ie^{-\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{3}} \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3} \right) i \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3} \right) i \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \right) i \right) \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{-1}{2\sqrt{3}} + 2 \right) i \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{-\sqrt{3}}{6} + 2 \right) i
 \end{aligned}$$

Le point Ω cherché a donc pour coordonnées $\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{6} + 2 \right)$ dans le repère mentionné par l'énoncé.

9.4.4 Homothéties

Définition 9.4.9 – Homothétie

Soit Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.
On appelle *homothétie de centre Ω et de rapport k* l'application qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.



Ici, M_1 est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport 3, et M_2 est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Propriété 9.4.10

On considère le plan muni d'un repère orthonormé. Soit Ω un point du plan, d'affixe notée ω , et soit $k \in \mathbb{R}^*$. Soit M un point du plan, d'affixe z , et M' l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k . Alors

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

ou encore

$$z' = k(z - \omega) + \omega$$

Démonstration. On a $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ donc, en passant aux affixes et en utilisant la propriété 9.1.7 :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

**Exercice 9.4.11**

Dans le plan d'un repère orthonormé, on considère une rotation de centre Ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, et une homothétie H de centre Ω' et de rapport $k \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les points fixes de R , c'est-à-dire les points M du plan tels que $R(M) = M$. Faire de même pour H .
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que R et H commutent.

Correction. Notons, dans le repère mentionné par l'énoncé, ω et ω' les affixes respectives de Ω et Ω' . Considérons également les applications suivantes :

$$\begin{aligned} r : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} & \text{et} & \quad h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto (z - \omega)e^{i\theta} + \omega & z &\mapsto k(z - \omega') + \omega' \end{aligned}$$

1. Soit M un point du plan, d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} R(M) = M &\iff r(z) = z \\ &\iff (z - \omega)e^{i\theta} + \omega = z \\ &\iff (z - \omega)e^{i\theta} + \omega - z = 0 \\ &\iff (z - \omega)(e^{i\theta} - 1) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, il y a deux cas de figure.

- Si $e^{i\theta} - 1 = 0$, c'est-à-dire si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors tous les points du plan sont des points fixes pour R . R est alors l'identité du plan : pour tout point M du plan, $R(M) = M$.
- Sinon, on obtient

$$R(M) = M \iff z - \omega = 0 \iff z = \omega$$

et le seul point fixe de R est Ω .

De la même façon :

$$\begin{aligned} H(M) = M &\iff h(z) = z \\ &\iff k(z - \omega') + \omega' = z \\ &\iff k(z - \omega') + \omega' - z = 0 \\ &\iff (z - \omega')(k - 1) = 0 \end{aligned}$$

et à nouveau, il y a deux cas de figure.

- Si $k = 1$, tous les points du plan sont des points fixes pour H , qui est alors l'identité du plan : pour tout point M du plan, on a $H(M) = M$.
- Sinon, le seul point fixe de H est Ω' .

2. Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors R est l'identité du plan et pour tout point M on a

$$(R \circ H)(M) = R(H(M)) = H(M) = H(R(M)) = (H \circ R)(M)$$

donc R et H commutent.

De même, si $k = 1$, alors H est l'identité du plan et H et R commutent.

Supposons donc dans la suite que $k \neq 1$ et que θ ne soit pas un multiple de 2π .

Pour tout point M du plan d'affixe z , $R(M)$ a pour affixe $r(z)$ et $H(M)$ a pour affixe $h(z)$. Ainsi, R et H commutent si et seulement si r et h commutent.

Raisonnons par analyse-synthèse.

- **Analyse** : supposons que r et h commutent. En particulier, puisque Ω est le point fixe de R , on a $r(\omega) = \omega$ et :

$$\begin{aligned} r(h(\omega)) &= (r \circ h)(\omega) \\ &= (h \circ r)(\omega) \\ &= h(r(\omega)) \\ &= h(\omega) \end{aligned}$$

Ainsi, $h(\omega)$ est un point fixe de r : or le seul point fixe de r est ω . On en déduit que $h(\omega) = \omega$ et que ω est un point fixe de h . Cependant, ω' est le seul point fixe de h : on a donc $\omega = \omega'$.

- **Synthèse** : supposons que $\omega = \omega'$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (r \circ h)(z) &= r(h(z)) \\ &= r(k(z - \omega) + \omega) \\ &= (k(z - \omega) + \omega - \omega)e^{i\theta} + \omega \\ &= k(z - \omega)e^{i\theta} + \omega \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (h \circ r)(z) &= h(r(z)) \\ &= h((z - \omega)e^{i\theta} + \omega) \\ &= k((z - \omega)e^{i\theta} + \omega - \omega) + \omega \\ &= k(z - \omega)e^{i\theta} + \omega \\ &= (r \circ h)(z) \end{aligned}$$

Ainsi, r et h commutent donc R et H commutent.

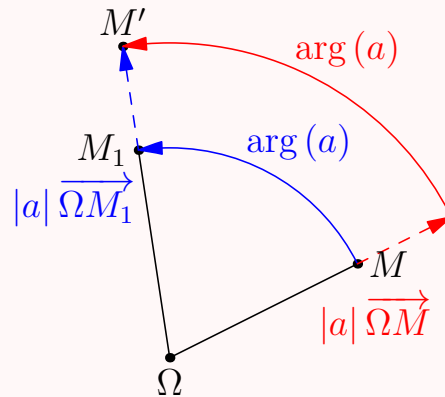
Finalement, R et H commutent si et seulement si l'une, au moins, des trois conditions suivantes est réalisée :

- $\theta \equiv 0[2\pi]$.
- $k = 1$.
- Ω et Ω' sont confondus.

Propriété 9.4.12

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère un point Ω d'affixe ω . Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ d'image M , l'image de $a(z - \omega) + \omega$ est obtenu en appliquant à M , dans un ordre quelconque, une rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$ et une homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.



Démonstration. Notons

$$\begin{aligned} r : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} & h : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto (z - \omega)e^{i\arg(a)} + \omega & z &\mapsto |a|(z - \omega) + \omega \end{aligned}$$

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} r(h(z)) &= r(|a|(z - \omega) + \omega) \\ &= (|a|(z - \omega) + \omega - \omega) e^{i \arg(a)} + \omega \\ &= |a| e^{i \arg(a)} (z - \omega) + \omega \\ &= a(z - \omega) + \omega \end{aligned}$$

Un calcul similaire (voir l'exercice 9.4.11) montre que $h(r(z))$ est aussi égal à $a(z - \omega) + \omega$, d'où le fait que r et h commutent. \square

Exercice 9.4.13

On pose $a = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}i}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3} + i \left(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$. On définit alors l'application suivante :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto az + b \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une bijection.
2. Montrer que f admet un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un unique complexe ω tels que $f(\omega) = \omega$, et le déterminer.
3. Montrer :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) - \omega = a(z - \omega)$$

4. On pose $z_0 = 1 + i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_{n+1} = f(z_n)$.
 - (a) Dans un repère orthonormé du plan, construire les points d'affixe z_0 , z_1 et z_2 .
 - (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $z_n - \omega$ en fonction de z_0 , ω , a , b et n .

Correction. 1. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(z) = z' &\iff az + b = z' \\ &\iff az = z' - b \\ &\iff z = \frac{z' - b}{a} \text{ car } a \neq 0 \end{aligned}$$

f est donc bien une bijection, de réciproque $f^{-1} : z' \mapsto \frac{z' - b}{a}$.

2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\omega) = \omega &\iff a\omega + b = \omega \\ &\iff b = \omega - a\omega \\ &\iff b = (1 - a)\omega \\ &\iff \omega = \frac{b}{1 - a} \end{aligned}$$

Le seul point fixe de f est donc $\omega = \frac{b}{1 - a}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Puisque ω est un point fixe de f , on a :

$$\begin{aligned} f(z) - \omega &= az + b - (a\omega + b) \\ &= az - a\omega \\ &= a(z - \omega) \end{aligned}$$

4. (a) Déterminons une écriture trigonométrique de a .

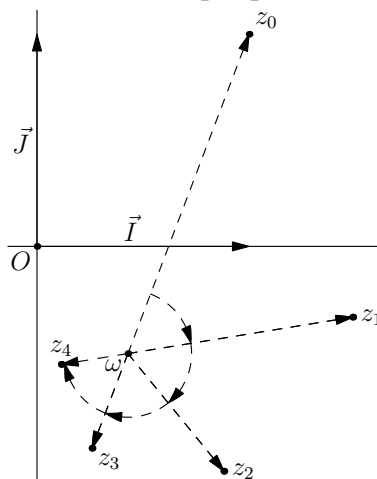
$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1+3}{3^2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ainsi, en factorisant a par $|a|$, on obtient :

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \frac{2}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $z_{n+1} - \omega = \frac{2}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}} (z_n - \omega)$. Dans un repère orthonormé du plan, et en notant Ω le point d'affixe ω , le point d'affixe z_{n+1} s'obtient donc en appliquant au point d'affixe z_n une rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ puis une homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{2}{3}$.

Voici une représentation graphique de z_i , pour tout $i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$.



(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_n - \omega = a^n (z_0 - \omega)$.

— Pour $n = 0$, c'est vrai puisque $z_0 - \omega = a^0 (z_0 - \omega)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $z_n - \omega = a^n (z_0 - \omega)$. Alors :

$$\begin{aligned} z_{n+1} - \omega &= a(z_n - \omega) \\ &= aa^n (z_0 - \omega) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= a^{n+1} (z_0 - \omega) \end{aligned}$$

En raisonnant par récurrence, on a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n - \omega = a^n (z_0 - \omega)$$

9.5 Exercices

Exercice 9.5.1

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (1+i)^2$
2. $z_2 = \frac{3-i}{2+i}$
3. $z_3 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$
4. $z_4 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 9.5.2

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivant :

1. $z_1 = 3 - 3i$
2. $z_2 = 2\sqrt{3} - 6i$
3. $z_3 = 2\sqrt{3} + 6i$
4. $z_4 = 1 + e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$.

Exercice 9.5.3

Résoudre dans \mathbb{C} :

$$z^2 + (i-3)z - 6i + 2 = 0$$

Exercice 9.5.4

Résoudre l'équation

$$\sqrt{3}\cos(t) - \sin(t) = \cos(2t) + \sqrt{3}\sin(2t)$$

d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

Correction. Les écritures trigonométriques de $\sqrt{3} - i$ et de $1 + \sqrt{3}i$ sont respectivement

$$\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos(t) - \sin(t) = \cos(2t) + \sqrt{3}\sin(2t) &\iff 2\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &\iff \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &\iff t + \frac{\pi}{6} \equiv 2t - \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } t + \frac{\pi}{6} \equiv -\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) [2\pi] \\ &\iff \frac{\pi}{2} \equiv t [2\pi] \text{ ou } 3t \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \\ &\iff t \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } t \equiv \frac{\pi}{18} \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

Exercice 9.5.5

Déterminer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2}$.

Exercice 9.5.6 – Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et pentagone régulier

On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

2. Montrer alors que

$$(z + \bar{z})^2 + z + \bar{z} - 1 = 0$$

3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Correction. 1. On a $z^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = e^{\frac{2i\pi}{5} \times 5} = e^{2i\pi} = 1$ donc $z^5 - 1 = 0$ ou encore $(z - 1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 0$.

Puisque $z \neq 1$ ($\frac{2\pi}{5}$ n'étant pas congru à 0 modulo 2π), on a bien

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \quad (9.1)$$

2. Remarquons que :

$$\begin{aligned} z^4 &= e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5} - 2i\pi} = e^{\frac{-2i\pi}{5}} = \bar{z} \\ z^3 &= e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5} - 2i\pi} = e^{\frac{-4i\pi}{5}} = \overline{z^2} = \bar{z}^2 \end{aligned}$$

L'égalité (9.1) devient alors :

$$1 + z + z^2 + \bar{z}^2 + \bar{z} = 0$$

ou encore

$$1 + z + \bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 = 0$$

Pour terminer, remarquons que $z^2 + \bar{z}^2$ est le début d'une identité remarquable :

$$z^2 + \bar{z}^2 = z^2 + \bar{z}^2 + 2z\bar{z} - 2z\bar{z} = (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2 = (z + \bar{z})^2 - 2$$

Finalement, on a bien

$$1 + z + \bar{z} + (z + \bar{z})^2 - 2 = 0$$

ou encore :

$$(z + \bar{z})^2 + z + \bar{z} - 1 = 0 \quad (9.2)$$

3. Remarquons que $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. L'égalité (9.2) devient alors

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est donc racine du polynôme $X^2 + X - 1$, polynôme du second degré dont le discriminant est

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$$

et dont les racines sont

$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Cependant, $\frac{2\pi}{5} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$ donc $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ puisque $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$.

Finalement, on a

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 &= 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right) \left(1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right) \\ &= \frac{(5 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{16} \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

Puisque $\frac{2\pi}{5} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$ donc

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

a. On aurait aussi simplement pu dire que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est une racine 5-ième de l'unité d'après le cours.

Exercice 9.5.7

Déterminer les complexes z tel que, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les points d'affixes z , z^2 et z^4 soient alignés.

Correction. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} z^2 = z &\iff z^2 - z = 0 \\ &\iff z(z - 1) = 0 \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z = 1 \end{aligned}$$

Si $z = 0$ ou $z = 1$, les trois points sont confondus et alignés.

Supposons que $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Alors $z^2 \neq z$ et les points d'affixes z , z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si $\frac{z^4 - z^2}{z - z^2} \in \mathbb{R}$.

Or :

$$\begin{aligned}
 \frac{z^4 - z^2}{z - z^2} \in \mathbb{R} &\iff \frac{z^2(z^2 - 1)}{z(1 - z)} \in \mathbb{R} \\
 &\iff z \frac{(z - 1)(z + 1)}{1 - z} \in \mathbb{R} \\
 &\iff -z(z + 1) \in \mathbb{R} \\
 &\iff -z(z + 1) = \overline{-z(z + 1)} \\
 &\iff z(z + 1) = \bar{z}(\bar{z} + 1) \\
 &\iff z^2 + z = \bar{z}^2 + \bar{z} \\
 &\iff z^2 + z - \bar{z}^2 - \bar{z} = 0 \\
 &\iff (z^2 - \bar{z}^2) + z - \bar{z} = 0 \\
 &\iff (z - \bar{z})(z + \bar{z}) + z - \bar{z} = 0 \\
 &\iff (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0 \\
 &\iff z = \bar{z} \text{ ou } z + \bar{z} = -1 \\
 &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } 2\operatorname{Re}(z) = -1 \\
 &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = \frac{-1}{2}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des complexes z tels que les points d'affixes z , z^2 et z^4 sont alignés est ainsi :

$$\mathbb{R} \cup \left\{ \frac{-1}{2} + iy, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 9.5.8

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère trois points A , B et C d'affixes respectives a , b et c . On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $c - b = (a - b)e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $a - b = (c - b)e^{\frac{i\pi}{3}}$.
3. En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $c + bj + aj^2 = 0$ ou $a + bj + cj^2 = 0$.
4. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0$.

Correction. 1. On a $j^3 - 1 = 0$ donc $(j - 1)(1 + j + j^2) = 0$ et puisque $j \neq 1$, on obtient $1 + j + j^2 = 0$.

2. Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $BC = AB$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Cela revient à dire que \overrightarrow{BC} est l'image de \overrightarrow{BA} par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, ou inversement.

Ainsi, ABC est équilatéral si et seulement si $c - b = (a - b)e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $a - b = (c - b)e^{\frac{i\pi}{3}}$.

3. Remarquons que $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{i\pi} e^{\frac{i\pi}{3}} = -e^{\frac{i\pi}{3}}$. Ainsi $e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$ et d'après la question précédente, le triangle ABC est équilatéral si et seulement si l'une des deux égalités suivantes est vérifiée :

$$c - b = -j^2(a - b) \quad (9.3)$$

$$\text{ou } a - b = -j^2(c - b) \quad (9.4)$$

Or :

$$\begin{aligned}
 (9.3) & \iff c - b = -j^2 a + j^2 b \\
 & \iff c - b + j^2 a - j^2 b = 0 \\
 & \iff c + (-1 - j^2) b + j^2 a = 0 \\
 & \iff c + jb + j^2 a = 0 \text{ puisque } 1 + j + j^2 = 0
 \end{aligned}$$

De même :

$$(9.4) \iff a + jb + j^2 c = 0$$

4. Finalement :

$$\begin{aligned}
 & ABC \text{ est équilatéral} \\
 & \iff c + jb + j^2 a = 0 \text{ ou } a + jb + j^2 c = 0 \\
 & \iff (c + jb + j^2 a)(a + jb + j^2 c) = 0 \\
 & \iff ac + jbc + j^2 c^2 + jab + j^2 b^2 + \underbrace{j^3}_{=1} bc + j^2 a^2 + \underbrace{j^3}_{=1} ab + \underbrace{j^4}_{=j} ac = 0 \\
 & \iff j^2 (a^2 + b^2 + c^2) + ab + ac + bc + jab + jac + jbc = 0 \\
 & \iff j^2 (a^2 + b^2 + c^2) + \underbrace{(1 + j)}_{=-j^2} (ab + ac + bc) = 0 \\
 & \iff j^2 (a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc)) = 0 \\
 & \iff a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0
 \end{aligned}$$

Exercice 9.5.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \iff \left(\exists \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, z_k = |z_k| e^{i\theta} \right)$$

Exercice 9.5.10

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$. Résoudre le système suivant, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} z^p = 1 \\ (z+1)^p = 1 \end{cases}$$

Exercice 9.5.11

Résoudre dans \mathbb{C} :

$$\begin{cases} |z+1| \leq 1 \\ |z-1| \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 9.5.12

On pose $z_0 = 2 - i$.

1. On définit la fonction

$$\begin{aligned} P &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^3 - 7z^2 + 17z - 15 \end{aligned}$$

2. Montrer que $P(z_0) = P(\overline{z_0}) = 0$.
 3. Développer, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$.
 4. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0})(z - a)$ et déterminer a .

Exercice 9.5.13

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} (-1)^k \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k$$

On pourra calculer, de deux manières, le complexe $(1+i)^{2n}$.

Exercice 9.5.14

Résoudre, dans \mathbb{C} :

$$|z+5| = |z-i|$$

Exercice 9.5.15

Déterminer les complexes z tels que les points d'affixe z^2 , $z-i$ et $z+i$ soient alignés.

Exercice 9.5.16

Résoudre dans \mathbb{C} :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos(\alpha)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0; \pi[$.

Correction. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. Posons $\omega = \frac{z+1}{z-1}$. Puisque $z \neq -1$, on a $\omega \neq 0$.

Réolvons :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos(\alpha) \quad (\star)$$

On a :

$$\begin{aligned} (\star) &\iff \omega^n + \left(\frac{1}{\omega}\right)^n = 2\cos(\alpha) \\ &\iff \omega^{2n} + 1 = 2\cos(\alpha)\omega^n \\ &\iff (\omega^n)^2 - 2\cos(\alpha)\omega^n + 1 = 0 \end{aligned}$$

La fonction polynomiale $x \mapsto x^2 - 2\cos(\alpha)x + 1$ a pour discriminant

$$\Delta = (2\cos(\alpha))^2 - 4 = 4(\cos^2(\alpha) - 1) = -4\sin^2(\alpha) = (2i\sin(\alpha))^2$$

Ses racines sont donc

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2\cos(\alpha) + 2i\sin(\alpha)}{2} & r_2 &= \frac{2\cos(\alpha) - 2i\sin(\alpha)}{2} \\ &= \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) & &= \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) \\ &= e^{i\alpha} & &= e^{-i\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (*) &\iff \omega^n = e^{i\alpha} \text{ ou } \omega^n = e^{-i\alpha} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \omega = e^{\frac{i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \text{ ou } \omega = e^{\frac{-i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \text{ ou } \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{-i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \end{aligned}$$

Remarquons que 1 n'est pas solution de l'équation suivante, d'inconnue $u \in \mathbb{C}^*$:

$$u^n + \frac{1}{u^n} = 2\cos(\alpha)$$

(sinon, on aurait $1 + 1 = 2\cos(\alpha)$ ou encore $\cos(\alpha) = 1$ ce qui est faux puisque $\alpha \in]0; \pi[$). On est donc certain que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $e^{\frac{i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \neq 1$ et $e^{\frac{-i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \neq 1$, puisqu'il s'agit des solutions de cette même équation. Soit $z' \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} = z' &\iff z+1 = (z-1)z' \\ &\iff z+1 = zz' - z' \\ &\iff z' + 1 = zz' - z \\ &\iff z' + 1 = z(z' - 1) \\ &\iff z = \frac{z' + 1}{z' - 1} \text{ car } z' \neq 1 \end{aligned}$$

Soit $\theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et posons $z' = e^{i\theta}$ (qui est donc bien différent de 1). On a :

$$\begin{aligned} \frac{z' + 1}{z' - 1} &= \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} \\ &= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}} \times \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{-i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{-i\theta}{2}}} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= -i \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (*) &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z = \frac{z' + 1}{z' - 1} \text{ avec } z' = e^{\frac{i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \text{ ou } z' = e^{\frac{-i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z = -i \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)} \text{ ou } z = -i \frac{\cos\left(\frac{-\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{-\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)} \end{aligned}$$

9.6 DM conducteur

Exercice 31

Résoudre les équations suivantes :

1. $z^2 - 3z + iz + 4 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. PTS 1,5

2. $e^{2i\theta} + e^{i\theta} + 1 = 0$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$. PTS 1,5

3. $|z - 1| = |i - z + 2|$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. PTS 1,5

4. $z^4 - 2z^2 - iz^2 + 3 + i = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. PTS 2

Correction. 1. Le discriminant de l'équation polynomiale du second degré posée, à savoir

$$z^2 + (-3 + i)z + 4 = 0$$

est

$$\Delta = (-3 + i)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -8 - 6i$$

Cherchons-en une racine carrée. Soit $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \delta^2 = -8 - 6i &\iff \begin{cases} |\delta|^2 = |-8 - 6i| \\ (x + iy)^2 = -8 - 6i \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10 \\ x^2 + 2ixy - y^2 = -8 - 6i \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x^2 = 10 - 8 = 2 \\ y^2 = x^2 + 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\delta = 1 - 3i$ est une racine carrée de Δ (et l'autre est $-1 + 3i$). Les solutions de l'équation posée dans l'énoncé sont donc

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-(-3 + i) - (1 - 3i)}{2} \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-(-3 + i) + (1 - 3i)}{2} \\ &= 2 - 2i \end{aligned}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $Z = e^{i\theta}$. L'équation de l'énoncé est alors équivalente à :

$$Z^2 + Z + 1 = 0$$

qui a pour solutions $Z = j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $Z = j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Finalement, θ est solution de l'équation posée si et seulement si $e^{i\theta} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $e^{i\theta} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. L'ensemble des solutions est donc $\left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ et posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} |z-1| = |i-z+2| &\iff |z-1|^2 = |i-z+2|^2 \text{ car ces deux modules sont positifs} \\ &\iff |(x-1) + iy|^2 = |(x-2) + (1-y)i|^2 \\ &\iff (x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (1-y)^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + 1 - 2y + y^2 \\ &\iff -2x + 1 = -4x + 5 - 2y \\ &\iff 2x - 4 = -2y \\ &\iff y = 2 - x \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est alors l'ensemble

$$S = \{x + i(2-x), x \in \mathbb{R}\}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ et posons $Z = z^2$. Alors :

$$z^4 - 2z^2 - iz^2 + 3 + i = 0 \iff Z^2 + (-2-i)Z + 3 + i = 0$$

Le discriminant de cette équation polynomiale du second degré est

$$\Delta = (-2-i)^2 - 4 \times 1 \times (3+i) = -9 = (3i)^2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} Z^2 + (-2-i)Z + 3 + i = 0 &\iff Z = \frac{2+i+3i}{2} \text{ ou } Z = \frac{2+i-3i}{2} \\ &\iff Z = 1+2i \text{ ou } Z = 1-i \end{aligned}$$

Il s'agit alors de déterminer les racines carrées de $1+2i$ et $1-i$.

— Pour $1-3i$: un calcul similaire à celui effectué dans la question 1 donne, pour racines carrées, $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} +$

$$i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

— Pour $1+i$, on obtient $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

Finalement, les quatre solutions de l'équation initiale sont :

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ &\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 32

PTS 3 Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$$

Calculer simultanément A_n et B_n .

Correction. Soit $n \in \mathbb{R}$. On calcule $A_n + iB_n$:

$$\begin{aligned} A_n + iB_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(kx) + i \sin(kx)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k 1^{n-k} \\ &= (1 + e^{ix})^n \text{ par la formule du binôme} \\ &= \left(e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{\frac{-ix}{2}} + e^{\frac{ix}{2}} \right) \right)^n \\ &= e^{\frac{inx}{2}} \left(2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^n \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient donc

$$A_n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

$$B_n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Exercice 33

3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\} \\ z &\mapsto \frac{1+z}{1-z} \end{aligned}$$

est une bijection.

2. Résoudre l'équation

$$\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{2n} = 1$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Correction. 1. Pour commencer, l'application donnée est bien définie : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1+z}{1-z} = -1 &\iff 1+z = -(1-z) \\ &\iff 1+z = -1+z \\ &\iff 1 = -1 \text{ ce qui est impossible}\end{aligned}$$

f est donc bien à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Alors :

$$\begin{aligned}f(z) = u &\iff \frac{1+z}{1-z} = u \\ &\iff 1+z = u(1-z) \\ &\iff 1+z = u - uz \\ &\iff z + uz = u - 1 \\ &\iff z(1+u) = u - 1 \\ &\iff z = \frac{u-1}{1+u}\end{aligned}$$

et $\frac{u-1}{1+u}$ est bien différent de 1. f est donc bien bijective, de réciproque

$$\begin{aligned}f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{-1\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ u &\mapsto \frac{u-1}{1+u}\end{aligned}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Posons $u = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Alors :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = 1 &\iff u^{2n} = 1 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket, u = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}\end{aligned}$$

On aura reconnue les racines $2n$ -ième de l'unité.

Notons que pour tout $k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned}e^{\frac{ik\pi}{n}} = -1 &\iff \exists m \in \mathbb{Z}, \frac{k\pi}{n} = \pi + 2m\pi \\ &\iff \exists m \in \mathbb{Z}, k = n + 2mn \\ &\iff \exists m \in \mathbb{Z}, k - n = 2mn \\ &\iff k = n\end{aligned}$$

puisque $k - n \in \llbracket -n; n-1 \rrbracket$ et le seul multiple de $2n$ dans cet intervalle est 0.

Puisque u est dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, il faut donc exclure le cas où $k = n$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = 1 &\iff \exists k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket \setminus \{n\}, u = e^{\frac{ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket \setminus \{n\}, f(z) = e^{\frac{ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket \setminus \{n\}, z = f^{-1}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket \setminus \{n\}, z = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1}{e^{\frac{ik\pi}{n}} + 1}\end{aligned}$$

Pour finir, soit $k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket \setminus \{n\}$. Alors, par la technique de l'angle moitié :

$$\begin{aligned} \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1}{e^{\frac{ik\pi}{n}} + 1} &= \frac{e^{\frac{ik\pi}{2n}}}{e^{\frac{ik\pi}{2n}}} \times \frac{e^{\frac{ik\pi}{2n}} - e^{\frac{-ik\pi}{2n}}}{e^{\frac{ik\pi}{2n}} + e^{\frac{-ik\pi}{2n}}} \\ &= \frac{2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \\ &= i \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation posée est

$$\left\{ i \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket \setminus \{n\} \right\}$$

Exercice 34

Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les points d'affixe a , a^2 et a^3 forment un triangle rectangle.

PTS 3

Correction. Notons A , B et C les images respectives de a , a^2 et a^3 , dans un repère orthonormé quelconque.

Notons que si $a = 1$ ou si $a = 0$, les trois points sont confondus (et le triangle est techniquement considéré comme rectangle : les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , par exemple, sont nuls donc orthogonaux). De même, si $a = -1$, alors $a^3 = a \neq a^2$ et A et C sont confondus : \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AB} sont donc orthogonaux.

Dans toute la suite, on suppose que $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, de sorte que tous les quotient qui suivent sont bien définis.

Il y a trois cas à considérer (le triangle pouvant être rectangle en l'un quelconque de ces trois points).

Premier cas :

$$\begin{aligned} ABC \text{ est rectangle en } A &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \frac{a^3 - a}{a^2 - a} \in i\mathbb{R} \\ &\iff \frac{a^2 - 1}{a - 1} \in i\mathbb{R} \\ &\iff \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} \in i\mathbb{R} \\ &\iff a+1 \in i\mathbb{R} \\ &\iff \exists y \in \mathbb{R}, a+1 = iy \\ &\iff \exists y \in \mathbb{R}^*, a = -1 + iy \end{aligned}$$

(On a exclu le cas $y = 0$ puisque a est supposé différent de -1).

De même :

$$\begin{aligned} ABC \text{ est rectangle en } B &\iff \frac{a^3 - a^2}{a - a^2} \in i\mathbb{R} \\ &\iff \frac{a^2(a-1)}{a(1-a)} \in i\mathbb{R} \\ &\iff -a \in i\mathbb{R} \\ &\iff a \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
 ABC \text{ est rectangle en } C &\iff \frac{a^2 - a^3}{a - a^3} \in i\mathbb{R} \\
 &\iff \frac{a^2(1-a)}{a(1-a^2)} \in i\mathbb{R} \\
 &\iff \frac{a(1-a)}{(1-a)(1+a)} \in i\mathbb{R} \\
 &\iff \frac{a}{1+a} \in i\mathbb{R} \\
 &\iff \frac{a}{1+a} = -\overline{\left(\frac{a}{1+a}\right)} \\
 &\iff \frac{a}{1+a} = -\frac{\bar{a}}{1+\bar{a}} \\
 &\iff a(1+\bar{a}) = -\bar{a}(1+a) \\
 &\iff a + a\bar{a} = -\bar{a} - a\bar{a} \\
 &\iff a + \bar{a} = -2|a|^2
 \end{aligned}$$

Notons alors $x = \operatorname{Re}(a)$ et $y = \operatorname{Im}(a)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 ABC \text{ est rectangle en } C &\iff 2x = -2(x^2 + y^2) \\
 &\iff x + x^2 + y^2 = 0 \\
 &\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 = 0 \\
 &\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\
 &\iff \left|a + \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \\
 &\iff \left|a + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \\
 &\iff A \text{ est sur le cercle de centre d'affixe } \frac{-1}{2} \text{ et de rayon } \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Au final, ABC est rectangle si et seulement si :

$$a \in \underbrace{\{-1 + iy, y \in \mathbb{R}\}}_{\text{droite d'équation } x=-1} \cup \underbrace{\{iy, y \in \mathbb{R}\}}_{\text{droite d'équation } x=0} \cup \underbrace{\left\{z \in \mathbb{C}, \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}}_{\text{cercle de centre d'affixe } \frac{-1}{2} \text{ et de rayon } \frac{1}{2}} \cup \{1\}$$

Chapitre 10

Généralités sur les fonctions d'une variable réelle

10.1	Notion de fonction	254
10.1.1	Définitions	254
10.1.2	Transformations sur les courbes représentatives de fonctions	255
10.1.3	Monotonie	259
10.1.4	Parité	263
10.1.5	Périodicité	264
10.1.6	Réciproque	265
10.2	Opérations sur les fonctions	265
10.2.1	Les opérations sur les fonctions	265
10.2.2	Opérations sur les fonctions et monotonie	266
10.3	Fonctions bornées	268
10.4	Étude de fonction	270
10.4.1	Continuité	270
10.4.2	Dérivation	273
10.4.3	Étude des variations d'une fonction	278
10.4.4	Dérivées successives et fonctions continûment dérivables	282
10.4.5	Fonctions de référence	284
10.5	Extension au cas des fonctions à valeurs complexes	285
10.6	Exercices	287

Dans ce chapitre, et conformément au programme, on ne fera pas la distinction entre les notions de fonction et d'application. On renvoie au chapitre portant sur les applications pour plus d'information à ce sujet.

10.1 Notion de fonction

10.1.1 Définitions

Définition 10.1.1 – Fonction réelle d'une variable réelle

Soit A une partie de \mathbb{R} et f une application de A vers \mathbb{R} .

On dit alors que f est une *fonction réelle d'une variable réelle*.

A est alors appelé *domaine de définition*^a de f . L'ensemble des fonctions définies sur A à valeurs dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

On note

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

^a. On parle aussi de *domaine de définition*.

Remarque 10.1.2

En pratique, il arrive que le domaine de définition ne soit pas donné : ou bien il est évident et sous-entendu, ou bien c'est à vous de le déterminer !

Exercice 10.1.3

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ soit bien défini, il faut et il suffit que :

- $1+x \geq 0$
- $\sqrt{1+x} \neq 0$

Or :

$$1+x \geq 0 \iff x \geq -1$$

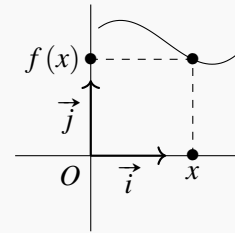
$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} \neq 0 &\iff 1+x \neq 0 \\ &\iff x \neq -1 \end{aligned}$$

f est donc définie sur $] -1; +\infty[$.

Remarque 10.1.4 : Représentation graphique d'une fonction

Nous avons déjà croisé la notion de *graphe* d'une application. En particulier, si A est une partie de \mathbb{R} et si $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, alors le graphe de f est l'ensemble $\{(x, f(x)), x \in A\}$.

Dans le cas présent, il s'agit donc d'un ensemble de couples de réels, que l'on peut assimiler à des coordonnées dans un repère du plan. Cela permet de tracer la *courbe représentative* d'une fonction.



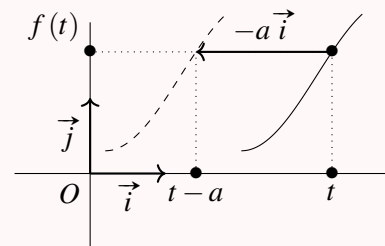
10.1.2 Transformations sur les courbes représentatives de fonctions

Les propriétés qui suivent ne sont pas à mémoriser par cœur. Il s'agit plus de comprendre leur fonctionnement, afin de pouvoir les réadapter à des situations nouvelles.

Propriété 10.1.5

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(x+a)$ est alors définie sur $\{t-a, t \in A\}$, et sa courbe dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan est obtenue en translatant celle de f par le vecteur $-a\vec{i}$.



En traits pleins, la courbe de f . En tirets, celle de $x \mapsto f(x+a)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x+a)$ est bien défini si et seulement si $x+a \in A$, c'est-à-dire si et seulement si il existe $t \in A$ tel que $x+a = t$ ou encore $x = t-a$.

L'application $x \mapsto f(x+a)$ a donc pour domaine de définition $\{t-a, t \in A\}$. Le graphe de cette fonction est alors

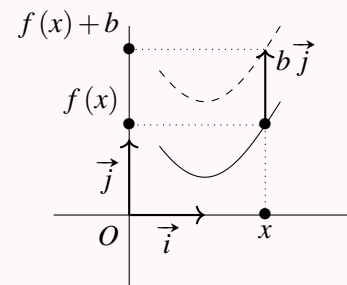
$$\{(x, f(x+a)), x \in \{t-a, t \in A\}\} = \{(t-a, f(t)), t \in A\}$$

La courbe associée, dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, est bien celle de f translatée par le vecteur $-a\vec{i}$. □

Propriété 10.1.6

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

Soit $b \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(x) + b$ est alors définie sur A , et sa courbe dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan est obtenue en translatant celle de f par le vecteur $b\vec{j}$.



Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) + b$ est bien défini si et seulement si f l'est, ainsi f et $x \mapsto f(x) + b$ ont le même domaine

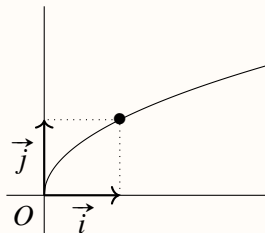
de définition. Le graphe de $x \mapsto f(x) + b$ est alors

$$\{(x, f(x) + b), x \in A\}$$

□

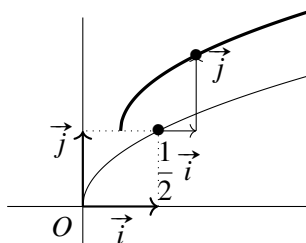
Exercice 10.1.7

Tracer la courbe de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x - \frac{1}{2}} + 1$, après avoir déterminé son domaine de définition, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Pour rappel, on donne la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur \mathbb{R}_+ .



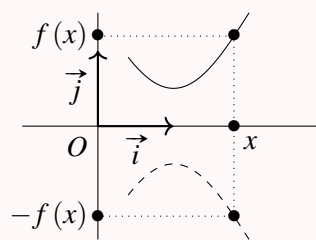
Correction. f étant définie sur \mathbb{R}_+ , l'application $x \mapsto \sqrt{x - \frac{1}{2}} = f\left(x + \frac{-1}{2}\right)$ est définie sur $\left\{t - \frac{-1}{2}, t \in \mathbb{R}_+\right\} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et on obtient sa courbe par une translation de vecteur $-\frac{-1}{2}\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{i}$ appliquée à la courbe de f .

Ainsi, $x \mapsto \sqrt{x - \frac{1}{2}} + 1$ est également définie sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et on obtient sa courbe via une translation de vecteur \vec{j} appliquée à la courbe précédente.



Propriété 10.1.8

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Alors $x \mapsto -f(x)$ est définie sur A , et dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, sa courbe est obtenue en appliquant une symétrie d'axe (O, \vec{i}) , dirigée par \vec{j} , à celle de f .



Démonstration. Il est clair que f et $x \mapsto -f(x)$ ont même domaine de définition. Le graphe de $x \mapsto -f(x)$ est

$$\{(x, -f(x)), x \in A\}$$

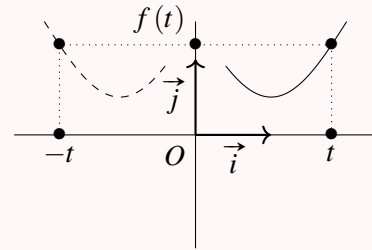
□

Propriété 10.1.9

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.
L'application $x \mapsto f(-x)$ est alors définie^a sur $\{-t, t \in A\}$.

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, la courbe de $x \mapsto f(-x)$ est obtenue en appliquant une symétrie d'axe (O, \vec{j}) , dirigée par \vec{i} , à la courbe de f .

^a. Cet ensemble est aussi noté $-A$, c'est l'ensemble des opposés des éléments de A .



Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x)$ est bien défini si et seulement si $-x \in A$, c'est-à-dire si et seulement si il existe $t \in A$ tel que $-x = t$ ou encore $x = -t$.

L'application $x \mapsto f(-x)$ a donc pour domaine de définition l'ensemble $\{-t, t \in A\}$.

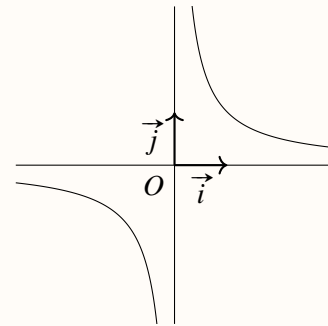
Le graphe de cette application est

$$\{(x, f(-x)), x \in \{-t, t \in A\}\} = \{(-t, f(t)), t \in A\}$$

□

Exercice 10.1.10

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , tracer la courbe de $g : x \mapsto 2 + \frac{1}{1-x}$ après avoir déterminé son domaine de définition.

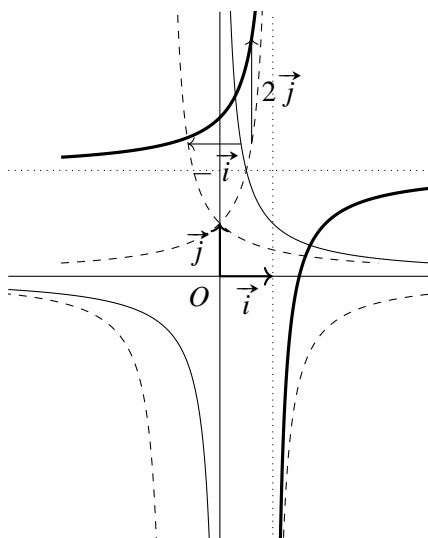


Courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* .

Correction. Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur \mathbb{R}^* . La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est définie sur $\{t-1, t \in \mathbb{R}^*\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et on obtient sa courbe via une translation de vecteur $-\vec{i}$ appliquée à la courbe de f .

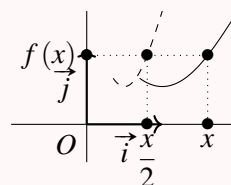
La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est alors définie sur $\{-t, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, et on obtient sa courbe par une symétrie d'axe (O, \vec{j}) , dirigée par \vec{i} , appliquée à la courbe précédente.

La fonction $g : x \mapsto 2 + \frac{1}{1-x}$ est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et on obtient sa courbe via une translation de vecteur $2\vec{j}$ appliquée à la courbe précédente.



Propriété 10.1.11

Soit A une partie de \mathbb{R} , soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$.
L'application $x \mapsto f(ax)$ est définie sur $\left\{\frac{t}{a}, t \in A\right\}$:
on obtient sa courbe, dans un repère du plan, en multipliant par $\frac{1}{a}$ l'abscisse de chaque point de la courbe de f .



Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(ax)$ est bien défini si et seulement si $ax \in A$, c'est-à-dire si et seulement si x est de la forme $\frac{t}{a}$ avec $t \in A$.

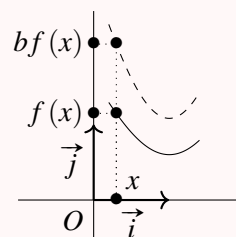
Le graphe de cette application est

$$\left\{(x, f(ax)), x \in \left\{\frac{t}{a}, t \in A\right\}\right\} = \left\{\left(\frac{t}{a}, f(t)\right), t \in A\right\}$$

□

Propriété 10.1.12

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Soit $b \in \mathbb{R}$.
L'application $x \mapsto bf(x)$ a le même domaine de définition que f . Dans un repère du plan, on obtient sa courbe en multipliant l'ordonnée de chaque point de la courbe de f par b .



Démonstration. Les domaines de définitions sont clairement identiques, et le graphe de l'application $x \mapsto bf(x)$ est

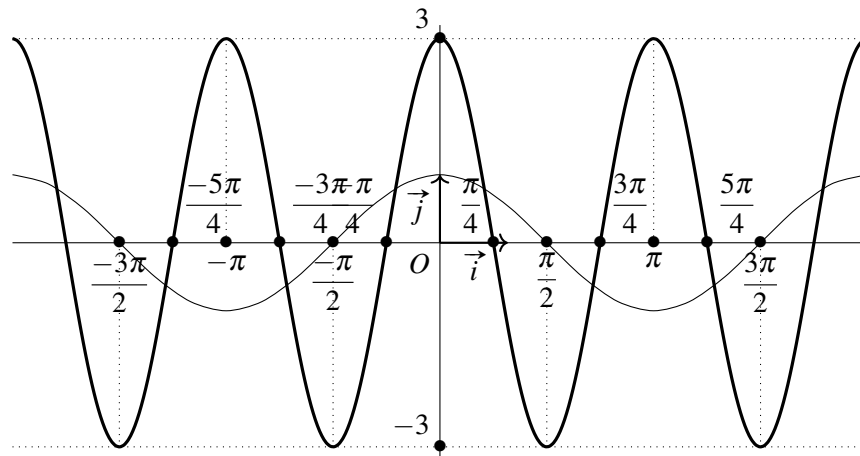
$$\{(x, bf(x)), x \in A\}$$

□

Exercice 10.1.13

Tracer la fonction $x \mapsto 3 \cos(2x)$ dans un repère orthonormé du plan.

Correction. \cos étant définie sur \mathbb{R} , il en est de même pour $x \mapsto 3 \cos(2x)$. La fonction cherchée est tracée en gras dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) suivant.



10.1.3 Monotonie

Définition 10.1.14 – Fonction croissante, décroissante

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. On dit que f est *croissante* sur A si :

$$\forall (x, y) \in A^2, x < y \implies f(x) \leq f(y)$$

On dit que f est *décroissante* sur A si :

$$\forall (x, y) \in A^2, x < y \implies f(x) \geq f(y)$$

Si f est croissante ou décroissante sur A , on dit que f est *monotone* sur A .

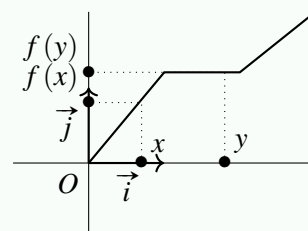
On parle aussi de *stricte croissance* ou *stricte décroissance* : On dit que f est *strictement croissante* sur A si :

$$\forall (x, y) \in A^2, x < y \implies f(x) < f(y)$$

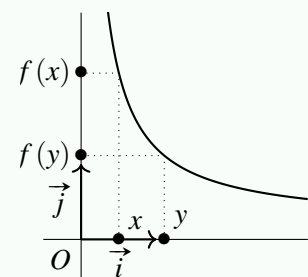
On dit que f est *strictement décroissante* sur A si :

$$\forall (x, y) \in A^2, x < y \implies f(x) > f(y)$$

Si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur A , on dit que f est *strictement monotone* sur A .



Fonction croissante



Fonction strictement décroissante

Remarque 10.1.15

- La stricte croissance (respectivement la stricte décroissance) implique la croissante (respectivement la décroissance).
- Une fonction peut être croissante et décroissante simultanément : dans ce cas, elle est constante.
- Si A est vide, ou ne contient qu'un seul élément, alors toute fonction $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est simultanément strictement croissante et simultanément décroissante (considérez la négation des définitions ci-dessus).

Cependant, si A contient au moins deux points, une fonction réelle définie sur A ne peut pas être simultanément strictement croissante et strictement décroissante sur A .

Exemple 10.1.16

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ et strictement décroissante sur \mathbb{R}_- .

En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $x < y$, on a

$$y^2 - x^2 = \underbrace{(y-x)}_{>0} \underbrace{(y+x)}_{>0} > 0$$

donc $x^2 < y^2$. La fonction $x \mapsto x^2$ est donc strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

De même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_-^2$ avec $x < y$, on a

$$y^2 - x^2 = \underbrace{(y-x)}_{>0} \underbrace{(y+x)}_{<0} < 0$$

donc $x^2 > y^2$.

Elle n'est pas monotone sur \mathbb{R} . En effet, $1 < 2$ et $1^2 < 2^2$ donc elle n'est pas décroissante sur \mathbb{R} . Cependant, $(-1)^2 = 1 > 4 = (-2)^2$ donc elle n'est pas non plus croissante sur \mathbb{R} .

Méthode 10.1.17 : Étudier la monotonie d'une fonction

Soit A une partie de \mathbb{R} contenant au moins deux points et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

Pour étudier, sans outil supplémentaire (comme la dérivation), le sens de variation de f , on peut :

- Considérer $(x, y) \in A^2$ tel que $x < y$.
- Étudier le signe de $f(y) - f(x)$.

Exercice 10.1.18

Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\sqrt{x} + 2$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Correction. f est bien définie sur \mathbb{R}_+ . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $x < y$. Alors :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= -\sqrt{y} + 2 - (-\sqrt{x} + 2) \\ &= \sqrt{x} - \sqrt{y} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < 0 \end{aligned}$$

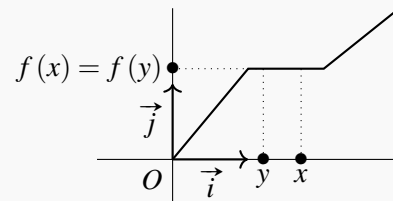
puisque $x < y$. Ainsi $f(y) - f(x) < 0$ donc $f(y) < f(x)$ ou encore $f(x) > f(y)$.

f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Remarque 10.1.19

Notez bien, particulièrement dans les cas de croissance et décroissance non strictes, qu'il ne s'agit que d'implications. Si f est une fonction réelle croissante sur une partie A de \mathbb{R} , et si $(x, y) \in A^2$ est tel que $f(x) \leq f(y)$, il est faux de dire que $x \leq y$, comme le montre la figure suivante.

Cependant, dans les cas de strictes croissance et décroissance, on peut remplacer ces implications par des équivalences, comme le montre la propriété suivante.



Ici, f est croissante
et $f(x) \leq f(y)$ mais $x > y$.

Propriété 10.1.20

Soit A une partie de \mathbb{R} contenant au moins deux points et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Alors :

$$f \text{ est strictement croissante sur } A \iff (\forall (x, y) \in A^2, x < y \iff f(x) < f(y))$$

$$f \text{ est strictement décroissante sur } A \iff (\forall (x, y) \in A^2, x < y \iff f(x) > f(y))$$

Démonstration. Le cas de la stricte décroissance est laissé en exercice. Supposons f strictement croissante sur A . Soit $(x, y) \in A^2$.

- Si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$ par définition de la stricte croissance.
- Montrons que $f(x) < f(y) \implies x < y$ en raisonnant par contraposée. Supposons que $x \geq y$: il y a alors deux cas :
 - Si $x = y$, alors $f(x) = f(y)$ donc $f(x) \geq f(y)$.
 - Si $x > y$, alors $f(x) > f(y)$ par stricte croissance de f . En particulier, $f(x) \geq f(y)$.

On a donc montré que $x \geq y \implies f(x) \geq f(y)$. Par contraposée, on obtient $f(x) < f(y) \implies x < y$.

L'implication réciproque étant évidente, on a bien montré que

$$f \text{ est strictement croissante sur } A \iff (\forall (x, y) \in A^2, x < y \iff f(x) < f(y))$$

□

Cette dernière propriété peut être utile pour résoudre certaines inéquations.

Exercice 10.1.21

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x-1}{x+2} \end{aligned}$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .
2. Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $a \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{2(a+1)-1}{a+3} < \frac{2(2a+\frac{1}{2})-1}{2a+\frac{5}{2}} \quad (10.1)$$

f est bien définie sur \mathbb{R}_+ .

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $x < y$. Alors :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \frac{2y-1}{y+2} - \frac{2x-1}{x+2} \\ &= \frac{(2y-1)(x+2) - (2x-1)(y+2)}{(y+2)(x+2)} \\ &= \frac{2xy + 4y - x - 2 - 2xy - 4x + y + 2}{(y+2)(x+2)} \\ &= \frac{5y - 5x}{(y+2)(x+2)} \\ &= \frac{5(y-x)}{(y+2)(x+2)} > 0 \end{aligned}$$

puisque $x < y$. Ainsi $f(y) - f(x) > 0$ donc $f(y) > f(x)$ et $f(x) < f(y)$: f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \frac{2(a+1)-1}{a+3} < \frac{2\left(2a+\frac{1}{2}\right)-1}{2a+\frac{5}{2}} &\iff f(a+1) < f\left(2a+\frac{1}{2}\right) \\ &\iff a+1 < 2a+\frac{1}{2} \\ &\iff 1-\frac{1}{2} < 2a-a \\ &\iff \frac{1}{2} < a \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (10.1) est donc $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

Propriété 10.1.22

Soit A une partie de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ strictement monotone sur A . Alors f est injective.

Démonstration. Soit $(x, y) \in A^2$ et supposons que $f(x) = f(y)$. f étant strictement monotone, il est impossible d'avoir $x < y$: en effet, dans ce cas on aurait $f(x) < f(y)$ (si f est strictement croissante) ou $f(x) > f(y)$ (si f est strictement décroissante).

De même, il est impossible que $y < x$.

On en déduit que $y \leq x \leq y$ et donc que $x = y$: f est bien injective. □

Exercice 10.1.23

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(x) + x = 1 \tag{10.2}$$

Correction. Rappelons que \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . Il en est de même pour $x \mapsto x$.

On en déduit que l'application $x \mapsto \ln(x) + x$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . 1 admet donc au plus un antécédent par cette application, autrement dit, l'équation (10.2) admet au plus une solution.

Remarquons que $\ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$: 1 est donc solution de l'équation (10.2), et d'après ce qui précède, c'est la seule. L'ensemble des solutions de l'équation (10.2) est donc $\{1\}$.

10.1.4 Parité

Définition 10.1.24 – Fonction paire, impaire

Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, où A est une partie de \mathbb{R} .

On suppose que A est centrée en 0, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in A, -x \in A$$

Alors :

— f est dite *paire* si :

$$\forall x \in A, f(-x) = f(x)$$

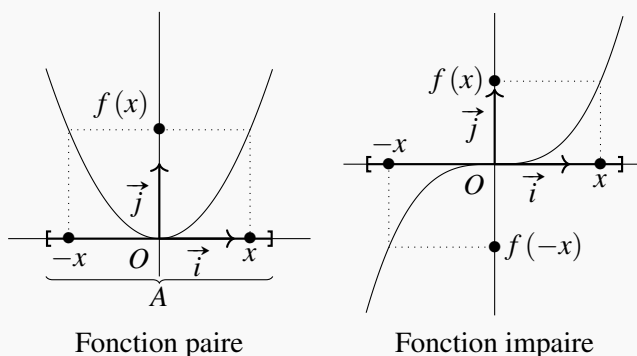
— f est dite *impaire* si :

$$\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$$

Étudier la *parité* d'une fonction, c'est déterminer si elle est paire, impaire, les deux ou ni l'un ni l'autre.

Remarque 10.1.25

D'après les propriétés 10.1.8 et 10.1.9, la courbe d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, tandis que la courbe d'une fonction impaire dans ce même repère est symétrique par rapport à l'origine du repère.

**Remarque 10.1.26**

D'un point de vue purement logique, si A est vide, toute fonction $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est paire et impaire (considérez la négation de la définition).

Exemple 10.1.27

La fonction cos est paire, les fonctions sin et tan sont impaires. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est paire : elle est définie sur \mathbb{R} , qui est centré en 0. De plus, pour tout réel x :

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = f(x)$$

La fonction $g : x \mapsto x^3$ est impaire : elle est aussi définie sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

$$g(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3 = -f(x)$$

Exercice 10.1.28

Étudier la parité de la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

10.1.5 Périodicité**Définition 10.1.29 – Fonction périodique**

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. On dit que f est *périodique* lorsqu'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall x \in A, x + T \in A \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

T est alors appelé une *période* de f , et f est dite T -périodique.

Remarque 10.1.30

A nouveau, si A est vide, toute fonction $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est logiquement considérée périodique, et tout réel non nul en est une période.

Exemple 10.1.31

\cos et \sin sont 2π -périodiques.

Exercice 10.1.32

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique et tracer sa courbe.

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

puisque

$$\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1 < \lfloor x \rfloor + 1 + 1$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x + 1) &= x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor \\ &= x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= x - \lfloor x \rfloor \\ &= f(x) \end{aligned}$$

De plus, on a bien :

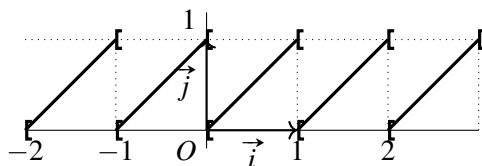
$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \in \mathbb{R}$$

f est donc 1-périodique sur \mathbb{R} .

De plus, pour tout $x \in [0; 1[$, on a

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor = x$$

et on en déduit la courbe de f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan :



10.1.6 Réciproque

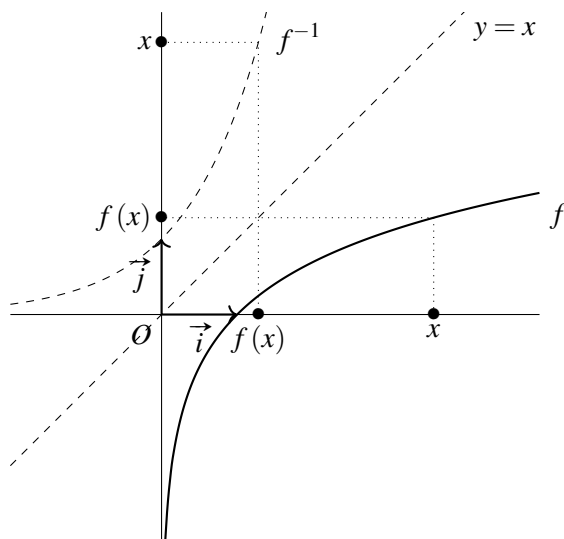
Propriété 10.1.33

Soient A et B deux parties de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, B)$. On suppose que f est bijective : elle admet donc une réciproque, notée f^{-1} .

Le graphe de f^{-1} est

$$\{(y, f^{-1}(y)), y \in B\} = \{(f(x), f^{-1}(f(x))), x \in A\} = \{(f(x), x), x \in A\}$$

Dans un repère quelconque du plan, la courbe de f^{-1} est alors obtenue en appliquant une symétrie d'axe $y = x$ à celle de f .



10.2 Opérations sur les fonctions

10.2.1 Les opérations sur les fonctions

Définition 10.2.1 – Somme et différence de deux fonctions

Soit A une partie de \mathbb{R} et $(f, g) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})^2$.

On appelle *somme de f et g* l'application

$$\begin{aligned} f + g &: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

On appelle *différence de f par g* l'application

$$\begin{aligned} f - g &: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - g(x) \end{aligned}$$

Définition 10.2.2 – Produit d'une fonction par un réel

Soit A une partie de \mathbb{R} , $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle *produit de f par λ* l'application suivante :

$$\begin{aligned} \lambda f &: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

Définition 10.2.3 – Produit et quotient de deux fonctions

Soit A une partie de \mathbb{R} et $(f, g) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})^2$.

On appelle *produit de f et g* l'application

$$\begin{aligned} fg &: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)g(x) \end{aligned}$$

fg peut aussi être notée $f \times g$.

Si g ne s'annule pas sur A , on appelle *quotient de f par g* l'application

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} &: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

Définition 10.2.4 – Rappel - Composition

Soient A et B deux parties de \mathbb{R} . Soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $g \in \mathcal{F}(B, \mathbb{R})$. On appelle *composée de f et g* l'application

$$\begin{aligned} g \circ f &: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

10.2.2 Opérations sur les fonctions et monotonie**Propriété 10.2.5 – Somme de deux fonctions monotones**

Soit A une partie de \mathbb{R} contenant au moins deux points et $(f, g) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})^2$.

Si f et g sont monotones, de même sens de variation, alors $f + g$ est aussi monotone, de même sens de variation que f et g .

De plus, si l'une au moins des deux fonctions f et g est strictement monotone, alors $f + g$ est strictement monotone.

Démonstration. Le cas des fonctions croissantes est laissé en exercice. Supposons f et g décroissantes sur A .

Soit $(x, y) \in A^2$ avec $x < y$. Puisque f et g sont décroissantes, on a $f(x) \geq f(y)$ et $g(x) \geq g(y)$. Alors :

$$f(x) + g(x) \geq f(y) + g(y) \text{ car } f(x) \geq f(y) \text{ et } g(x) \geq g(y)$$

f et g est donc décroissante.

Supposons de plus que f est strictement décroissante. Alors pour tout $(x, y) \in A^2$ tel que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$ et $g(x) \geq g(y)$ donc

$$f(x) + g(x) > f(y) + g(y)$$

et $f + g$ est strictement décroissante. □

Propriété 10.2.6

Soit A une partie de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda > 0$, alors λf est monotone de même sens de variation que f .
- Si $\lambda < 0$, alors λf est monotone de sens de variation contraire à f .
- Si $\lambda = 0$, alors λf est constante : c'est la fonction nulle.

De plus, si $\lambda \neq 0$ et si f est strictement monotone, alors λf est aussi strictement monotone.

Démonstration. Nous traiterons le cas où f est croissante.

Le cas $\lambda = 0$ étant évident, nous supposons que $\lambda \neq 0$.

Soit $(x, y) \in A^2$ avec $x < y$. Alors :

$$\lambda f(y) - \lambda f(x) = \lambda (f(y) - f(x))$$

qui est du même signe que λ puisque $f(y) - f(x) \geq 0$ par croissance de f .

Ainsi, si $\lambda > 0$, alors $\lambda f(y) - \lambda f(x) \geq 0$ donc λf est croissante. Si $\lambda < 0$, λf est décroissante.

De plus, si f est strictement croissante et si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda f(y) - \lambda f(x)$ est non nul : les inégalités précédentes sont alors strictes et λf est strictement monotone. \square

Exemple 10.2.7

Si $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est croissante sur $A \subset \mathbb{R}$, alors $-f$ est décroissante sur A .

Remarque 10.2.8 : Un piège classique

Le produit de deux fonctions monotones n'est pas forcément monotone. Par exemple, la fonction $x \mapsto x$ est croissante sur \mathbb{R} , mais son produit avec elle-même, à savoir $x \mapsto x^2$, ne l'est pas.

Propriété 10.2.9 – Composition et monotonie

Soient A et B des parties de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $g \in \mathcal{F}(B, \mathbb{R})$.

- Si f et g sont monotones (respectivement strictement monotones) de même sens de variation, alors $g \circ f$ est croissante (respectivement strictement croissante) sur A .
- Si f et g sont monotones (respectivement strictement monotones) de sens de variation contraires, alors $g \circ f$ est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur A .

Démonstration. Prenons par exemple le cas où f est croissante sur A et g est décroissante sur B . Soit $(x, y) \in A^2$ tel que $x < y$. Par décroissance de f , on a

$$f(x) > f(y)$$

puis par croissance de g

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) > g(f(y)) = (g \circ f)(y)$$

Ainsi, $g \circ f$ est bien décroissante sur A . \square

Exercice 10.2.10

On rappelle que la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . Déterminer le sens de variation de :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -e^{\frac{1}{x+1}} + x^2 \end{aligned}$$

Correction. $x \mapsto x + 1$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , à valeurs dans $[1; +\infty[$.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, à valeurs dans $]0; 1]$. Par composition, $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* , à valeurs dans $]0; 1]$.

Or, $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $]0; 1]$. Par composition, $x \mapsto e^{\frac{1}{x+1}}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* et $x \mapsto -e^{\frac{1}{x+1}}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Enfin, $x \mapsto x^2$ est (strictement) croissante sur \mathbb{R}_+^* : par somme, f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

10.3 Fonctions bornées

Définition 10.3.1 – Fonction majorée, minorée, bornée

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

— On dit que f est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A, f(x) \leq M$$

M est alors un *majorant* de f sur A .

— On dit que f est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A, m \leq f(x)$$

m est alors un *minorant* de f sur A .

— On dit que f est *bornée* si f est majorée et minorée.

Remarque 10.3.2

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Alors f est majorée (respectivement minorée, bornée) si et seulement si $f(A)$ est majorée^a (respectivement minorée, bornée).

a. Rappelons que $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.

Pour montrer qu'une fonction est bornée, on peut étudier $|f|$ au lieu de montrer que f est majorée et minorée.

Propriété 10.3.3

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Alors f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Démonstration. — Supposons f bornée. Alors il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in A, m \leq f(x) \leq M$$

Posons $S = \max(|m|, |M|)$. Alors $|M| \leq S$ donc $M \leq S$. De plus, $|m| \leq S$ donc $m \geq -S$. Ainsi, pour tout $x \in A$, on a :

$$-S \leq m \leq f(x) \leq M \leq S$$

ou encore

$$|f(x)| \leq S$$

$|f|$ est donc majorée (par S).

— Supposons que $|f|$ soit majorée. Alors il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$:

$$|f(x)| \leq S$$

ou encore

$$-S \leq f(x) \leq S$$

f est donc minorée (par $-S$) et majorée (par S).

□

Définition 10.3.4 – Maximum, minimum

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

- Soit $M \in \mathbb{R}$. Si M est un majorant de f sur A et s'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = M$, on dit que M est le *maximum* de f sur A , et que ce maximum est *atteint en* x .
- Soit $m \in \mathbb{R}$. Si m est un minorant de f sur A et s'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = m$, on dit que m est le *minimum* de f sur A , et que ce minimum est *atteint en* x .
- Soit $a \in A$. On dit que f admet un *extremum* en a si f admet un minimum ou un maximum en a .

Démonstration. Cette définition sous-entend que le maximum de f , s'il existe, est unique. C'est bien le cas : supposons en effet qu'il existe $(M, M') \in \mathbb{R}^2$, tel que M et M' soient deux majorants de f sur A . Supposons également qu'il existe $(x, x') \in A^2$ tel que $M = f(x)$ et $M' = f(x')$.

D'une part, $x \in A$ et M' est un majorant de f sur A , donc $M = f(x) \leq M'$. D'autre part, $x' \in A$ et M est un majorant de f sur A donc $M' = f(x') \leq M$. On a donc $M \leq M' \leq M$ et $M = M'$, ce qui prouve l'unicité de ce maximum.

Bien évidemment, le raisonnement est similaire pour le minimum.

□

Exercice 10.3.5

Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x^2 - 2x \end{aligned}$$

admet un maximum et le déterminer.

Correction. On peut reconnaître un début d'identité remarquable.

Pour tout réel x , on a

$$f(x) = -(x^2 + 2x) = -((x+1)^2 - 1) = 1 - (x+1)^2 \leq 1$$

donc f est majorée par 1. De plus

$$f(-1) = 1 - (1-1)^2 = 1$$

donc 1 est atteint par f et est le maximum de f sur \mathbb{R} .

Remarque 10.3.6

Dans l'absolu, rien ne garantit qu'une fonction réelle soit majorée et/ou minorée. Cependant, même dans le cas d'une fonction majorée (respectivement minorée), rien ne prouve que cette fonction admette un maximum (respectivement minimum).

Considérons par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

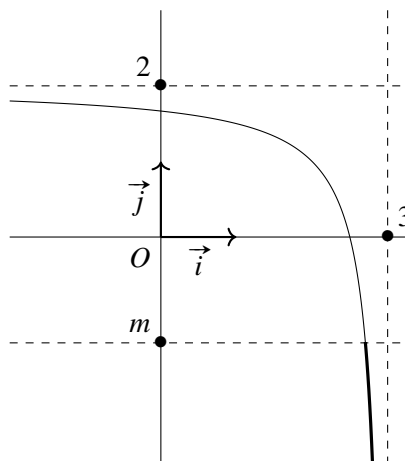
f est minorée^a par 0 sur \mathbb{R}_+^* . Cependant, f n'admet pas de minimum. Raisonnons par l'absurde pour le prouver et supposons que f admette $m \in \mathbb{R}$ pour minimum, atteint en $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, m = f(a) \leq f(x)$$

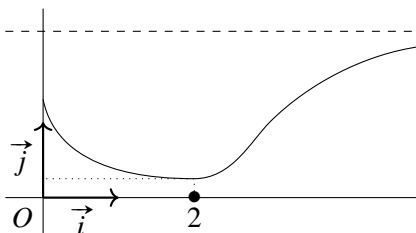
En particulier, $a+1 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $f(a) \leq f(a+1)$. Cependant, f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* , donc $f(a+1) < f(a)$. On a donc $f(a+1) < f(a) \leq f(a+1)$, ce qui est absurde.

f n'admet donc pas de minimum sur \mathbb{R}_+^* .

a. D'ailleurs, 0 n'est pas n'importe quel minorant de f : c'est le plus grand. Cette notion de « plus grand minorant » porte le nom de *borne inférieure*, que nous étudierons dans un chapitre ultérieur.



Représentation graphique d'une fonction majorée (par 2) mais non minorée sur $]-\infty; 3[$. La courbe ne passe jamais au dessus de 2 : la fonction est majorée par 2. Cependant, pour tout réel m , il y a toujours une partie de la courbe située strictement en dessous de m : la fonction n'est pas minorée.



Représentation graphique d'une fonction définie sur \mathbb{R}_+ admettant un minimum en 2. Cette fonction semble majorée, mais aucun majorant ne semble atteint : a priori, elle n'admet pas de maximum.

10.4 Étude de fonction

Les résultats de cette section seront admis pour le moment et feront l'objet de prochains chapitres.

10.4.1 Continuité

Définition 10.4.1 – Fonction continue

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Soit $a \in A$.

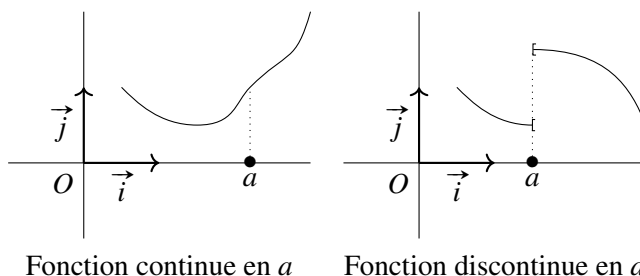
On dit que f est *continue en a* si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Si f n'est pas continue en a , on dit que f est *discontinue en a* .

Si f est continue en tout point de A , on dit que f est *continue sur A* .

Intuitivement, si A est un intervalle de \mathbb{R} , on dit que f est continue sur A si on peut « tracer la courbe de f sans lever le crayon ».

**Propriété 10.4.2 – Fonctions de référence**

- Les fonctions polynomiales (y compris constantes) sont continues sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^* .
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- La fonction \exp est continue sur \mathbb{R} .
- La fonction \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} .
- Les fonctions \cos et \sin sont continues sur \mathbb{R} .
- La fonction \tan est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Propriété 10.4.3 – Opérations sur les fonctions continues

Soit A une partie de \mathbb{R} et soit $(f, g) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})^2$ continues.

Alors $f + g$ et fg sont continues sur A .

De plus, si g ne s'annule pas sur A , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur A .

Propriété 10.4.4 – Composée de fonctions continues

Soient A et B deux parties de \mathbb{R} . Soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $g \in \mathcal{F}(B, \mathbb{R})$ continues.

Alors $g \circ f$ est continue sur A .

Exercice 10.4.5

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi &: [0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x} + 2 \end{aligned}$$

est continue.

Correction. $x \mapsto 1 - x$ est continue sur $[0; 1[$, à valeurs dans $]0; 1]$.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; 1]$.

Par composition, on en déduit que $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est continue sur $[0; 1[$. La fonction $x \mapsto 2$ étant continue sur ce même intervalle, φ est bien continue sur $[0; 1[$.

On rappelle ici, sans démonstration, une première formulation du théorème des valeurs intermédiaires. Celle-ci sera revue et approfondie un peu plus tard dans l'année.

Théorème 10.4.6 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue. Alors pour y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a; b]$ tel que $y = f(x)$.

Exercice 10.4.7

Montrer que l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet au moins une solution :

$$e^x - x = 4 \quad (10.3)$$

Correction. La fonction $f : x \mapsto e^x - x$ est continue sur \mathbb{R}_+ en tant que somme de fonctions continues sur \mathbb{R}_+ .

De plus, $f(0) = 1$ et $f(3) = e^3 - 3 \geq 2^3 - 3 = 5 \geq 4$. Ainsi, 4 est compris entre $f(0)$ et $f(3)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [0; 3]$ tel que $f(x) = e^x - x = 4$.

En particulier, l'équation $e^x - x = 4$ admet donc bien au moins une solution sur \mathbb{R}_+ .

Dans le cas d'une fonction strictement monotone, et donc injective, on obtient le théorème de la bijection.

Théorème 10.4.8 – Théorème de la bijection

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue strictement monotone. Alors pour y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $x \in [a; b]$ tel que $y = f(x)$.

Exercice 10.4.9

Montrer que l'équation suivante, d'inconnue $x \in [0; 2]$, admet exactement une solution.

$$e^x - e^{-x} = 3 \quad (10.4)$$

Correction. $x \mapsto -x$ est continue strictement décroissante sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , et \exp est continue strictement croissante sur \mathbb{R} . On en déduit que l'application $f : x \mapsto e^x - e^{-x}$ est continue sur \mathbb{R} . De plus, $x \mapsto -e^{-x}$ est strictement croissante sur \mathbb{R} et il en est de même pour f .

f est donc continue strictement croissante sur \mathbb{R} .

Cependant, $f(0) = 1 - 1 = 0$ et $f(2) = e^2 - e^{-2} \geq e^2 \geq 4 \geq 3$. Ainsi, 3 est compris entre $f(0)$ et $f(2)$. D'après le théorème de la bijection, l'équation (10.4), c'est-à-dire $f(x) = 3$, admet une unique solution sur $[0; 2]$.

A propos de la continuité, voici un dernier résultat que nous reverrons de nouveau un peu plus loin.

Théorème 10.4.10 – Théorème des bornes atteintes

Soit I un intervalle non vide fermé borné de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur I .

Théorème 10.4.11

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Soit $f \in \mathcal{F}(I, J)$ continue et bijective. Alors f est strictement monotone sur I . De plus, f^{-1} est continue sur J et est strictement monotone de même sens de variation que f .

Exemple 10.4.12

\exp est une bijection continue de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* . On sait aussi que \exp est strictement croissante. Sa réciproque, à savoir \ln , est donc une bijection continue de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} , et est aussi strictement croissante.

10.4.2 Dérivation

Définition 10.4.13 – Dérivée d'une fonction

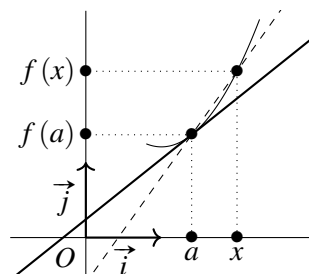
Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si l'application

$$\begin{aligned} \tau_a : I \setminus \{a\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

admet une limite finie l en a .

Dans ce cas, l est appelé *nombre dérivé de f en a* et est noté $f'(a)$.

Si A est une réunion d'intervalles contenant tous au moins deux points, on dit que f est *dérivable sur A* si f est dérivable en chaque point de A . f' est alors appelée *dérivée de f sur A* .



Si f est dérivable en a , lorsque x tends vers a , la corde (en pointillés) « tend » vers une droite limite appelée *tangente à la courbe de f en a* . Le coefficient directeur de la corde est $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, il tend vers $f'(a)$ lorsque x tend vers a : cette limite est le coefficient directeur de la tangente en a .

Remarque 10.4.14 : Autres notations

En reprenant les notations de la définition précédente, et en supposant f dérivable sur I , la dérivée de f peut aussi être notée $\frac{df}{dx}$.

En toute rigueur, $\frac{df}{dx}$ est donc une fonction (c'est f' !).

Il existe aussi une autre notation, pratique mais moins rigoureuse (explicitement au programme, cependant) :

$\frac{d}{dx}(f(x))$ désigne la dérivée de l'expression $f(x)$ par rapport à x .

C'est pratique pour les calculs de dérivée : par exemple, en admettant que $x \mapsto (x+1)\ln(2x+1)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , alors sur ce même intervalle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}((x+1)\ln(2x+1)) &= \left(\frac{d}{dx}(x+1)\right)\ln(2x+1) + (x+1)\frac{d}{dx}(\ln(2x+1)) \\ &= 1 \times \ln(2x+1) + (x+1)\frac{\frac{d}{dx}(2x+1)}{2x+1} \\ &= \ln(2x+1) + (x+1) \times \frac{2}{2x+1} \end{aligned}$$

Exercice 10.4.15

Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.

Correction. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} \quad (10.5)$$

$$= \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} \quad (10.6)$$

$$= x + a \xrightarrow{x \rightarrow a} 2a \quad (10.7)$$

Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $f'(a) = 2a$.

Exercice 10.4.16

La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en 0 ?

Correction. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{|x| - |0|}{x - 0} &= \frac{|x|}{x} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1$$

L'application $x \mapsto \frac{|x| - |0|}{x - 0}$ n'admet donc pas de limite en 0 : elle n'y est pas dérivable.

Si B est une partie de \mathbb{R} , l'ensemble des fonctions dérivables sur A à valeurs dans B sera noté $\mathcal{D}(A, \mathbb{R})$.

Exercice 10.4.17

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Propriété 10.4.18

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
- Si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .

Remarque 10.4.19

Comme le montre l'exemple de la valeur absolue, la réciproque est fautive : la continuité n'implique pas la dérivabilité.

Propriété 10.4.20 – Équation de la tangente en un point

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable en a .

Alors, dans le plan rapporté à un repère quelconque, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration. La tangente T à la courbe de f en a étant une droite oblique, elle admet une équation de la forme $y = \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. α étant le coefficient directeur de cette droite, on a par définition $\alpha = f'(a)$. De plus, le point de coordonnées $(a, f(a))$ est sur T , ainsi ses coordonnées vérifient l'équation de T donc :

$$f(a) = \alpha a + \beta = f'(a)a + \beta$$

et $\beta = f(a) - f'(a)a$. Finalement, T a bien pour équation

$$y = \alpha x + \beta = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x - a) + f(a)$$

□

Remarque 10.4.21

Vous trouverez un récapitulatif des fonctions de référence et de leurs dérivées dans la section 10.4.5.

Propriété 10.4.22 – Opérations sur les dérivées

Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points et $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$ dérivables. Alors $f + g$ et fg sont dérivables sur A . De plus :

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est aussi dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Corollaire 10.4.23 – Linéarité de la dérivation

Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, soit $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$ dérivables et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

Exercice 10.4.24

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur domaine de définition et déterminer leurs dérivées.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (2x^2 + 1)e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &:]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

Propriété 10.4.25 – Dérivée d'une composée

Soient A et B deux intervalles de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soient $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $g \in \mathcal{F}(B, \mathbb{R})$ dérivables. Alors $g \circ f$ est dérivable sur A et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Autrement dit, pour tout $x \in A$:

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) g'(f(x))$$

Voici quelques cas particuliers à connaître et savoir retrouver. Ici, u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} contenant au moins deux points.

f	f'	Conditions
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	u est strictement positive sur I
$u^n, n \in \mathbb{N}$	$nu'u^{n-1}$	
$u^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	$nu'u^{n-1}$	u ne s'annule pas sur I
$u^\alpha, \alpha < 1$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$	u est strictement positive sur I
$u^\alpha, \alpha > 1$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$	u est positive sur I
e^u	$u' e^u$	
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	u est strictement positive sur I

Exercice 10.4.26

Montrer que la fonction suivante est dérivable sur son domaine de définition :

$$\begin{aligned} f &:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Correction. $x \mapsto 1-x^2$ est dérivable sur $] -1; 1[$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et elle ne s'y annule pas.

De plus, $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $] -1; 1[$. Par quotient, f est dérivable sur $] -1; 1[$.

De plus, la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $] -1; 1[$ est la fonction $x \mapsto \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ainsi, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \sqrt{1-x^2} - e^x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}^2} \\ &= \frac{e^x}{1-x^2} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{e^x}{1-x^2} \frac{\sqrt{1-x^2}^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2} (1-x^2)} (1+x-x^2) \end{aligned}$$

Propriété 10.4.27 – Dérivée de la réciproque

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(I, J)$ dérivable. On suppose que f est bijective.

— Soit $b \in J$. Alors :

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } b \iff f(f^{-1}(b)) \neq 0$$

et dans ce cas

$$f^{-1'}(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

— Si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$f^{-1'} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

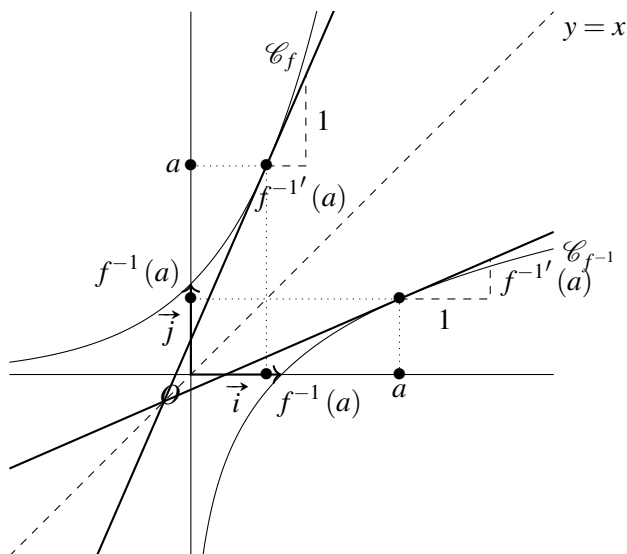
Exemple 10.4.28

On sait que la fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* , dont la réciproque est \ln . On sait aussi que \exp est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée elle-même. En particulier, cette dérivée ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

On en déduit que \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \ln'(x) &= \frac{1}{\exp'(\ln(x))} \\ &= \frac{1}{\exp(\ln(x))} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Explication graphique (qui n'est pas une preuve!)



Dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , \mathcal{C}_f est la courbe d'une fonction f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est la courbe de sa réciproque, supposée existante.

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en a est $f^{-1'}(a)$. Les deux courbes étant symétriques l'une de l'autre par

rapport à la droite d'équation $y = x$, le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f en $f^{-1}(a)$ est $\frac{1}{f^{-1}'(a)}$. On a donc :

$$f'(f^{-1}(a)) = \frac{1}{f^{-1}'(a)}$$

ce qui donne, en inversant, la formule du théorème précédent.

10.4.3 Étude des variations d'une fonction

Propriété 10.4.29

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable. Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$

Si de plus, f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I , alors f est strictement monotone sur I .

Remarque 10.4.30

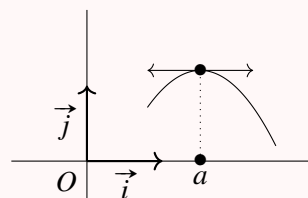
Attention : même si f est strictement monotone sur I , on ne peut pas en déduire que f' ne s'annule pas sur I . Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} mais sa dérivée, $x \mapsto 3x^2$, s'annule en 0.

Propriété 10.4.31 – Condition nécessaire pour un extremum

Soit I un intervalle **ouvert non vide** et $a \in I$.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable.

Si f admet un extremum en a , alors $f'(a) = 0$.

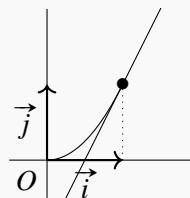


Si f admet un extremum en a , alors la courbe de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) présente une tangente horizontale.

Remarque 10.4.32 : Piège 1

Pour que le résultat précédent puisse être appliqué, il faut absolument travailler sur un intervalle ouvert. Ce même résultat est faux en un point qui serait une borne de l'intervalle considéré.

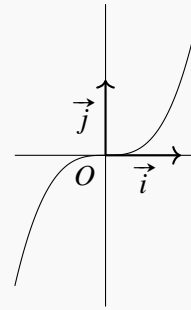
Par exemple, l'application $x \mapsto x^2$, restreinte à $[0; 1]$, admet un maximum en 1 : cependant, sa dérivée en 1 vaut $2 \times 1 = 2 \neq 0$.



La fonction $x \mapsto x^2$ présente bien un maximum en 1, mais sa tangente n'y est pas horizontale puisque 1 est une borne de son intervalle de définition.

Remarque 10.4.33 : Piège 2

La propriété précédente n'admet pas de réciproque. Par exemple, l'application $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur \mathbb{R} , et sa dérivée, à savoir $f' : x \mapsto 3x^2$, s'annule en 0. Toutefois, f ne présente pas d'extremum en 0, puisque $f(0) = 0$, $f(-1) = -1 < 0$ (0 n'est donc pas un minorant de f) et $f(1) = 1 > 0$ (0 n'est donc pas non plus un majorant de f).



$f : x \mapsto x^3$ présente bien une tangente horizontale en 0, qui n'est pas pour autant un extremum de f .

Méthode 10.4.34 : Étudier une fonction

Soit A une réunion d'intervalles de \mathbb{R} , contenant tous au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. On souhaite *étudier* la fonction f , c'est-à-dire déterminer sa régularité (est-elle continue ? Dérivable ?), ses variations, ses extrema (mais aussi, idéalement, sa convexité et ses limites et asymptotes : cela fera l'objet de chapitres ultérieurs).

- On cherche si f présente des propriétés nous permettant de réduire le domaine d'étude.
 - Si f est T -périodique, avec $T \in \mathbb{R}_+^*$, il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur T : le reste de l'étude se déduit par translation.
 - Si f est paire, il suffit d'étudier f sur $A \cap \mathbb{R}_+$ (ou $A \cap \mathbb{R}_-$) : le reste de l'étude se déduit par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
 - Si f est impaire, il suffit d'étudier f sur $A \cap \mathbb{R}_+$ (ou $A \cap \mathbb{R}_-$) : le reste de l'étude se déduit par symétrie par rapport à l'origine du repère.
- Notez qu'il est possible de combiner ces réductions : si f est T -périodique et paire ou impaire, on peut se contenter d'étudier f sur $A \cap [0; T]$: on obtient alors l'étude de f sur $A \cap [-T; T]$ par parité, et sur A tout entier par translation.
- Si f est dérivable (et donc, continue) : on calcule f' puis son signe, qui donne les variations de f . On peut alors synthétiser ces variations dans un *tableau de variation*.
- On cherche des éléments remarquables concernant f : tangentes horizontales, points particuliers, asymptotes...
- On peut alors tracer la courbe de f , en commençant par les éléments remarquables précédemment trouvés.

Exercice 10.4.35

Tracer la courbe de la fonction

$$f : x \mapsto \cos(x) - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Déterminer ses extrema.

Correction. f est définie sur \mathbb{R} . Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \cos(x + 2\pi) - \frac{1}{2} \cos(2(x + 2\pi)) \\ &= \cos(x) - \frac{1}{2} \cos(2x + 4\pi) \\ &= \cos(x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc f est 2π -périodique.

De plus, pour tout réel x , et puisque \cos est paire :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) - \frac{1}{2} \cos(-2x) \\ &= \cos(x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc f est paire.

Il nous suffit donc de tracer la courbe de f sur $[0; \pi]$: par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on obtiendra la courbe de f sur $[-\pi; \pi]$, puis le reste de la courbe par translations de vecteur $\pm 2\pi \vec{i}$.

En tant que composée et somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , f est dérivable sur \mathbb{R} , donc sur $[0; \pi]$. De plus, pour tout $x \in [0; \pi]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) - \frac{1}{2}(-2\sin(2x)) \\ &= -\sin(x) + \sin(2x) \\ &= -\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) \\ &= \sin(x)(-1 + 2\cos(x)) \\ &= \sin(x)(2\cos(x) - 1) \end{aligned}$$

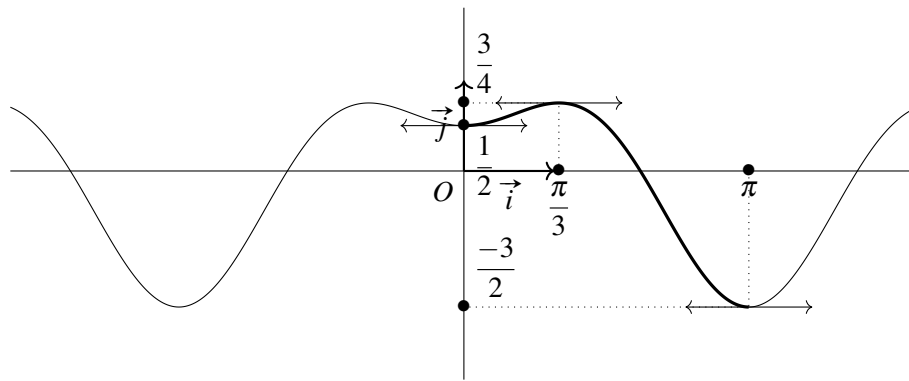
On cherche ensuite le signe de $f'(x)$, et en particulier celui de $2\cos(x) - 1$. Or, \cos est strictement décroissante sur $[0; \pi]$ et $2 > 0$ donc $x \mapsto 2\cos(x) - 1$ est strictement décroissante sur $[0; \pi]$. De plus, pour $x \in [0; \pi]$:

$$\begin{aligned} 2\cos(x) - 1 = 0 &\iff \cos(x) = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π		
$\sin(x)$	0	+	+	0	
$2\cos(x) - 1$		+	0	-	
$f'(x)$	0	+	0	-	0
f	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$		

On a, sur $[0; \pi]$, trois tangentes horizontales : en 0, en $\frac{\pi}{3}$ et en π . La courbe est la suivante :



En particulier, $\frac{3}{4}$ est le maximum de f , et les points en lequel ce maximum est atteint sont ceux de l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
De plus, $-\frac{3}{2}$ est le minimum de f , atteint en les points de $\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 10.4.36

Étudier et tracer la courbe de la fonction de l'exercice 10.4.26 :

$$\begin{aligned} f &:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

On donne $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \simeq 0.69$ et $\sqrt{5} \simeq 2.24$.

Correction. f ne présente pas de symétrie particulière. On a vu que f est dérivable sur $] -1; 1[$ et que

$$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} (1+x-x^2)$$

Établissons un tableau de signes. Pour cela, nous avons besoin du signe de $x \mapsto 1+x-x^2$ sur $] -1; 1[$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$ et ses deux racines sont

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} & r_2 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} & &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Remarquons que r_1 n'est pas dans le domaine de définition de f .

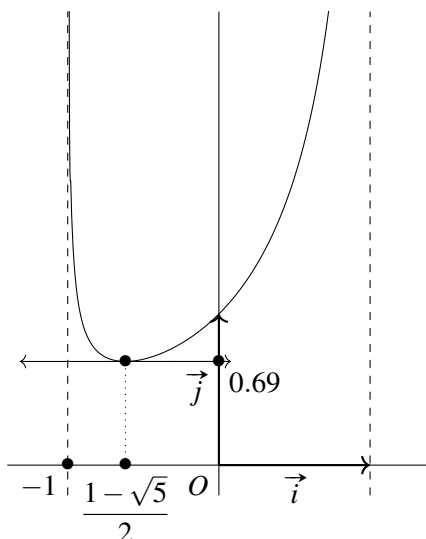
Le tableau de variation de f est donc le suivant :

x	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	1
$\frac{e^x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$			
	+		+
$1+x-x^2$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$+\infty$

Remarquons aussi que $f(0)$ est facile à calculer :

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{e^0}{\sqrt{1-0^2}} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

La courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) est la suivante :



10.4.4 Dérivées successives et fonctions continûment dérivables

Définition 10.4.37 – Dérivées successives

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On note $f^{(0)} = f$.

On définit la notion de dérivées successives par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est n -fois dérivable sur I si :

$$\begin{cases} f \text{ est } n-1 \text{ fois dérivable sur } I \text{ ou } n=1 \\ f^{(n-1)} \text{ est dérivable sur } I \end{cases}$$

On note alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$: c'est la *dérivée n -ième* de f sur I .

Remarque 10.4.38

En reprenant les notations de la définition précédente, et sous réserve d'existence, on note ainsi $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')' = f''$ (dérivée seconde), $f^{(3)} = f'''$ (dérivée troisième), et ainsi de suite.

Si A est une réunion d'intervalles de \mathbb{R} contenant tous au moins deux points, et si $n \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est n -fois dérivable sur A si elle l'est sur chacun de ces intervalles.

Définition 10.4.39 – Fonction de classe \mathcal{C}^n

Soit A une réunion non vide d'intervalles de \mathbb{R} contenant tous au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^n sur A si f est n fois dérivable sur A et si $f^{(n)}$ est continue sur A .

On dit que f est de classe \mathcal{C}^0 sur A si f est continue sur A .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} .

Définition 10.4.40 – Fonction de classe \mathcal{C}^∞

Soit A une réunion d'intervalles de \mathbb{R} contenant tous au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur A si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n -fois dérivable sur A .

Exercice 10.4.41

Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .

Correction. On raisonne par récurrence sur n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathcal{P}_n : f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^*, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Cette proposition, qu'elle soit vraie ou fausse, a été obtenue en calculant les premières dérivées de f (le lecteur est invité à le faire!).

— f est continue sur \mathbb{R}^* donc f est de classe \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R}^* . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a bien

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}}$$

\mathcal{P}_0 est donc vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons \mathcal{P}_n vraie. f est donc n fois dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$$

Or, $-(n+1) \in \mathbb{Z}$ donc $x \mapsto x^{-(n+1)}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et $f^{(n)}$ également. f est donc $n+1$ fois dérivable sur \mathbb{R}^* ,

et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^n)'(x) \\ &= (-1)^n n! \times -(n+1) x^{-(n+1)-1} \\ &= (-1)^{n+1} (n+1)! x^{-(n+2)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

donc \mathcal{P}_{n+2} est vraie, ce qui achève la récurrence.

f est donc bien de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* et de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Propriété 10.4.42

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soient $(f, g) \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

1. $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
2. $fg \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
3. Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.

Ces propriétés restent vraies si l'on remplace n par ∞ .

Propriété 10.4.43

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Cette propriété reste vraie en remplaçant n par ∞ .

Exercice 10.4.44

Montrer que l'application $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

10.4.5 Fonctions de référence

Le tableau suivant résume les fonctions de référence, leur domaine de définition, de continuité et de dérivabilité, ainsi que leur dérivée et leur classe.

Pour la fonction \tan , on a noté $T = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$f(x)$	Définie	Continue	Dérivable	$f'(x)$	Classe
$k, k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	0	\mathcal{C}^∞
$x^n, n \in \mathbb{N}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	nx^{n-1}	\mathcal{C}^∞
$x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	nx^{n-1}	\mathcal{C}^∞
$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$	\mathcal{C}^∞
\sqrt{x}	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*
$x^\alpha, \alpha \in]0; 1[$	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$	\mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*
$x^\alpha, \alpha > 1$	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+	$\alpha x^{\alpha-1}$	\mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*
$x^\alpha, \alpha < 0$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$	\mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*
$\cos(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$-\sin(x)$	\mathcal{C}^∞
$\sin(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\cos(x)$	\mathcal{C}^∞
$\tan(x)$	T	T	T	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	\mathcal{C}^∞
e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	e^x	\mathcal{C}^∞
$\ln(x)$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{x}$	\mathcal{C}^∞

10.5 Extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Définition 10.5.1 – Dérivée d'une fonction à valeurs dans \mathbb{C}

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. On note :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f) &: I \rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & \operatorname{Im}(f) : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{Re}(f(x)) & & x \mapsto \operatorname{Im}(f(x)) \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + i\operatorname{Im}(f(x)) = \operatorname{Re}(f)(x) + i\operatorname{Im}(f)(x)$$

Soit $a \in I$. On dit que f est *dérivable en a* si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. On pose alors

$$f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i\operatorname{Im}(f)'(a)$$

De même, on dit que f est *dérivable sur I* si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. La *dérivée de f* est alors la fonction

$$\begin{aligned} f' &: I \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \operatorname{Re}(f)'(x) + i\operatorname{Im}(f)'(x) \end{aligned}$$

Exemple 10.5.2

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto e^{ix}$ est dérivable sur \mathbb{R} . En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

et \cos et \sin sont dérivables sur \mathbb{R} .
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) + i\cos(x) \\ &= i \times (\cos(x) + i\sin(x)) \\ &= ie^{ix} \end{aligned}$$

Propriété 10.5.3

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable. Alors

$$(\forall x \in I, f'(x) = 0) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in I, f(x) = \lambda)$$

Remarque 10.5.4

Autrement dit, une fonction dérivable sur I à valeurs dans \mathbb{C} est constante si et seulement si sa dérivée est nulle.

Démonstration. Pour tout $x \in I$, on note $u(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ et $v(x) = \operatorname{Im}(f(x))$. u et v sont donc dérivables sur I puisque f l'est.

De plus :

$$\begin{aligned} (\forall x \in I, f'(x) = 0) &\iff (\forall x \in I, u'(x) + iv'(x) = 0) \\ &\iff (\forall x \in I, u'(x) = 0 \text{ et } v'(x) = 0) \\ &\iff (\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, u(x) = a \text{ et } v(x) = b) \\ &\iff (\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, f(x) = u(x) + iv(x) = a + ib) \\ &\iff (\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in I, f(x) = \lambda) \text{ en posant } \lambda = a + ib \end{aligned}$$

□

Propriété 10.5.5

Les résultats concernant la somme, le produit, le quotient de deux fonctions dérivables restent valables dans le cas de fonctions à valeurs dans \mathbb{C} .

Cependant, dans le cas on ne parlera pas de fonctions monotones : sans relation d'ordre définie, dire qu'un complexe est inférieur à un autre n'a aucun sens.

Plus généralement :

Propriété 10.5.6

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $\varphi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable. Alors $f : x \mapsto e^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \varphi'(x) e^{\varphi(x)}$$

Démonstration. Pour tout $x \in I$, notons $u(x) = \operatorname{Re}(\varphi(x))$ et $v(x) = \operatorname{Im}(\varphi(x))$. u et v sont dérivables sur I puisque φ

l'est. Pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{\varphi(x)} \\
 &= e^{u(x)+iv(x)} \\
 &= e^{u(x)} e^{iv(x)} \\
 &= e^{u(x)} (\cos(v(x)) + i \sin(v(x))) \\
 &= e^{u(x)} \cos(v(x)) + i e^{u(x)} \sin(v(x))
 \end{aligned}$$

u et v sont dérivables sur I , et \exp , \cos et \sin sont dérivables sur \mathbb{R} . Ainsi, $x \mapsto e^{u(x)} \cos(v(x))$ et $x \mapsto e^{u(x)} \sin(v(x))$ sont dérivables sur I : f est bien dérivable sur I . De plus, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= u'(x) e^{u(x)} \cos(v(x)) + e^{u(x)} v'(x) (-\sin(v(x))) \\
 &\quad + i \left(u'(x) e^{u(x)} \sin(v(x)) + e^{u(x)} v'(x) \cos(v(x)) \right) \\
 &= e^{u(x)} (u'(x) (\cos(v(x)) + i \sin(v(x))) + v'(x) (-\sin(v(x)) + i \cos(v(x)))) \\
 &= e^{u(x)} (u'(x) e^{iv(x)} + i v'(x) e^{iv(x)}) \\
 &= e^{u(x)+iv(x)} (u'(x) + i v'(x)) \\
 &= \varphi'(x) e^{i\varphi(x)}
 \end{aligned}$$

□

Exercice 10.5.7

Montrer que $f : x \mapsto (1+ix)(2-ie^{ix^2})$ est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.

Correction. $x \mapsto ix^2$ est dérivable sur \mathbb{R} : il en est donc de même pour $x \mapsto e^{ix^2}$ puis pour $x \mapsto 2-ie^{ix^2}$. De même, $x \mapsto 1+ix$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $x \mapsto i$.

f est donc dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= i(2-ie^{ix^2}) + (1+ix)(-i \times 2ixe^{ix^2}) \\
 &= 2i + e^{ix^2} + 2xe^{ix^2} + 2ix^2 e^{ix^2} \\
 &= 2i + (1+2x+2ix^2) e^{ix^2}
 \end{aligned}$$

10.6 Exercices

Exercice 10.6.1

Soit A une partie de \mathbb{R} centrée en 0. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(g, h) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})^2$, où g est paire et h impaire, telles que $f = g + h$.

Exercice 10.6.2

Montrer que l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet exactement une solution.

$$\frac{1}{x} - \ln(x) = 2 \quad (10.8)$$

Exercice 10.6.3

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ pour que la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \end{aligned}$$

soit monotone sur \mathbb{R} .

Exercice 10.6.4

Montrer que la courbe de la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 10 \end{aligned}$$

admet un axe de symétrie que l'on déterminera.

Exercice 10.6.5

Tracer les courbes des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{1 + \cos(x) \sin(x)}{2}$
2. $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$
3. $f : x \mapsto 4\cos(2x) - 2\cos(4x)$
4. $f : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 10.6.6

Étudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $f : x \mapsto x^2 e^x$ | 5. $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ |
| 2. $f : x \mapsto x \ln(x)$ | 6. $f : x \mapsto e^{\sin(x)}$ |
| 3. $f : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ | 7. $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ |
| 4. $f : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ | 8. $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}$ |

Exercice 10.6.7

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Chapitre 11

Fonctions usuelles

11.1	Exponentielle et logarithme	290
11.1.1	Exponentielle	290
11.1.2	Logarithme	293
11.1.3	Logarithme en base quelconque	296
11.1.4	Fonctions puissances	297
11.1.5	Croissances comparées	302
11.2	Fonctions circulaires réciproques	304
11.3	Fonctions hyperboliques	308
11.4	Exercices	310
11.5	DM conducteur	312

11.1 Exponentielle et logarithme

11.1.1 Exponentielle

En pratique, on est souvent amenée à étudier des *équations différentielles* (un chapitre leur sera consacré un peu plus tard), c'est-à-dire des équations dont les inconnues sont des fonctions, mettant en relations ces fonctions et leurs dérivées.

La fonction exponentielle joue un rôle fondamental dans ce contexte : elle permet de résoudre des équations différentielles linéaires, comme par exemple

$$y' = y$$

, où y est une fonction dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , et dont l'exponentielle est une solution.

Définition 11.1.1 – Exponentielle

Il existe une unique fonction, appelée *exponentielle* et notée \exp , définie et dérivable sur \mathbb{R} et telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

Pour tout réel x , on note aussi $e^x = \exp(x)$.

Remarque 11.1.2

La notation « e^x » n'est pas anodine, et peut être lue comme « e à la puissance x » : c'est abusif pour le moment, puisque x n'a aucune raison d'être un entier, et que nous n'avons pas encore défini les fonctions puissances. Néanmoins, cette appellation s'explique par le fait que \exp se comporte, à bien des égards, comme les fonctions de la forme $x \mapsto k^x$, où x varie cette fois dans \mathbb{N} , comme nous allons le voir dans la propriété qui suit.

$e = \exp(1) = e^1$ s'appelle le *nombre d'Euler*, ou encore la *constante de Néper*. Voici une approximation de e :

$$e \simeq 2.7182818$$

Propriété 11.1.3 – Propriétés élémentaires de l'exponentielle

1. \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\exp^{(n)} = \exp$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \neq 0$ et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
3. \exp est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et est strictement croissante sur \mathbb{R} .
4. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

Démonstration. 1. Évident par récurrence immédiate.

2. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x e^{-x} \end{aligned}$$

$x \mapsto -x$ est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , et \exp est dérivable sur \mathbb{R} . Par produit, f est dérivable sur \mathbb{R} et pour

tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x e^{-x} + e^x (-e^{-x}) \\ &= e^x e^{-x} - e^x e^{-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que f est constante sur \mathbb{R} . Or, $f(0) = e^0 e^0 = 1$. On vient donc de montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x e^{-x} = 1$$

En particulier, pour tout réel x , e^x est non nul et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

3. \exp est dérivable donc continue. De plus, $e^0 = 1 \geq 0$. S'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x \leq 0$, alors en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existerait a entre 0 et x tel que $e^a = 0$, ce qui contredit le point précédent.

Ainsi, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a bien $e^x > 0$.

De plus, $\exp' = \exp$ qui est strictement positive sur \mathbb{R} : \exp est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

4. Soit $y \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^{x+y}}{e^x} \end{aligned}$$

f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{x+y} e^x - e^{x+y} e^x}{(e^x)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc f est constante. De plus :

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{e^{0+y}}{e^0} \\ &= e^y \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^{x+y}}{e^x} = e^y$$

ou encore que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x e^y$$

Enfin, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$e^{x-y} = e^x e^{-y} = e^x \frac{1}{e^y} = \frac{e^x}{e^y}$$

5. Montrons par récurrence que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (e^x)^n = e^{nx}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

— Pour $n = 0$, on a bien

$$(e^x)^n = (e^x)^0 = 1 = e^{0 \times x}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $(e^x)^n = e^{nx}$. Alors :

$$(e^x)^{n+1} = (e^x)^n e^x = e^{nx} e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}$$

ce qui achève la récurrence.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(e^x)^n &= \frac{1}{(e^x)^{-n}} \\ &= \frac{1}{e^{-nx}} \text{ car } -n \in \mathbb{N} \\ &= e^{nx}\end{aligned}$$

□

Intéressons-nous maintenant aux limites en $-\infty$ et $+\infty$ de l'exponentielle. C'est le bon moment pour introduire une inégalité classique, à connaître et à savoir retrouver.

Lemme 11.1.4 – Une inégalité à retenir

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

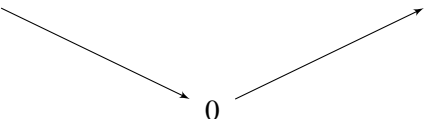
Démonstration. Considérons la fonction

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x - (x + 1)\end{aligned}$$

En tant que somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , φ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = e^x - 1$$

exp étant strictement croissante, et valant 1 en 0, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	−	0	+
φ			

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x) = e^x - (x + 1) \geq 0$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

□

Propriété 11.1.5 – Limites de l'exponentielle

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Démonstration. On sait que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$

Ainsi, par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

De plus, pour tout réel x , on a $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$. Or :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty.$$

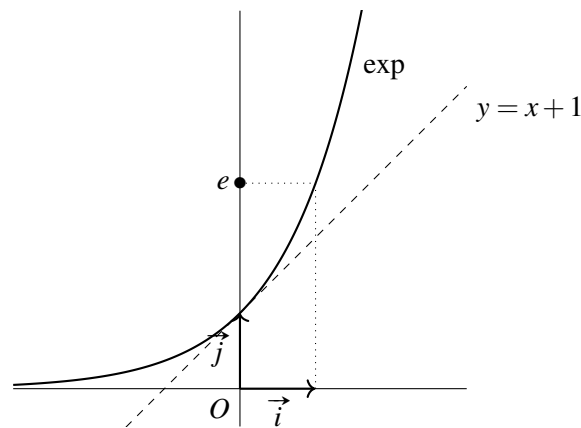
Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

□



Courbe de la fonction exp dans un repère orthonormé.

Corollaire 11.1.6

exp est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* .

Démonstration. Notons d'abord que exp est bien à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y \leq e^b$. De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^a \leq y$. Puisque exp est continue sur \mathbb{R} , le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel x (entre a et b) tel que $e^x = y$. exp est donc surjective de \mathbb{R} vers \mathbb{R}_+^* .

De plus, exp est strictement monotone donc injective sur \mathbb{R} .

Finalement, exp est bien une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* .

□

11.1.2 Logarithme

Définition 11.1.7 – Logarithme népérien

exp est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* : sa réciproque est appelée *logarithme népérien* et est notée ln.

Remarque 11.1.8

- ln est donc une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} .
- $\ln(1) = 0$ puisque $e^0 = 1$: 0 est l'unique antécédent de 1 par la fonction exp.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(e^x) = x$. En particulier, $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $e^{\ln(x)} = x$.

a. Attention : x doit ici être strictement positif, sans quoi $\ln(x)$ n'est pas défini.

Théorème 11.1.9 – Dérivée de \ln

\ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration. \exp est dérivable sur \mathbb{R} , et sa dérivée ne s'annule pas. Sa réciproque, la fonction \ln , est donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \ln'(x) &= \frac{1}{\exp'(\ln(x))} \\ &= \frac{1}{\exp(\ln(x))} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

□

En s'appuyant sur les propriétés algébriques de l'exponentielle, on obtient les propriétés algébriques du logarithme népérien.

Propriété 11.1.10 – Propriétés algébriques du logarithme népérien

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, on a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

Remarque 11.1.11

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(1) - \ln(x) = -\ln(x)$$

Démonstration. 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Alors :

$$\begin{aligned} \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) &\iff e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a) + \ln(b)} \\ &\iff ab = e^{\ln(a)} e^{\ln(b)} \\ &\iff ab = ab \end{aligned}$$

et la dernière assertion est vraie. On a donc bien $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

On montre de la même façon que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

2. Raisonnement similaire au point précédent.

□

Propriété 11.1.12 – Limites de \ln

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Démonstration. Prouvons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. Il s'agit de montrer que

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq x_0 \implies \ln(x) \geq M$$

Soit M dans \mathbb{R} et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par stricte croissance de \exp sur \mathbb{R} , on a

$$\ln(x) \geq M \iff x \geq e^M$$

Ainsi, en posant $x_0 = e^M$, on a bien trouvé un réel tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq x_0 \implies \ln(x) \geq M$. On a donc bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Pour la limite en 0, remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or :

$$\begin{aligned} & \text{— } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ & \text{— } \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

□

Propriété 11.1.13 – Une autre inégalité classique

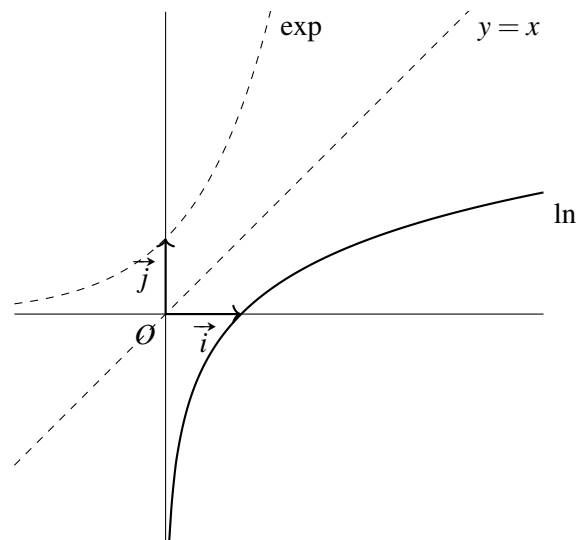
Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, on a

$$\ln(1+x) \leq x$$

Démonstration. Soit $x \in]-1; +\infty[$. On sait d'après le lemme 11.1.4 que $1+x \leq e^x$. En appliquant la fonction \ln , croissante sur \mathbb{R}_+^* , on obtient

$$\ln(1+x) \leq \ln(e^x) = x$$

□



Courbe de la fonction \ln dans un repère orthonormé. Sa courbe est obtenue par symétrie de celle de la fonction \exp par rapport à la première bissectrice¹.

11.1.3 Logarithme en base quelconque

Définition 11.1.14 – Logarithme en base a

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{a\}$.

On appelle *logarithme en base a* la fonction

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

Remarque 11.1.15

- Le logarithme népérien est alors le logarithme en base e puisque $\ln(e) = 1$.
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{a\}$. Alors $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(1) = 0$.

Propriété 11.1.16 – Propriétés algébriques de \log_a et sens de variation

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{a\}$. \log_a présente les mêmes propriétés algébriques que \ln :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log_a(x^n) = n \log_a(x)$.
3. Si $a < 1$, \log_a est une bijection strictement décroissante de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} .
4. Si $a > 1$, \log_a est une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} .

Démonstration. Ce sont des calculs directs, le travail a déjà été fait pour le logarithme népérien. Pour le sens de variation, cela vient du fait que \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et que $\ln(a)$ est strictement négatif si $a < 1$, strictement positif si $a > 1$. □

1. La droite d'équation $y = x$.

Exercice 11.1.17 – Le logarithme en base 10

1. Soit $x \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de x est $\lfloor \log_{10}(x) \rfloor + 1$.
2. Combien de chiffres comporte l'écriture décimale de 2^{2022} ? On donne l'inégalité suivante :

$$0.301 < \log_{10}(2) < 0.3011$$

Correction. 1. Notons n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de x . On a donc

$$10^{n-1} \leq x < 10^n$$

ou encore, puisque \log_{10} est strictement croissante :

$$\log_{10}(10^{n-1}) \leq \log_{10}(x) < \log_{10}(10^n)$$

c'est-à-dire

$$(n-1)\log_{10}(10) \leq \log_{10}(x) < n\log_{10}(10)$$

ou enfin

$$n-1 \leq \log_{10}(x) < n$$

C'est la définition même de la partie entière de $\log_{10}(x)$! On a donc $n-1 = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$ ou encore $n = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor + 1$.

2. D'après ce qui précède, le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de 2^{2022} est :

$$\lfloor \log_{10}(2^{2022}) \rfloor + 1 = 2022\log_{10}(2) + 1$$

Vu l'encadrement donné, on obtient

$$609.622 < \lfloor \log_{10}(2) \rfloor + 1 < 609.9$$

donc l'écriture décimale de 2^{2022} contient 609 chiffres.

11.1.4 Fonctions puissances**Définition 11.1.18 – Fonctions puissances**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle *fonction puissance d'exposant α* la fonction suivante :

$$\begin{aligned} p_\alpha &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{\alpha \ln(x)} \end{aligned}$$

Remarque 11.1.19

Remarquons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$, définie sur \mathbb{R}_+^* , est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

Remarque 11.1.20

Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} p_\alpha(x) &= e^{\alpha \ln(x)} \\ &= e^{\ln(x^\alpha)} \text{ d'après 11.1.10} \\ &= x^\alpha \end{aligned}$$

Ainsi, si α est un entier, les fonctions p_α et $x \mapsto x^\alpha$ coïncident sur \mathbb{R}_+^* .

Les fonctions puissances, telles que présentées dans la définition précédente, généralisent donc les fonctions puissances à exposants entiers sur \mathbb{R}_+^* . On prend alors la notation suivante :

Notation

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on notera

$$p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

même si α n'est pas un entier.

Exemple 11.1.21

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $1^\alpha = e^{\alpha \ln(1)} = e^0 = 1$.

Propriété 11.1.22 – Propriétés algébriques des fonctions puissances

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \text{ et } \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$$

En particulier, $\frac{1}{x^\beta} = x^{-\beta}$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \text{ et } \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

En particulier, $\left(\frac{1}{y}\right)^\alpha = \frac{1}{y^\alpha}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Démonstration. 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} x^\alpha x^\beta &= e^{\alpha \ln(x)} e^{\beta \ln(x)} \\ &= e^{\alpha \ln(x) + \beta \ln(x)} \\ &= e^{(\alpha+\beta) \ln(x)} \\ &= x^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x^\alpha}{x^\beta} &= \frac{e^{\alpha \ln(x)}}{e^{\beta \ln(x)}} \\
 &= e^{\alpha \ln(x) - \beta \ln(x)} \\
 &= e^{(\alpha - \beta) \ln(x)} \\
 &= x^{\alpha - \beta}
 \end{aligned}$$

Avec $\alpha = 0$, on obtient la formule $\frac{1}{x^\beta} = x^{-\beta}$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 (xy)^\alpha &= e^{\alpha \ln(xy)} \\
 &= e^{\alpha(\ln(x) + \ln(y))} \\
 &= e^{\alpha \ln(x) + \alpha \ln(y)} \\
 &= e^{\alpha \ln(x)} e^{\alpha \ln(y)} \\
 &= x^\alpha y^\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &= e^{\alpha \ln\left(\frac{x}{y}\right)} \\
 &= e^{\alpha(\ln(x) - \ln(y))} \\
 &= e^{\alpha \ln(x) - \alpha \ln(y)} \\
 &= \frac{e^{\alpha \ln(x)}}{e^{\alpha \ln(y)}} \\
 &= \frac{x^\alpha}{y^\alpha}
 \end{aligned}$$

Avec $x = 1$, on obtient alors la formule $\left(\frac{1}{y}\right)^\alpha = \frac{1}{y^\alpha}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
 (x^\alpha)^\beta &= e^{\beta \ln(x^\alpha)} \\
 &= e^{\beta \ln(e^{\alpha \ln(x)})} \\
 &= e^{\beta \alpha \ln(x)} \\
 &= x^{\alpha \beta}
 \end{aligned}$$

□

Propriété 11.1.23 – Étude des fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
2. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa dérivée n -ième est $x \mapsto \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.
3. Si $\alpha < 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection strictement décroissante de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^* . On a alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$$

4. Si $\alpha = 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est constante égale à 1 sur \mathbb{R}_+^* .
5. Si $\alpha > 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^* . On a alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$.

En particulier, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ se prolonge alors en une fonction continue en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

- Si $\alpha \in]0; 1[$, ce prolongement continu n'est pas dérivable en 0.
- Si $\alpha = 1$, ce prolongement continu est dérivable en 0 : son nombre dérivé en 0 vaut 1.
- Si $\alpha > 1$, ce prolongement continu est dérivable en 0 : son nombre dérivé en 0 vaut 0.

Démonstration. 1. Par composition, $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* puisque :

- $x \mapsto \alpha \ln(x)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R} .
- $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} .

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} p_\alpha'(x) &= \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln(x)} \\ &= \alpha \frac{1}{x^1} x^\alpha \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

2. Raisonnons par récurrence : montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété P_n : « p_α est n -fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ » est vraie.

- \mathcal{P}_1 d'après le point précédent.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que \mathcal{P}_n est vraie, de sorte que p_α soit n -fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$p_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

Or $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$ est une constante et, d'après le point précédent, $x \mapsto x^{\alpha-n}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* : ainsi, $p_\alpha^{(n)}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et p_α est $n+1$ fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} p_\alpha^{(n+1)}(x) &= \left(p_\alpha^{(n)}\right)'(x) \\ &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \times (\alpha-n)x^{\alpha-n-1} \\ &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \times (\alpha-(n+1)+1)x^{\alpha-(n+1)} \end{aligned}$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie, ce qui achève la récurrence.

3. Vue la dérivée de p_α , ce résultat est immédiat.
4. Idem.
5. Ici, $\alpha > 0$. Idem en ce qui concerne les variations de p_α et ses limites. Concernant la dérivabilité du prolongement continu de $x \mapsto x^\alpha$ sur \mathbb{R}_+ , commençons par nommer celui-ci :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\alpha : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

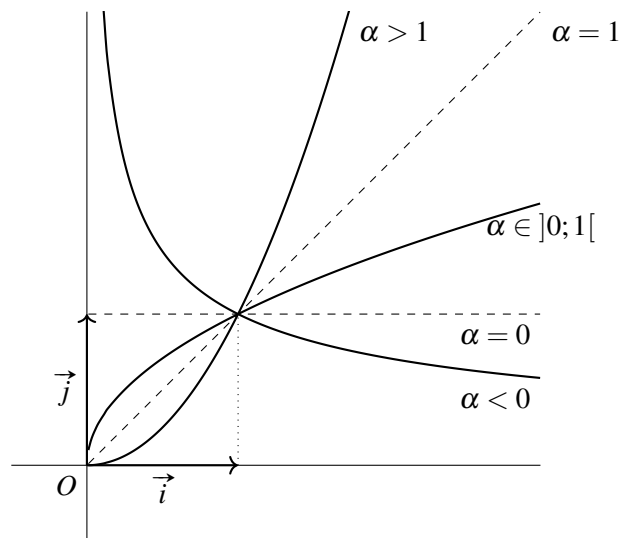
Le taux d'accroissement de cette fonction en 0 est alors la fonction, notée τ , définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \frac{\tilde{p}_\alpha(x) - \tilde{p}_\alpha(0)}{x - 0} \\ &= \frac{x^\alpha}{x} \\ &= x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Ainsi :

- Si $\alpha - 1 < 0$, c'est-à-dire si $\alpha < 1$, τ n'admet pas de limite finie en 0 et \tilde{p}_α n'est pas dérivable en 0.
- Si $\alpha - 1 = 0$, c'est-à-dire si $\alpha = 1$, τ est constante égale à 1 : elle admet donc 1 pour limite en 0. Ainsi \tilde{p}_α est dérivable en 0 et $\tilde{p}_\alpha'(0) = 1$.
- Si $\alpha - 1 > 0$, c'est-à-dire si $\alpha > 1$, τ admet 0 pour limite en 0. Ainsi \tilde{p}_α est dérivable en 0 et $\tilde{p}_\alpha'(0) = 0$.

□



Représentation graphique des différentes variantes de fonctions puissances.

Remarque 11.1.24

Pour tout entier strictement positif n , et tout réel positif x , $\sqrt[n]{x}$ est défini comme étant l'unique réel positif dont la puissance n -ième vaut x . Ce nombre est appelé *racine n -ième de x* ^a.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^{\frac{1}{n}}$ est un réel positif et

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{1}{n} \times n} = x^1 = x$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (et c'est même vrai pour $x = 0$, quitte à confondre les fonctions puissances et leurs prolongements continus en 0).

^a. Le cas $n = 2$ étant particulier : c'est la racine carrée.

11.1.5 Croissances comparées

Théorème 11.1.25 – Croissances comparées

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| e^x = 0$$

De plus, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x^\beta| e^{\alpha x} = 0$$

Démonstration. En réalité, montrer l'une des quatre premières limites suffit. Montrons par exemple que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) - 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

 φ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$2 - \sqrt{x}$	+	0	-
x	0	+	+
$\varphi'(x)$	+	0	-
φ		-2	

En particulier, φ est négative, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$$

On a donc :

$$\forall x \in [1; +\infty[, 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$: par encadrement, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Soit alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

— Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$. L'astuce consiste à remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{\alpha}{\beta} \ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right) = \frac{\alpha}{\beta} \ln(x) = \ln(x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} &= \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \end{aligned}$$

S'ensuit une composition de limites. Puisque $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\beta}{\alpha}} = +\infty$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. On a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} = 0$$

Puisque $\alpha > 0$ et $\frac{\alpha}{\beta} > 0$, on a bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha = 0$$

— Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$. Pour tout $x \in]0; 1[$, on a :

$$\begin{aligned} x^\beta |\ln(x)|^\alpha &= \left(\frac{1}{x} \right)^{-\beta} \left| -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right|^\alpha \\ &= \frac{(\ln(\frac{1}{x}))^\alpha}{(\frac{1}{x})^\beta} \end{aligned}$$

La disparition de la valeur absolue vient du fait que $x \in]0; 1[$, donc $\frac{1}{x} > 1$ et $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > \ln(1) = 0$ et $\left| -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right| = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ensuite, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et d'après ce qui précède, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$. On a donc bien

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta (\ln(x))^\alpha = 0$$

La cas $\alpha = \beta = 1$ donne alors $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

— Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} &= \frac{(e^x)^\alpha}{(\ln(e^x))^\beta} \\ &= \frac{1}{\frac{(\ln(e^x))^\beta}{(e^x)^\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(e^x))^\beta}{(e^x)^\alpha} = 0^+$ (cette expression étant positive).

Le cas $\alpha = \beta = 1$ donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

— Pour finir, montrons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x < 0$, on a :

$$\begin{aligned} |x|^\beta e^{\alpha x} &= |-x|^\beta e^{-\alpha(-x)} \\ &= \frac{|-x|^\beta}{e^{\alpha(-x)}} \\ &= \frac{(-x)^\beta}{e^{\alpha(-x)}} \\ &= \frac{1}{\frac{e^{\alpha(-x)}}{(-x)^\beta}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \end{aligned}$$

puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\beta} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\alpha(-x)}}{(-x)^\beta} = +\infty$.

À nouveau, le cas $\alpha = \beta = 1$ donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| e^x = 0$.

□

Exercice 11.1.26

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x - \ln(x)}{x^2}$$

Correction. Soit $x \in]0; +\infty[$. Mettons e^x en facteur :

$$\frac{e^x + x - \ln(x)}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} \left(1 + \frac{x}{e^x} - \frac{\ln(x)}{e^x} \right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \frac{x}{e^x} = 0$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{e^x} - \frac{\ln(x)}{e^x} = 1$$

Enfin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

Par produit, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x - \ln(x)}{x^2} = +\infty$$

11.2 Fonctions circulaires réciproques

Les fonctions cos, sin et tan ne sont pas des bijections sur \mathbb{R} : elles sont périodiques et non injectives.

Cependant, en restreignant leurs domaines de définition, elles le deviennent : cela permet alors de définir leurs réciproques, appelées *fonctions circulaires réciproques*.

Propriété 11.2.1 – Fonctions circulaires réciproques

- \cos induit une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. La réciproque de celle-ci est appelée *arc cosinus* et est notée \arccos .
- \sin induit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$. La réciproque de celle-ci est appelée *arc sinus* et est notée \arcsin .
- \tan induit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur \mathbb{R} , dont la réciproque est appelée *arc tangente* et est notée \arctan .

Démonstration. \cos , \sin et \tan sont continues : il suffit alors d'observer leurs tableaux de variation sur $[0; \pi]$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ respectivement, sur lesquels elles sont strictement monotones. Le théorème de la bijection permet alors de conclure. \square

\arccos est donc une bijection de $[-1; 1]$ sur $[0; \pi]$, \arcsin une bijection de $[-1; 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et \arctan une bijection de \mathbb{R} sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque 11.2.2

- Pour tout $y \in [-1; 1]$, $\arccos(y)$ est l'unique réel dans $[0; \pi]$ dont le cosinus vaut y . On a donc :

$$\forall y \in [-1; 1], \cos(\arccos(y)) = y$$

- De même, pour tout $y \in [-1; 1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique réel dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut y . On a donc :

$$\forall y \in [-1; 1], \sin(\arcsin(y)) = y$$

- Enfin, il en est de même pour \arctan : pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut y . On a donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(y)) = y$$

Exemple 11.2.3

$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ puisque $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$\arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ puisque $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$.

$\arcsin(0) = 0$ puisque $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(0) = 0$.

$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ car $\frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

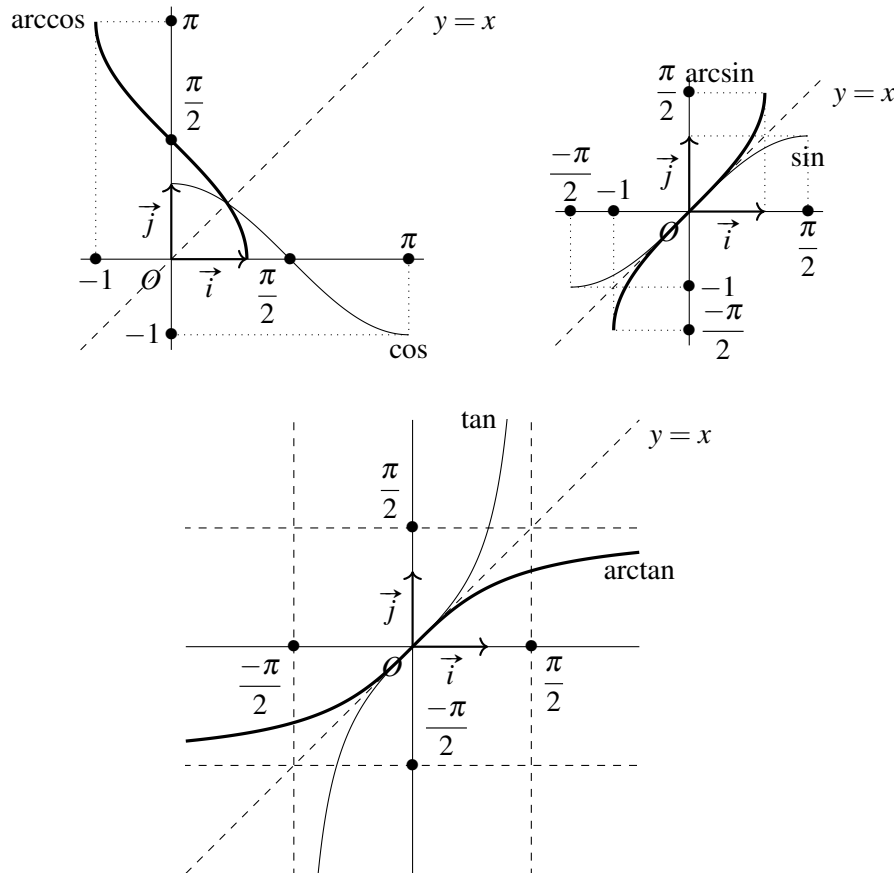
Remarque 11.2.4 : Piège !

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il n'est pas toujours vrai que $\arccos(\cos(x)) = x$: l'expression $\arccos(\cos(x))$ est bien définie, et bien sûr le cosinus de x vaut $\cos(x)$, mais x n'a aucune raison d'être dans $[0; \pi]$.

Par exemple, posons $x = \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$. Alors $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ donc

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \neq \frac{7\pi}{3}$$

Il en est de même pour arcsin et arctan.

**Propriété 11.2.5**

Pour tout $x \in [-1; 1]$:

$$\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Démonstration. Soit $x \in [-1; 1]$. On sait que

$$(\sin(\arccos(x)))^2 + (\cos(\arccos(x)))^2 = 1$$

donc

$$(\sin(\arccos(x)))^2 + x^2 = 1$$

ou encore

$$(\sin(\arccos(x)))^2 = 1 - x^2$$

Ainsi, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ ou $\sin(\arccos(x)) = -\sqrt{1-x^2}$.

Cependant, $\arccos(x) \in [0; \pi]$ donc $\sin(\arccos(x)) \geq 0$: on a donc

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Le raisonnement est similaire pour $\cos(\arcsin(x))$. □

Propriété 11.2.6

1. \arccos est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; 1[$ et pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. \arcsin est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; 1[$ et pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. \arctan est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration. 1. \cos est dérivable sur $[0; \pi]$, sa dérivée étant \sin . \sin ne s'annule pas^a sur $]0; \pi[$.

Ainsi, \arccos est dérivable sur $] -1; 1[\setminus \{\cos(0), \cos(\pi)\} =] -1; 1[$ et pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$\begin{aligned} \arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} \\ &= \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

De plus :

- $x \mapsto 1-x^2$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; 1[$, à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .
- $x \mapsto \frac{-1}{x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Par composition, $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; 1[$. Il en est donc de même pour \arccos .

2. Le raisonnement est similaire (attention : $\sin' = \cos$, cette fois il n'y a pas de « - » qui apparaît !).

3. \tan est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, sa dérivée étant $x \mapsto 1 + \tan(x)^2$: elle ne s'annule pas sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. \arctan est donc dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

De plus :

— $x \mapsto 1 + x^2$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , à valeurs dans $[1; +\infty[$.

— $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[1; +\infty[$.

Ainsi $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} : il en est donc de même pour \tan .

□

a. Attention : on a exclu 0 et π puisque $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$!

Remarque 11.2.7

La dérivée de \cos , c'est-à-dire $x \mapsto -\sin$, s'annule en 0 et en π . \arccos n'est donc pas dérivable en $\cos(0) = 1$ et en $\cos(\pi) = -1$.

De même, \arcsin n'est pas dérivable en -1 et 1 .

Ces dérivées sont à connaître par cœur : elles peuvent se révéler très utiles lors du calcul intégral ou dans la résolution d'équations différentielles.

11.3 Fonctions hyperboliques

La décomposition d'une fonction réelle en une somme de fonction paire et impaire² amène à mettre en avant l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{partie paire}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{partie impaire}}$$

Ces parties paires et impaires sont des fonctions classiques, à connaître également : le *cosinus hyperbolique* et le *sinus hyperbolique*.

Définition 11.3.1 – Fonctions hyperboliques

Le *cosinus hyperbolique* et le *sinus hyperbolique* sont les deux fonctions, notées respectivement ch et sh , définies par :

$$\begin{array}{lcl} \text{ch} & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} \text{sh} & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Propriété 11.3.2

1. ch est paire, sh est impaire.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$.
3. ch et sh sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\text{ch}'(x) = \text{sh}(x) \text{ et } \text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1$$

2. Il y a un exercice à ce sujet dans le TD sur les généralités sur les fonctions.

Démonstration. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\ &= \operatorname{ch}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ &= \frac{-(e^x - e^{-x})}{2} \\ &= -\operatorname{sh}(x)\end{aligned}$$

2. Évident.

3. Évident puisque \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Le calcul des dérivées est direct.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 &= (\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)) \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) e^x \\ &= e^{-x} e^x \\ &= 1\end{aligned}$$

□

Propriété 11.3.3 – Tableaux de variation

Les tableaux de variation de ch et sh sont :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh	$+\infty$	0	$+\infty$

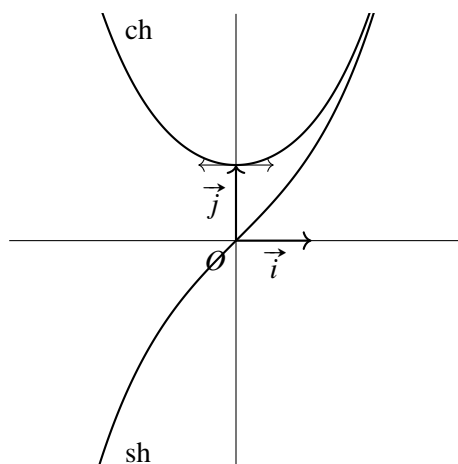
Démonstration. ch est paire et sh impaire : on peut se contenter de les étudier sur \mathbb{R}_+ . Elles sont dérivables sur cet intervalle, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}'(x) &= \operatorname{sh}(x) \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{2} > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}'(x) &= \operatorname{ch}(x) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0\end{aligned}$$

donc ch et sh sont strictement croissantes sur \mathbb{R}_+ . Le reste est direct.

□



Représentation graphique de ch et sh.

11.4 Exercices

Exercice 11.4.1

Montrer que sh est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dont on trouvera la réciproque.

Exercice 11.4.2

Montrer :

$$\forall x \in]-1; +\infty[, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

Exercice 11.4.3

Résoudre :

1. $e^{2x} + e^x - 1 = 0$

2. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

3. $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

4. $\sqrt{x+3} = 2x - 1$

5. $\ln(e^{2x} - e^x - 19) = 0$

6. $2^{x^2+x} = 2^{3x}$

7. $2^{x^3} = 3^{x^2}$

Exercice 11.4.4

Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que l'équation $x = \sqrt{x} + a$ possède une unique solution positive ou nulle. Préciser cette solution, que l'on notera $l(a)$.

Que vaut $l(1)$? Comparer, suivant les valeurs de a , les réels $l(a)$ et $l(1)$.

Exercice 11.4.5

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch}^k(x)}$$

Exercice 11.4.6

Résoudre :

$$\log_x(10) + 2\log_{10x}(10) + 3\log_{100x}(10) = 0$$

Exercice 11.4.7Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p .

À quelle distance doit se placer un observateur, dont la taille est supposée négligeable, pour voir la statue sous un angle maximal ?

Exercice 11.4.8

Résoudre :

$$\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 11.4.91. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sin(2t) = \frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)}$$

2. Résoudre :

$$\arcsin(x) = 2 \arctan(x)$$

Exercice 11.4.10

Étudier la fonction

$$f : x \mapsto \arctan(\tan(x))$$

Exercice 11.4.11

Étudier et tracer la fonction

$$f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

On pourra poser (après justification) $x = \cos(2\theta)$.**Exercice 11.4.12**

Étudier et tracer :

$$f : x \mapsto e^{x^2-x-1}$$

En particulier, on montrera l'existence d'un axe de symétrie.

Exercice 11.4.13

Montrer :

$$\forall x \in [-1; 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

11.5 DM conducteur

Exercice 35

Étudier et tracer les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$ PTS 2

2. $f : x \mapsto -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cos(2x) + \frac{3}{2} \sin(2x)$ PTS 2

3. $f : x \mapsto \arctan(\tan(x)) - \arctan(\tan(2x))$ PTS 2

4. $f : x \mapsto \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\right)$

Correction. 1. f est définie sur \mathbb{R} . Remarquons que f est paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = \frac{\ln(1+(-x)^2)}{1+(-x)^2} = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$. On peut donc étudier f sur \mathbb{R}_+ et obtenir le reste de la courbe par symétrie d'axe l'axe des ordonnées. $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ , à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . f est donc dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2x}{1+x^2} \times (1+x^2) - 2x \ln(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x(1 - \ln(1+x^2))}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Or :

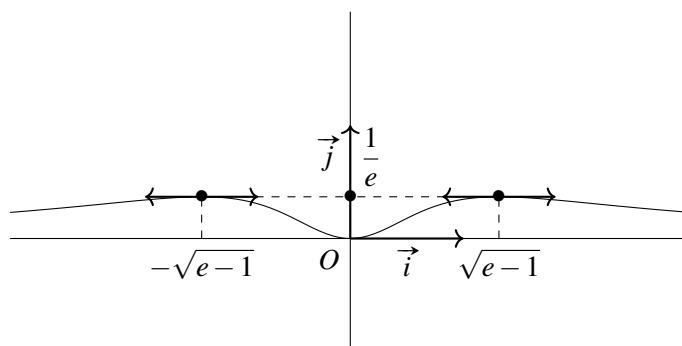
$$\begin{aligned} 1 - \ln(1+x^2) \geq 0 &\iff 1 \geq \ln(1+x^2) \\ &\iff e \geq 1+x^2 \\ &\iff e-1 \geq x^2 \\ &\iff \sqrt{e-1} \geq x \text{ car } x \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	$\sqrt{e-1}$	$+\infty$
$1 - \ln(1+x^2)$	+	0	-
$2x$	0	+	+
$(1+x^2)^2$	+	+	+
$f'(x)$	0	+	0
f	0	$\frac{1}{e}$	0

La limite en $+\infty$ a été obtenue par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$.

On obtient alors la courbe suivante.



2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \\ &= 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

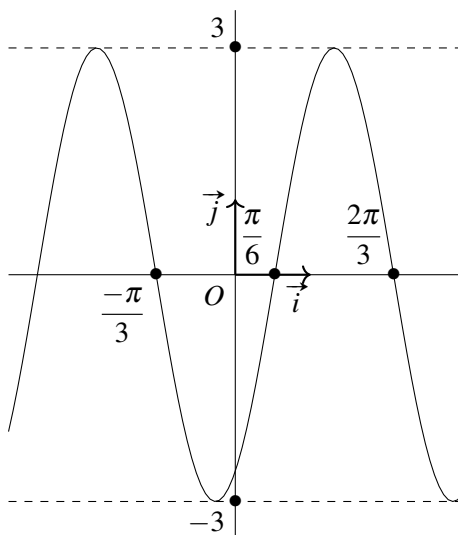
On obtient alors la courbe de f par opérations élémentaires à partir de la courbe de \sin , en appliquant, dans l'ordre :

- Une translation de vecteur $\frac{\pi}{3} \vec{j}$ (on obtient alors la courbe de la fonction $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$).
- Une dilatation de facteur $\frac{1}{2}$ selon l'axe des abscisses (on obtient alors la courbe de la fonction $x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$).
- Une dilatation de facteur 3 selon l'axe des ordonnées.

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La courbe de f est alors la suivante.



3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est bien défini si et seulement si x et $2x$ ne s'écrivent pas sous la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Or, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

f est donc définie sur

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$$

f est π -périodique. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \arctan(\tan(x + \pi)) - \arctan(\tan(2(x + \pi))) \\ &= \arctan(\tan(x)) - \arctan(\tan(2x + 2\pi)) \\ &= \arctan(\tan(x)) - \arctan(\tan(2x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On peut donc réduire l'étude à $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\setminus \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$. De plus, f est impaire : on peut alors réduire l'étude à $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[\setminus \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$.

Or, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[\setminus \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$:

— Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right[$, alors x et $2x$ sont dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et

$$f(x) = x - 2x = -x$$

— Si $x \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$, alors $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $2x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$: on ne peut alors pas dire que $\arctan(\tan(2x)) = 2x$.

Cependant :

$$\arctan(\tan(2x)) = \arctan(\tan(2x - \pi)) = 2x - \pi$$

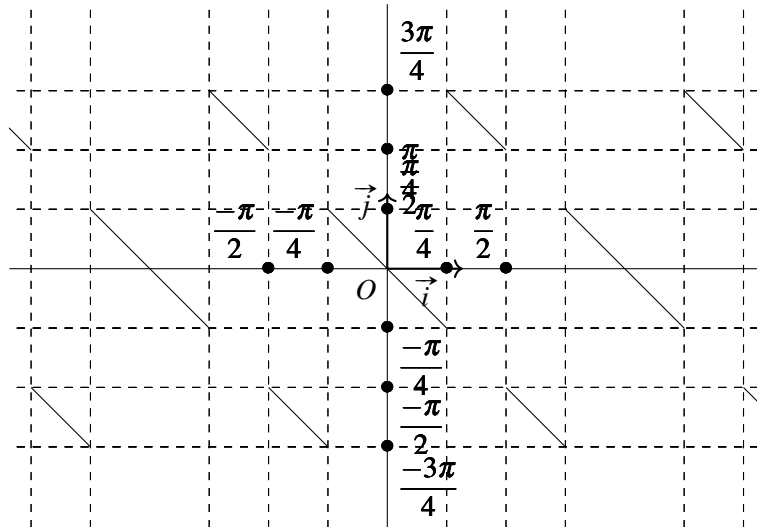
puisque $2x - \pi \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. On a donc, dans ce cas :

$$f(x) = x - (2x - \pi) = \pi - x$$

Au final :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[\setminus \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}, f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < \frac{\pi}{4} \\ \pi - x & \text{si } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

On obtient le reste de la courbe par symétrie de centre O et par π -périodicité.



4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}} &= \sqrt{\frac{1 + 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{2}} \\ &= \left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| \in [-1; 1]\end{aligned}$$

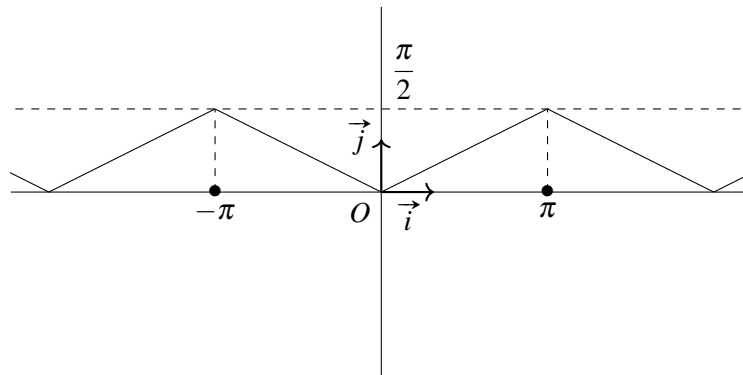
f est donc définie sur \mathbb{R} .

De plus, f est 2π -périodique et paire : on peut donc réduire l'étude à $[-\pi; \pi]$ puis à $[0; \pi]$.

Pour tout $x \in [0; \pi]$, on a $\frac{x}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$ et :

$$\begin{aligned}f(x) &= \arccos\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \frac{x}{2} \text{ puisque } \frac{x}{2} \in [0; \pi]\end{aligned}$$

La courbe de f est donc la suivante :



Exercice 36

Soit

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos^5(x) - \sin^5(x)\end{aligned}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. PTS 1
2. Montrer que le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe de f . PTS 1
3. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + \pi)$.
4. Expliquer pourquoi il suffit de tracer f sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ pour obtenir, via des transformations que l'on précisera, la totalité de la courbe de f . PTS 1
5. Montrer que l'équation $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 0$, d'inconnue $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, admet pour unique solution $\frac{3\pi}{4}$.
6. Étudier et tracer la fonction f . PTS 2

Correction. 1. On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f(x)$.

2. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) &= f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - h\right)\right) \\ &= -f\left(\frac{\pi}{4} - h\right) \end{aligned}$$

donc le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe de f .

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient $f(x + \pi) = -f(x)$.

4. Avec la question 3, on peut réduire l'étude de f à un intervalle de longueur π , par exemple $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. On choisit celui-ci car il est centré en $\frac{\pi}{4}$: on va pouvoir utiliser la question 2. On obtient ensuite, grâce à la question 3, la courbe de f sur $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ et le reste par 2π -périodicité.

De plus, grâce à la question 2, on peut en fait réduire l'étude à $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$: la courbe de f sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ s'en déduit par symétrie de centre $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

5. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Alors :

$$\begin{aligned} \cos^3(x) + \sin^3(x) &= 0 \iff \cos^3(x) = -\sin^3(x) \\ &\iff \cos^3(x) = \sin^3(-x) \text{ par imparité de } \sin \\ &\iff \cos^3(-x) = \sin^3(-x) \text{ par parité de } \cos \\ &\iff \cos(-x) = \sin(-x) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, -x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{-\pi}{4} - 2k\pi \end{aligned}$$

Avec $k = -1$, on obtient bien $\frac{3\pi}{4}$. Les autres valeurs sont en dehors de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

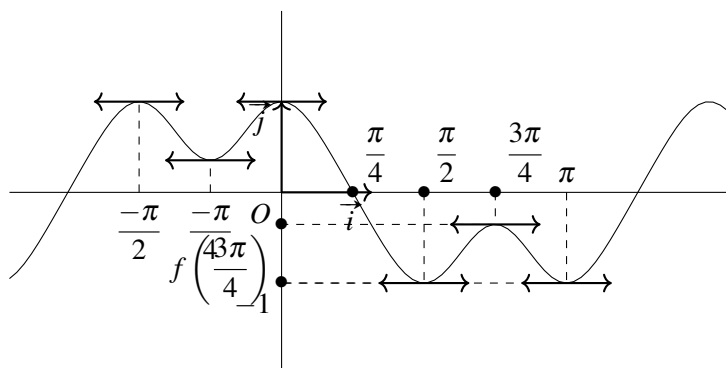
6. f est dérivable sur \mathbb{R} et donc sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, et pour tout x dans cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5 \sin(x) \cos^4(x) - 5 \cos(x) \sin^4(x) \\ &= -5 \sin(x) \cos(x) (\cos^3(x) + \sin^3(x)) \end{aligned}$$

Dès lors, avec la question précédente, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
-5	—	—	—
$\sin(x)$	+		+
$\cos(x)$	+	0	—
$\cos^3(x) + \sin^3(x)$	+		+
$f'(x)$	—	0	+
f	0	—1	$-\frac{2}{\sqrt{2}^5}$

et la courbe de f est la suivante :



Exercice 37

Soit

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 4x + 3}}$$

1. Déterminer le domaine de définition \mathcal{D} de f . PTS 2

2. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{(x-2)^2 - 1}}$$

PTS 1

3. Étudier et tracer la fonction f . On veillera à mettre en avant un axe de symétrie à préciser. PTS 2

Correction.

1. L'étude du signe du numérateur et dénominateur donne le tableau suivant :

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$	1	3	$2+\sqrt{2}$	$+\infty$				
$\frac{x^2-4x+2}{4x+2}$		+	0	-	-	0	+			
$\frac{x^2-4x+3}{4x+3}$		+		+	0	-	0	+		
$\frac{x^2-4x+2}{x^2-4x+3}$		+	0	-		+		-	0	+

f est donc définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; 2 - \sqrt{2}] \cup]1; 3[\cup [2 + \sqrt{2}; +\infty[$.

2. Pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3 - 1}{x^2 - 4x + 3}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{x^2 - 4x + 3}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{(x-2)^2 - 1}} \end{aligned}$$

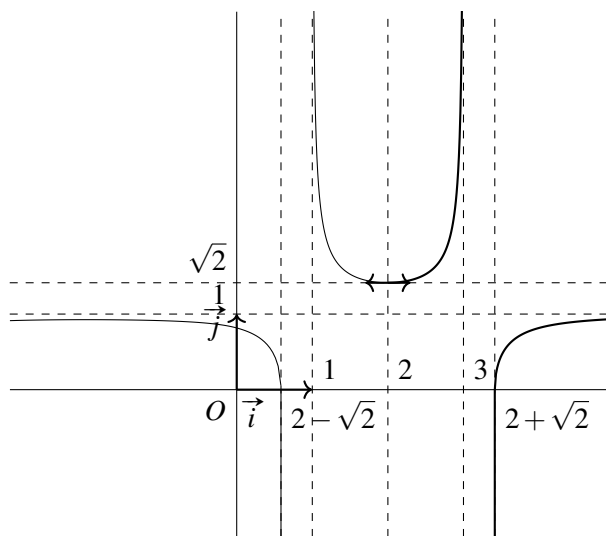
3. Avec la question précédente, on montre facilement que pour tout $h \in \mathbb{R}$, si $2 + h \in \mathcal{D}$ alors $2 - h$ aussi et $f(2 + h) = f(2 - h)$. La droite d'équation $x = 2$ est donc un axe de symétrie pour la courbe de f , ce qui ramène l'étude de f à $\mathcal{D}' = [2; 3[\cup [2 + \sqrt{2}; +\infty[$.

Par quotient, $x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 4x + 3}$ est dérivable sur $\mathcal{D}'' = [2; 3[\cup]2 + \sqrt{2}; +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* (attention à bien exclure les points en lesquels ce quotient s'annule). Par composition avec la racine carrée, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , f est dérivable sur \mathcal{D}'' et pour tout $x \in \mathcal{D}''$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{d}{dx} \left(1 - \frac{1}{(x-2)^2 - 1} \right)}{2\sqrt{1 - \frac{1}{(x-2)^2 - 1}}} \\ &= \frac{2(x-2)}{2 \left((x-2)^2 - 1 \right)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{(x-2)^2 - 2}}} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}''$, on a $f'(x) \geq 0$ avec $f'(2) = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 + \sqrt{2} \\ x > 2 + \sqrt{2}}} f(x) = -\infty$ et

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 + \sqrt{2} \\ x < 2 + \sqrt{2}}} f(x) = +\infty$. On obtient la courbe suivante :

**Exercice 38**

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\tan(\arctan(p+1) - \arctan(p))$$

2. En déduire la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

Correction. 1. $\arctan(p+1)$ et $\arctan(p)$ sont dans $]0; \frac{\pi}{2}[$, donc $\arctan(p+1) - \arctan(p) \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$: leur tangente est donc bien définie. De plus :

$$\begin{aligned} 1 - \tan(\arctan(p+1)) \tan(\arctan(-p)) &= 1 - (p+1)(-p) \\ &= 1 + p^2 + p \end{aligned}$$

et les racines de $x \mapsto 1 + x^2 + x$ ne sont pas réelles : on est donc certain que $1 - \tan(\arctan(p+1)) \tan(\arctan(-p)) \neq 0$. On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} \tan(\arctan(p+1) - \arctan(p)) &= \tan(\arctan(p+1) + \arctan(-p)) \text{ par imparité de } \tan \text{ et } \arctan \\ &= \frac{\tan(\arctan(p+1)) + \tan(\arctan(-p))}{1 - \tan(\arctan(p+1)) \tan(\arctan(-p))} \\ &= \frac{p+1 - p}{1 + p + p^2} \\ &= \frac{1}{1 + p + p^2} \end{aligned}$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\tan(\arctan(p+1) - \arctan(p)) = \frac{1}{1 + p + p^2} = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{1 + p + p^2}\right)\right)$$

Or $\arctan\left(\frac{1}{1 + p + p^2}\right) \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $\arctan(p+1) - \arctan(p)$ aussi : en effet, $0 \leq \arctan(p+1) - \arctan(p) < \frac{\pi}{2} - 0$ par croissance de \arctan et puisque celle-ci est à valeurs dans $\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Ces deux nombres ont même tangente et sont dans $\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$: ils sont donc égaux. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \arctan \left(\frac{1}{1+p+p^2} \right) &= \sum_{p=0}^n (\arctan(p+1) - \arctan(p)) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(0) \\ &= \arctan(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Chapitre 12

Primitives et équations différentielles linéaires

12.1	Primitives	322
12.1.1	Définition et lien avec l'intégration	322
12.1.2	Techniques d'intégration	324
12.1.3	Primitives usuelles	328
12.1.4	Des exemples à connaître	330
12.2	Équations différentielles linéaires du premier ordre	333
12.2.1	Définition	334
12.2.2	Ensemble des solutions	335
12.2.3	Résolution de l'équation homogène	336
12.2.4	Méthode de variation de la constante	337
12.2.5	Problème de Cauchy	338
12.3	Équations différentielles du second ordre à coefficients constants	339
12.3.1	Définition	339
12.3.2	Ensemble des solutions	340
12.3.3	Équation homogène	341
12.3.4	Cas particuliers de solutions particulières	345
12.3.5	Problème de Cauchy	349
12.4	Exercices	351
12.5	DM conducteur	355

Dans tout ce chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I est un intervalle de \mathbb{R} , contenant au moins deux points.

12.1 Primitives

12.1.1 Définition et lien avec l'intégration

Notion de primitive

Définition 12.1.1 – Primitive

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

On dit que F est une *primitive de f sur I* si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

Exemple 12.1.2

\ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 12.1.3

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto 5x^3$.

Propriété 12.1.4 – Unicité... à une constante près

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ une primitive de f sur I .

Soit $G \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I, G(x) = F(x) + \lambda$$

Remarque 12.1.5

Deux primitives d'une même fonction diffèrent donc d'une constante.

Démonstration. Soit G une primitive de f sur I . $G - F$ est dérivable sur I en tant que combinaison linéaire de deux fonctions dérivables sur I . Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} (G - F)'(x) &= G'(x) - F'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $G - F$ est constante, et donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + \lambda$.

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $G : x \mapsto F(x) + \lambda$ définie sur I . Il est clair que G est dérivable sur I et que sa dérivée est $F' = f : G$ est bien une primitive de f sur I . □

Propriété 12.1.6

Soient $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^2$ et $(F, G) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^2$ tels que F et G sont des primitives respectives de f et g sur I .

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I .

Démonstration. $\lambda F + \mu G$ est dérivable sur I en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I . De plus :

$$\begin{aligned}(\lambda F + \mu G)' &= \lambda F' + \mu G' \\ &= \lambda f + \mu g\end{aligned}$$

□

Intégration

Pour le moment, on se limitera à des fonctions continues sur un segment.

Définition 12.1.7 – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit $(a, b) \in I^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ une fonction continue. Soit $F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ une primitive de f sur I . L'intégrale de f entre a et b est le nombre

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

$\int_a^b f(t) dt$ ne dépend pas du choix de F .

Démonstration. Soit $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$. Puisque F et F_a sont deux primitives de f sur I , il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in I$:

$$F_a(x) = F(x) + \lambda$$

Or

$$F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

donc $F(a) + \lambda = 0$ et $\lambda = -F(a)$. On a donc, pour tout $x \in I$:

$$F_a(x) = F(x) - F(a)$$

et en particulier

$$\int_a^b f(t) dt = F_a(b) = F(b) - F(a)$$

□

Remarque 12.1.8

Si $F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est une primitive de f sur I et si a et b sont deux éléments de I , on note aussi

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème 12.1.9 – Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ continue sur I . Soit $x_0 \in I$.
Alors l'application

$$\begin{aligned}F_{x_0} &: I \rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt\end{aligned}$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0 .

En particulier, toute fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ continue admet au moins une primitive.

Exemple 12.1.10

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[2; 5]$ et \ln en est une primitive sur cet intervalle. Ainsi :

$$\int_2^5 \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_2^5 = \ln(5) - \ln(2) = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

12.1.2 Techniques d'intégration

Relation de Chasles

Propriété 12.1.11 – Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans \mathbb{K} . Soit $(a, b, c) \in I^3$. Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_b^c f(t) dt + \int_a^c f(t) dt$$

□

Croissance de l'intégrale

Propriété 12.1.12 – Croissance de l'intégrale

— Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue. On suppose f positive sur I . Alors pour tout $(a, b) \in I^2$ **tel que** $a \leq b$, on a

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0$$

De plus, si f est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors pour tout $(a, b) \in I^2$ **tel que** $a < b$ on a

$$\int_a^b f(t) dt > 0$$

— Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$ continues. On suppose que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$. Alors pour tout $(a, b) \in I^2$ **tel que** $a \leq b$, on a

$$\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$$

De plus, si $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors pour tout $(a, b) \in I^2$ **tel que** $a < b$ on a

$$\int_a^b f(t) dt > \int_a^b g(t) dt$$

Exercice 12.1.13

Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+e^t+t^2} dt \leq \frac{\pi}{4}$$

Correction. $t \mapsto \frac{1}{1+e^t+t^2}$ est continue sur $[0; 1]$ donc l'intégrale donnée est bien définie. De plus, pour tout $t \in [0; 1]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{1+e^t+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+e^t+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

ou encore

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+e^t+t^2} dt \leq [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

Linéarité**Propriété 12.1.14**

Soient u et v deux fonctions de I vers \mathbb{K} continues sur I . Soit $(a, b) \in I^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda u(t) + \mu v(t)) dt = \lambda \int_a^b u(t) dt + \mu \int_a^b v(t) dt$$

Démonstration. Soient U et V des primitives respectives de u et v sur I . Alors $\lambda U + \mu V$ est une primitive de $\lambda u + \mu v$ sur I et :

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda u(t) + \mu v(t)) dt &= (\lambda U + \mu V)(b) - (\lambda U + \mu V)(a) \\ &= \lambda U(b) + \mu V(b) - \lambda U(a) - \mu V(a) \\ &= \lambda (U(b) - U(a)) + \mu (V(b) - V(a)) \\ &= \lambda \int_a^b u(t) dt + \mu \int_a^b v(t) dt \end{aligned}$$

□

Intégration par parties**Théorème 12.1.15 – Intégration par parties**

Soient u et v deux fonctions de I vers \mathbb{K} de classe \mathcal{C}^1 sur I . Soit $(a, b) \in I^2$. Alors :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

Démonstration. uv est de classe \mathcal{C}^1 sur I puisque u et v le sont. De plus, pour tout $t \in I$, on a

$$(uv)'(t) = u'(t) v(t) + u(t) v'(t)$$

uv est donc une primitive de $u'v + uv'$ sur I , de sorte que

$$\int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

ou encore, par linéarité :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

□

Exemple 12.1.16 – A retenir

On cherche une primitive de \ln , définie et continue sur \mathbb{R}_+^* . D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction suivante est une primitive de \ln sur \mathbb{R}_+^* :

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_1^x \ln(t) dt \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $I = [1; x]$ si $x \geq 1$ et $I = [x; 1]$ sinon. Pour tout $t \in I$, posons :

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(t) & v'(t) &= 1 \\ u'(t) &= \frac{1}{t} & v(t) &= t \end{aligned}$$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur I donc :

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t) dt &= \int_1^x 1 \times \ln(t) dt \\ &= [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t dt \\ &= x \ln(x) - \int_1^x 1 dt \\ &= x \ln(x) - [t]_1^x \\ &= x \ln(x) - x + 1 \end{aligned}$$

En soustrayant la constante 1, on a donc montré que la fonction $F : x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de \ln sur \mathbb{R}_+^* .

Changement de variable

Théorème 12.1.17 – Changement de variable

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} contenant au moins deux points.

Soit $\varphi \in \mathcal{F}(I, J)$ de classe \mathcal{C}^1 et $f \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$ continue.

Soit $(a, b) \in I^2$. Alors :

$$\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur J . φ est dérivable sur I à valeurs dans J , et F est dérivable sur J , donc $F \circ \varphi$ est dérivable sur I . De plus, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} (F \circ \varphi)'(x) &= \varphi'(x) F'(\varphi(x)) \\ &= \varphi'(x) f(\varphi(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt &= [F \circ \varphi(t)]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt \end{aligned}$$

□

Le changement de variable peut être utilisé pour déterminer des primitives.

Exercice 12.1.18

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{5}{(2x+1)^2} e^{\frac{1}{2x+1}}$ sur \mathbb{R}_+^* .

Correction. f est continue sur \mathbb{R}_+^* donc f admet des primitives sur cet intervalle.

Posons $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{2t+1}$. φ est de classe \mathcal{C}^1 et sa dérivée est $\varphi' : t \mapsto \frac{-2}{(2t+1)^2}$. Par changement de variable, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t) dt &= \int_1^x \frac{5}{(2t+1)^2} e^{\frac{1}{2t+1}} dt \\ &= \int_1^x -\frac{5}{2} \times \varphi'(t) e^{\varphi(t)} dt \\ &= \frac{-5}{2} \int_{\varphi(1)}^{\varphi(x)} e^t dt \\ &= \frac{-5}{2} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2x+1}} e^t dt \\ &= \frac{-5}{2} [e^t]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2x+1}} \\ &= \frac{-5}{2} \left(e^{\frac{1}{2x+1}} - e^{\frac{1}{3}} \right) \\ &= \frac{-5}{2} e^{\frac{1}{2x+1}} + \frac{5}{2} e^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

La constante $\frac{5}{2} e^{\frac{1}{3}}$ pouvant être éliminée, la fonction $x \mapsto \frac{-5}{2} e^{\frac{1}{2x+1}}$ est une primitive de f sur \mathbb{R}_+^* .

Remarque 12.1.19

On peut aussi procéder par « ajustements ». Reprenons la fonction f de l'exercice précédent, définie sur \mathbb{R}_+^* . On remarque que f est « presque » de la forme $u'e^u$, avec $u : x \mapsto \frac{1}{2x+1}$. Or, sur \mathbb{R}_+^* :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{1}{2x+1}} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x+1} \right) e^{\frac{1}{2x+1}} \\ &= \frac{-2}{(2x+1)^2} e^{\frac{1}{2x+1}} \end{aligned}$$

Par linéarité, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{-5}{2} e^{\frac{1}{2x+1}} \right) &= \frac{-5}{2} \times \frac{-2}{(2x+1)^2} e^{\frac{1}{2x+1}} \\ &= \frac{5}{(2x+1)^2} e^{\frac{1}{2x+1}} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{-5}{2} e^{\frac{1}{2x+1}}$ est bien une primitive de f sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 12.1.20

Calculer

$$I = \int_0^\pi \cos^3(x) \sin(x) dx$$

Correction. $x \mapsto \cos^3(x) \sin(x)$ est bien continue sur $[0; \pi]$: l'intégrale I est bien définie.

La fonction $\varphi : x \mapsto \cos(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$ et sa dérivée est $\varphi' : x \mapsto -\sin(x)$. Utilisons-la en tant que changement de variable :

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\pi -\varphi(x)^3 \varphi'(x) dx \\ &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} -x^3 dx \\ &= \int_1^{-1} -x^3 dx \\ &= \int_{-1}^1 x^3 dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

12.1.3 Primitives usuelles

Voici un tableau récapitulatif de primitives F de fonctions usuelles f à connaître. Ces primitives sont définies à une constante additive près.

$f(x)$	$F(x)$	Domaine
k avec $k \in \mathbb{R}$	kx	\mathbb{R}
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
x^n avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}^*
x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	\mathbb{R}_+
x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}_-^* \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	\mathbb{R}_+^*
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*
$e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$	\mathbb{R}
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	\mathbb{R}_+^*
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	\mathbb{R}
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	\mathbb{R}
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$ ou $-\arccos(x)$	$] -1; 1[$

De plus, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I contenant au moins deux points, on a le tableau suivant :

$f(x)$	$F(x)$	Conditions
$u'(x)u(x)^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	
$u'(x)u(x)^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	u ne s'annule pas
$u'(x)u(x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_+$	$\frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	u est à valeurs dans \mathbb{R}_+
$u'(x)u(x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{-1\}$	$\frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	u est à valeurs dans \mathbb{R}_+^*
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u)$	u ne s'annule pas
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$	u est à valeurs dans \mathbb{R}_+^*
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$	
$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$ $u'(x)(1+\tan^2(u(x)))$	$\tan(u(x))$	u est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$\arctan(u(x))$	
$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$	$\arcsin(u(x))$	u est à valeurs dans $] -1; 1[$

12.1.4 Des exemples à connaître

Les résultats suivants ne sont pas à connaître par cœur... Mais les méthodes mises en jeu sont classiques et à connaître !

Méthode 12.1.21

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Déterminer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ sur \mathbb{R} .

Correction. Pour tout réel x , on a

$$e^{ax} \cos(bx) + ie^{ax} \sin(bx) = e^{ax} (\cos(x) + i \sin(x)) = e^{(a+ib)x}$$

La fonction $f : x \mapsto e^{ax} \cos(bx) + ie^{ax} \sin(bx)$ a donc pour primitive $F : x \mapsto \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x}$ puisque $a+ib \neq 0$. Déterminons

ses parties réelles et imaginaires : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} \\ &= \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a-ib) (\cos(bx) + i \sin(bx)) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx) + i(a \sin(bx) - b \cos(bx))) \end{aligned}$$

On en déduit que $x \mapsto \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx))$ est une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ sur \mathbb{R} , et que $x \mapsto \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx))$ est une primitive de $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ sur \mathbb{R} .

Remarquons également que si α est un argument de $a+ib$, alors $a+ib = |a+ib| e^{i\alpha}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} \\ &= \frac{1}{|a+ib|} e^{-i\alpha} e^{(a+ib)x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{ax+i(bx-\alpha)} \\ &= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{i(bx-\alpha)} \\ &= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}} (\cos(bx-\alpha) + i \sin(bx-\alpha)) \end{aligned}$$

donc $x \mapsto \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos(bx-\alpha)$ et $x \mapsto \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin(bx-\alpha)$ sont des primitives respectives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

Exercice 12.1.22

Calculer

$$S = \int_0^\pi e^{-t} \cos(2t) dt$$

Méthode 12.1.23

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points sur lequel $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ est bien définie.

On veut déterminer une primitive de f sur I .

Pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a} \times \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} \\ &= \frac{1}{a} \times \frac{1}{x^2 + \beta x + \gamma} \end{aligned}$$

en posant $\beta = \frac{b}{a}$ et $\gamma = \frac{c}{a}$. Considérons alors la fonction polynomiale de degré 2 $P : x \mapsto x^2 + \beta x + \gamma$.

— Si P admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{1}{a} \times \frac{1}{(x-r_1)(x-r_2)}$$

On peut alors trouver $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{1}{a} \times \left(\frac{\lambda}{x-r_1} + \frac{\mu}{x-r_2} \right)$$

Une primitive de f sur I est alors

$$F : x \mapsto \frac{1}{a} (\lambda \ln|x-r_1| + \mu \ln|x-r_2|)$$

— Si P n'admet qu'une seule racine, notée r , alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{1}{a} \times \frac{1}{(x-r)^2}$$

Une primitive de f sur I est alors

$$F : x \mapsto \frac{1}{a} \times \frac{-1}{x-r}$$

— Si P n'admet aucune racine réelle, alors on passe par l'écriture canonique de P . Pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4}}$$

Si $\gamma - \frac{\beta^2}{4}$ était négatif ou nul, P aurait au moins une racine, ce qui n'est pas le cas. On en déduit que $\gamma - \frac{\beta^2}{4} > 0$.

Posons $\delta = \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}}$. Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a} \times \frac{1}{\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \delta^2} \\ &= \frac{1}{a\delta^2} \times \frac{1}{\left(\frac{x + \frac{\beta}{2}}{\delta}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

Une primitive de f sur I est alors :

$$F : x \mapsto \frac{1}{a\delta} \arctan\left(\frac{x + \frac{\beta}{2}}{\delta}\right)$$

Exercice 12.1.24

Calculer

$$S = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2t + 1} dt$$

Correction. Pour tout $t \in [0; 1]$, on a $t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 > 0$ donc S est bien définie puisque $t \mapsto \frac{1}{t^2 + 2t + 1}$ est

continue sur $[0; 1]$. De plus :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2} dt \\ &= \left[\frac{-1}{t+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{2} - \frac{-1}{1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 12.1.25

Calculer

$$S = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + t + 1} dt$$

Correction. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

L'intégrale S est donc définie puisque $t \mapsto \frac{1}{t^2 + t + 1}$ est continue sur $[0; 1]$. De plus :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= \frac{1}{\frac{3}{4}} \int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3} \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dt \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dt \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right) \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

12.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans toute cette section, I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points.

12.2.1 Définition

Définition 12.2.1 – Équation différentielle linéaire du premier ordre

Soient $(a, b) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^2$ un couple de fonctions continues sur I .

L'équation suivante, dont l'inconnue est une fonction $y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ dérivable, est une *équation différentielle linéaire d'ordre 1* :

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad (E)$$

La fonction b est appelée *second membre de l'équation (E)*

L'équation différentielle homogène associée à (E) est :

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (H)$$

Remarque 12.2.2

L'équation (E) est souvent abrégée de la façon suivante :

$$\forall t \in I, y' + a(t)y = b(t)$$

ou même

$$y' + a(t)y = b(t)$$

lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

Exercice 12.2.3

Vérifier que $f : t \mapsto t \cos(t)$ est une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' - \frac{1}{t}y = -t \sin(t) \quad (12.1)$$

sur \mathbb{R}_+^* .

Correction. f est bien dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(t) = \cos(t) - t \sin(t)$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f'(t) - \frac{1}{t}f(t) &= \cos(t) - t \sin(t) - \frac{1}{t}t \cos(t) \\ &= -t \sin(t) \end{aligned}$$

donc f est bien solution de l'équation différentielle donnée.

L'enjeu principal est alors de réussir à déterminer les solutions d'une équation différentielle donnée.

Propriété 12.2.4 – Principe de superposition

Soit $(a, b_1, b_2) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^3$ un triplet de fonctions continues sur I . Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On considère les équations différentielles linéaires d'ordre 1 suivantes :

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t) \quad (E_1)$$

et

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t) \quad (E_2)$$

Soit f_1 (respectivement f_2) une solution de (E_1) (respectivement (E_2)). Alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$$

Démonstration. f_1 et f_2 sont, par hypothèse, dérivables sur I donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ l'est aussi et pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(t) + a(t)(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) \\ &= \lambda_1 f_1'(t) + \lambda_2 f_2'(t) + \lambda_1 a(t)f_1(t) + \lambda_2 a(t)f_2(t) \\ &= \lambda_1 \underbrace{(f_1'(t) + a(t)f_1(t))}_{=b_1(t)} + \lambda_2 \underbrace{(f_2'(t) + a(t)f_2(t))}_{=b_2(t)} \\ &= \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \end{aligned}$$

donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est bien solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$$

□

Exercice 12.2.5

1. Montrer que $f_1 : t \mapsto \frac{1}{1+i}e^{it}$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + y(t) = e^{it}$$

2. Montrer que $f_2 : t \mapsto \frac{1}{1-i}e^{-it}$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + y(t) = e^{-it}$$

3. En déduire une solution à valeurs réelles de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + y(t) = \cos(t)$$

12.2.2 Ensemble des solutions

Dans tout ce qui suit, on reprend les notations de la définition 12.2.1.

Théorème 12.2.6 – Structure de l'ensemble des solutions de (E)

On note S_H l'ensemble des solutions de (H) et S_E l'ensemble des solutions de (E) .

On suppose que (E) admet au moins une solution, notée φ . Alors :

$$S_E = \{f + \varphi, f \in S_H\}$$

Remarque 12.2.7

- S_H n'est jamais vide : la fonction nulle sur I est automatiquement solution de l'équation homogène (H) .
 - Ce théorème fournit la structure de l'ensemble des solutions de (E) , ainsi qu'une méthode pour déterminer ces solutions :
 - Déterminer l'ensemble des solutions de (H) .
 - Déterminer **une** solution particulière de (E) .
- L'équation homogène associée joue donc un rôle clé dans la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Démonstration. Il s'agit de montrer que

$$S_E = \{f + \varphi, f \in S_H\}$$

On peut raisonner par double inclusion.

- **Montrons que** $\{f + \varphi, f \in S_H\} \subset S_E$: Soit $g \in \{f + \varphi, f \in S_H\}$. Il existe donc $f \in S_H$ telle que $g = f + \varphi$. g est alors solution de (E) d'après le principe de superposition et $g \in S_E$.
- **Montrons que** $S_E \subset \{f + \varphi, f \in S_H\}$: Soit $g \in S_E$. Posons $f = g - \varphi$. D'après le principe de superposition, f est alors solution de l'équation

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = \underbrace{b(t) - b(t)}_{=0}$$

qui n'est autre que (H) .

On a donc $f \in S_H$ et $g = f + \varphi$. Ainsi, on a bien $S_E \subset \{f + \varphi, f \in S_H\}$.

Par double inclusion, on a donc bien $S_E = \{f + \varphi, f \in S_H\}$. □

12.2.3 Résolution de l'équation homogène

On reprend de nouveau les notations de la définition 12.2.1.

Propriété 12.2.8

Soit A une primitive de a sur I .

Les solutions de (H) sont les fonctions, définies sur I , de la forme $t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où C est une constante quelconque de \mathbb{K} .

Démonstration. Remarquons que A existe puisque a est continue sur I .

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Puisque les solutions de (H) sont, par définition, dérivables sur I , on peut supposer sans perte de généralité que f est dérivable sur I .

Considérons la fonction $g : t \mapsto f(t)e^{A(t)}$, définie et dérivable sur I . Pour tout $t \in I$, on a $f(t) = g(t)e^{-A(t)}$ et

$$f'(t) = g'(t)e^{-A(t)} - A'(t)g(t)e^{-A(t)} = g'(t)e^{-A(t)} - a(t)f(t)$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
 f \text{ est solution de } (H) &\iff \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = 0 \\
 &\iff \forall t \in I, g'(t)e^{-A(t)} - a(t)f(t) + a(t)f(t) = 0 \\
 &\iff \forall t \in I, g'(t)\underbrace{e^{-A(t)}}_{\neq 0} = 0 \\
 &\iff \forall t \in I, g'(t) = 0 \\
 &\iff g \text{ est constante sur } I \\
 &\iff \exists C \in \mathbb{K}, \forall t \in I, g(t) = C \\
 &\iff \exists C \in \mathbb{K}, \forall t \in I, f(t)e^{A(t)} = C \\
 &\iff \exists C \in \mathbb{K}, \forall t \in I, f(t) = Ce^{-A(t)}
 \end{aligned}$$

Les solutions de (H) sont donc bien les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{-A(t)}$, où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque. \square

Remarque 12.2.9

Résoudre (H) revient donc à déterminer une primitive... D'où l'importance de la première partie de ce chapitre !

Exercice 12.2.10

Résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + y(t) = \cos(t)$$

12.2.4 Méthode de variation de la constante

De nouveau, on reprend les notations de la définition 12.2.1.

Propriété 12.2.11 – Méthode de variation de la constante

Soit A une primitive de a sur I .

Soit $C \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ dérivable. La fonction $\varphi : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$ est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, C'(t) = b(t)e^{A(t)}$$

Remarque 12.2.12

Autrement dit, afin de déterminer une solution particulière de (E) , il « suffit » de déterminer une primitive C de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I .

Une solution de (E) est alors $\varphi : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$.

On remarque que cette solution ressemble beaucoup à la forme générale des solutions de l'équation homogène, à la différence qu'on a remplacé la constante C par une fonction C .

Démonstration. C étant dérivable sur I , $\varphi : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$ l'est aussi et pour tout $t \in I$:

$$\varphi'(t) = C'(t)e^{-A(t)} - C(t)A'(t)e^{-A(t)} = C'(t) - a(t)C(t)e^{-A(t)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \varphi \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in I, \varphi'(t) + a(t) \varphi(t) = b(t) \\
 &\iff \forall t \in I, C'(t) e^{-A(t)} - a(t) C(t) e^{-A(t)} + a(t) C(t) e^{-A(t)} = b(t) \\
 &\iff \forall t \in I, C'(t) e^{-A(t)} = b(t) \\
 &\iff \forall t \in I, C'(t) = b(t) e^{A(t)} \\
 &\iff C \text{ est une primitive de } t \mapsto b(t) e^{A(t)} \text{ sur } I
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 12.2.13

Soit A une primitive de a sur I .

Puisque $t \mapsto b(t) e^{A(t)}$ est continue sur I , cette même fonction admet des primitives sur I , ce qui garantit l'existence de solutions à l'équation différentielle (E) .

Exercice 12.2.14

Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + ty(t) = e^{\frac{-t^2+t}{2}} \quad (E)$$

Correction. $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ est une primitive de $t \mapsto t$ sur \mathbb{R} . Les solutions (réelles) de l'équation homogène associée à (E) sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto C e^{\frac{-t^2}{2}}$, définies sur \mathbb{R} , avec $C \in \mathbb{R}$.

Cherchons maintenant une solution particulière de (E) sous la forme $\varphi : t \mapsto C(t) e^{\frac{-t^2}{2}}$, définie sur \mathbb{R} , où $C \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dérivable. φ est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, C'(t) e^{\frac{-t^2}{2}} = e^{\frac{-t^2+t}{2}}$$

ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, C'(t) = e^{\frac{-t^2+t}{2}} e^{\frac{t^2}{2}}$$

ou enfin

$$\forall t \in \mathbb{R}, C'(t) = e^{\frac{t}{2}}$$

La fonction $C : t \mapsto 2e^{\frac{t}{2}}$ convient : on en déduit que la fonction $\varphi : t \mapsto 2e^{\frac{t}{2}} e^{\frac{-t^2}{2}} = 2e^{\frac{-t^2+t}{2}}$ est une solution particulière de (E) .

Finalement, les solutions réelles de (E) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto C e^{\frac{-t^2}{2}} + 2e^{\frac{-t^2+t}{2}}$$

définies sur \mathbb{R} .

12.2.5 Problème de Cauchy

On reprend encore les notations de la définition 12.2.1.

Théorème 12.2.15

Soient $(a, b) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^2$ continues.

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.

La conjonction suivante, d'inconnue $y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ dérivable, est appelée *problème de Cauchy linéaire d'ordre 1* :

$$\begin{cases} \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) & (E) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

L'égalité $y(t_0) = y_0$ est appelée *condition initiale*.

Ce problème de Cauchy admet une unique solution.

Démonstration. Soit A une primitive de a sur I et φ une solution particulière de (E) . Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y : t \mapsto Ce^{-A(t)} + \varphi(t)$, où $C \in \mathbb{K}$. Avec cette notation, on a :

$$\begin{aligned} y(t_0) = y_0 &\iff Ce^{-A(t_0)} + \varphi(t_0) = y_0 \\ &\iff C = (y_0 - \varphi(t_0))e^{A(t_0)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} &\iff \exists C \in \mathbb{K}, \begin{cases} \forall t \in I, y(t) = Ce^{-A(t)} + \varphi(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \\ &\iff \exists C \in \mathbb{K}, \begin{cases} \forall t \in I, y(t) = Ce^{-A(t)} + \varphi(t) \\ C = (y_0 - \varphi(t_0))e^{A(t_0)} \end{cases} \\ &\iff \forall t \in I, y(t) = (y_0 - \varphi(t_0))e^{A(t_0)}e^{-A(t)} + \varphi(t) \end{aligned}$$

Le problème de Cauchy posé admet donc bien une unique solution. □

12.3 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

Dans tout ce qui suit, I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points.

12.3.1 Définition

Définition 12.3.1 – Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ continue. L'équation suivante, dont l'inconnue est une fonction $y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ deux fois dérivable, est une *équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants* :

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) \tag{E}$$

La fonction f est appelée *second membre* de l'équation (E) .

L'équation différentielle homogène associée est

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \tag{H}$$

a. On notera qu'ici, a et b sont des constantes.

On retrouve le principe de superposition vu dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Propriété 12.3.2 – Principe de superposition

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $(f_1, f_2) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^2$ continues. Soient φ_1 et φ_2 des solutions respectives des équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = f_1(t)$$

et

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = f_2(t)$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$$

Démonstration. Le principe est le même que pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1 : $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ est deux fois dérivable sur I puisque φ_1 et φ_2 le sont. De plus, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)''(t) + a(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)'(t) + b(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)(t) \\ &= \lambda_1 \varphi_1''(t) + \lambda_2 \varphi_2''(t) + a\lambda_1 \varphi_1'(t) + a\lambda_2 \varphi_2'(t) + b\lambda_1 \varphi_1(t) + b\lambda_2 \varphi_2(t) \\ &= \lambda_1 \underbrace{(\varphi_1''(t) + a\varphi_1'(t) + b\varphi_1(t))}_{=f_1(t)} + \lambda_2 \underbrace{(\varphi_2''(t) + a\varphi_2'(t) + b\varphi_2(t))}_{=f_2(t)} \\ &= \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) \end{aligned}$$

□

12.3.2 Ensemble des solutions

On reprend les notations de la définition 12.3.1. La structure de l'ensemble des solutions de (E) est similaire à celle obtenue pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

Théorème 12.3.3 – Ensemble des solutions de (E)

Soit φ une solution de (E) . Alors les solutions de (E) sont les fonctions de la fonction $t \mapsto h(t) + \varphi(t)$, où h est une solution quelconque de l'équation différentielle homogène associée à (E) .

Démonstration. C'est quasiment la même que pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1.

- Soit h une solution de l'équation homogène (H) . Posons $g = h + \varphi$. D'après le principe de superposition, g est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 + f(t)$$

c'est-à-dire de (E) .

- Soit g une solution de (E) . Posons $h = g - \varphi$. Toujours d'après le principe de superposition, h est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) - f(t) = 0$$

c'est-à-dire de (H) . g s'écrit donc bien $g = h + \varphi$ où h est une solution de l'équation homogène (H) .

□

Remarque 12.3.4

Tout comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, pour résoudre une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 2 à coefficients constants, on peut :

- Résoudre l'équation homogène associée.
- Déterminer **une** solution à (E).

Le théorème précédent fournit alors l'ensemble des solutions de (E).

12.3.3 Équation homogène

De nouveau, on reprend les notations de la définition 12.3.1.

Définition 12.3.5 – Équation caractéristique associée à (H)

L'équation polynomiale de degré 2 suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{K}$, est appelée *équation caractéristique associée à (H)* (ou à (E)) :

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (C)$$

Théorème 12.3.6 – Solutions complexes de (H)

Dans ce théorème, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Si l'équation caractéristique (EC) admet, dans \mathbb{C} , deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors les solutions **à valeurs complexes** de (H) sont les fonctions définies sur I de la forme

$$t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

où $(C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2$.

- Si l'équation caractéristique (H) n'admet, dans \mathbb{C} , qu'une seule racine, notée r_1 , alors les solutions **à valeurs complexes** de (H) sont les fonctions définies sur I de la forme

$$t \mapsto (C_1 + C_2 t) e^{r_1 t}$$

où $(C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2$.

Démonstration. Dans \mathbb{C} , l'équation caractéristique (EC) admet deux racines, éventuellement confondues, que nous noterons r_1 et r_2 . Soit $h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ deux fois dérivable. Posons $g : t \mapsto h(t) e^{-r_1 t}$, également deux fois dérivable sur I . Pour tout $t \in I$, on a :

$$h(t) = g(t) e^{r_1 t}$$

$$h'(t) = g'(t) e^{r_1 t} + r_1 g(t) e^{r_1 t}$$

$$\begin{aligned} h''(t) &= g''(t) e^{r_1 t} + r_1 g'(t) e^{r_1 t} + r_1 g'(t) e^{r_1 t} + r_1^2 g(t) e^{r_1 t} \\ &= g''(t) e^{r_1 t} + 2r_1 g'(t) e^{r_1 t} + r_1^2 g(t) e^{r_1 t} \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
 & h \text{ est solution de } (H) \\
 \iff & \forall t \in I, h''(t) + ah'(t) + bh(t) = 0 \\
 \iff & \forall t \in I, g''(t)e^{r_1 t} + 2r_1 g'(t)e^{r_1 t} + r_1^2 g(t)e^{r_1 t} \\
 & + a(g'(t)e^{r_1 t} + r_1 g(t)e^{r_1 t}) + b g(t)e^{r_1 t} = 0 \\
 \iff & \forall t \in I, (g''(t) + (2r_1 + a)g'(t))e^{r_1 t} + \underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)g(t)e^{r_1 t}}_{=0} = 0 \\
 \iff & \forall t \in I, (g''(t) + (2r_1 + a)g'(t)) \underbrace{e^{r_1 t}}_{\neq 0} = 0 \\
 \iff & \forall t \in I, g''(t) + (2r_1 + a)g'(t) = 0
 \end{aligned}$$

On est alors ramené à une équation différentielle linéaire d'ordre 1, dont g' devrait être solution. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 & h \text{ est solution de } (H) \\
 \iff & \exists C_2 \in \mathbb{C}, \forall t \in I, g'(t) = C_2 e^{-(2r_1 + a)t}
 \end{aligned}$$

Toutefois, d'après le chapitre sur les nombres complexes et les relations coefficients-racines d'une équation polynomiale de degré 2, on sait que $r_1 + r_2 = -a$ et donc que $a = -r_1 - r_2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 & h \text{ est solution de } (H) \\
 \iff & \exists C_2 \in \mathbb{C}, \forall t \in I, g'(t) = C_2 e^{-(2r_1 - r_1 - r_2)t} \\
 \iff & \exists C_2 \in \mathbb{C}, \forall t \in I, g'(t) = C_2 e^{-(r_1 - r_2)t}
 \end{aligned}$$

Deux cas peuvent se présenter :

— Si $r_1 = r_2$ (c'est-à-dire si (EC) n'a qu'une seule solution) : alors $r_1 - r_2 = 0$ et :

$$\begin{aligned}
 & h \text{ est solution de } (H) \\
 \iff & \exists C_2 \in \mathbb{C}, \forall t \in I, g'(t) = C_2 \\
 \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in I, g(t) = C_1 + C_2 t \\
 \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in I, h(t)e^{-r_1 t} = C_1 t + C_2 t \\
 \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in I, h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_1 t}
 \end{aligned}$$

— Si $r_1 \neq r_2$ (c'est-à-dire si (EC) admet deux solutions distinctes) : alors $r_1 - r_2 \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}
 & h \text{ est solution de } (H) \\
 \iff & \exists C_2 \in \mathbb{C}, \forall t \in I, g'(t) = C_2 e^{-(r_1 - r_2)t} \\
 \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in I, g(t) = \frac{C_2}{-(r_1 - r_2)} e^{-(r_1 - r_2)t} + C_1 \\
 \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in I, g(t) = C_2 e^{-(r_1 - r_2)t} + C_1
 \end{aligned}$$

en renommant C_2 la constante $\frac{C_2}{-(r_1 - r_2)}$. Poursuivons :

$$\begin{aligned}
 & h \text{ est solution de } (H) \\
 \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in I, h(t)e^{-r_1 t} = C_2 e^{-(r_1 - r_2)t} + C_1 \\
 \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in I, h(t) = (C_2 e^{-(r_1 - r_2)t} + C_1) e^{r_1 t} \\
 \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in I, h(t) = C_2 e^{r_2 t} + C_1 e^{r_1 t}
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 12.3.7 – Solutions réelles de (H)

Dans ce corollaire, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (EC) .

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique (EC) admet deux racines réelles distinctes notées r_1 et r_2 . Les solutions réelles de (H) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels quelconques.

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique (EC) n'admet qu'une seule racine, notée r , et celle-ci est réelle. Les solutions réelles de (H) sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{rt}$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels quelconques.

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique (EC) admet deux racines complexes conjuguées (non réelles), notées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de (H) sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t}$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels quelconques.

Lemme 12.3.8

On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Alors y est solution de (H) si et seulement si il existe une solution complexe g de (H) dont y est la partie réelle, autrement dit telle que

$$\forall t \in I, y(t) = \operatorname{Re}(g(t))$$

Preuve du lemme. — Si y est solution de (H) , elle est bien la partie réelle d'une solution complexe de (H) : elle-même.

- Réciproquement, supposons qu'il existe $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ solution de (H) telle que :

$$\forall t \in I, y(t) = \operatorname{Re}(g(t))$$

y est alors bien à valeurs dans \mathbb{R} , est deux fois dérivable (puisque g l'est) et pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) &= \operatorname{Re}(g''(t)) + a \operatorname{Re}(g'(t)) + b \operatorname{Re}(g(t)) \\ &= \operatorname{Re}(g''(t) + ag'(t) + bg(t)) \text{ car } a \text{ et } b \text{ sont réels} \\ &= 0 \text{ car } g \text{ est solution de } (H) \end{aligned}$$

y est alors bien une solution réelle de (H) . □

Preuve du corollaire. — Supposons que $\Delta > 0$ et notons r_1 et r_2 les deux racines réelles de l'équation caractéristique (EC) . Soit $y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. D'après le lemme, y est solution de (H) si et seulement si il existe $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, solution complexe de (H) , dont y est la partie réelle.

D'après le théorème 12.3.6, cela revient à dire qu'il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re}(C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}) \\ &= \operatorname{Re}(C_1) e^{r_1 t} + \operatorname{Re}(C_2) e^{r_2 t} \text{ car } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont réels} \end{aligned}$$

ou encore qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ (en notant $\lambda_1 = \operatorname{Re}(C_1)$ et $\lambda_2 = \operatorname{Re}(C_2)$) tel que pour tout $t \in I$:

$$y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$$

- Le cas $\Delta = 0$ est similaire et laissé en exercice.
- Supposons que $\Delta < 0$ et notons $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique (EC). Soit $y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. D'après le lemme, y est solution de (H) si et seulement si il existe $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, solution complexe de (H), dont y est la partie réelle.
D'après le théorème 12.3.6, cela revient à dire qu'il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re} \left(C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left(C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t} \right) e^{\alpha t} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t} \right) e^{\alpha t} \text{ car } e^{\alpha t} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Or, avec ces même notations :

$$\begin{aligned} C_1 e^{i\beta t} &= (\operatorname{Re}(C_1) + i\operatorname{Im}(C_1)) (\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) \\ &= \operatorname{Re}(C_1) \cos(\beta t) - \operatorname{Im}(C_1) \sin(\beta t) + i(\operatorname{Re}(C_1) \sin(\beta t) + \operatorname{Im}(C_1) \cos(\beta t)) \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Re} \left(C_1 e^{i\beta t} \right) = \operatorname{Re}(C_1) \cos(\beta t) - \operatorname{Im}(C_1) \sin(\beta t)$$

De la même façon (attention aux signe : on utilise la parité de cos et l'imparité de sin) :

$$\operatorname{Re} \left(C_2 e^{-i\beta t} \right) = \operatorname{Re}(C_2) \cos(\beta t) + \operatorname{Im}(C_2) \sin(\beta t)$$

On a donc, par somme :

$$\operatorname{Re} \left(C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t} \right) = (\operatorname{Re}(C_1) + \operatorname{Re}(C_2)) \cos(\beta t) + (\operatorname{Im}(C_2) - \operatorname{Im}(C_1)) \sin(\beta t)$$

ou encore

$$\operatorname{Re} \left(C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t} \right) = \lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)$$

en notant $\lambda_1 = \operatorname{Re}(C_1) + \operatorname{Re}(C_2) \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = \operatorname{Im}(C_2) - \operatorname{Im}(C_1) \in \mathbb{R}$.

Finalement, y est solution de (H) si et seulement si il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in I$:

$$y(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t}$$

□

Exercice 12.3.9

Déterminer les solutions réelles sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0$$

Correction. Cette équation différentielle est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et est homogène. Son équation caractéristique, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$, est

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36 = (6i)^2$ et ses deux racines sont

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{4+6i}{2} & r_2 &= \frac{4-6i}{2} \\ &= 2+3i & &= 2-3i \end{aligned}$$

Les solutions réelles de l'équation différentielle donnée sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda_1 \cos(3t) + \lambda_2 \sin(3t)) e^{2t}$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels quelconques.

12.3.4 Cas particuliers de solutions particulières

Dans le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, et une fois l'équation homogène associée résolue, il reste à déterminer une solution particulière pour en déduire l'ensemble de toutes les solutions.

On peut s'inspirer des équations différentielles d'ordre 1 et « faire varier » les constantes, mais ceci ne sera pas développé dans ce chapitre.

Il y a toutefois des cas particuliers à connaître.

Si le second membre est polynomial

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $P : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction polynomiale. On peut alors chercher une solution particulière de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = P(t)$$

sous la forme d'une fonction polynomiale, souvent de même degré que P .

Exercice 12.3.10

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 2t - t^2 \quad (E)$$

Correction. L'équation caractéristique, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$, de l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants (E) est

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

ou encore $(x-1)^2 = 0$. Sa seule racine est 1, et les solutions réelles de l'équation homogène associée à (E) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^t$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels quelconques.

Cherchons une solution particulière y de (E) sous la forme $y : t \mapsto \alpha + \beta t + \gamma t^2$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. y est alors deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 2t - t^2 &\iff 2\gamma - 2(\beta + 2\gamma t) + \alpha + \beta t + \gamma t^2 = 2t - t^2 \\ &\iff 2\gamma - 2\beta + \alpha + (-4\gamma + \beta)t + \gamma t^2 = 2t - t^2 \end{aligned}$$

On résout alors :

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \beta - 4\gamma = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - 2\beta = 2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

On en déduit que la fonction

$$t \mapsto -2 - 2t - t^2$$

est une solution particulière de (E).

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^t - 2 - 2t - t^2$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels quelconques.

Si le second membre est exponentiel

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $(A, \alpha) \in \mathbb{K}^2$. On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = Ae^{\alpha t} \quad (E)$$

Cherchons une solution de (E) sous la forme $y : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est une fonction polynomiale. y est alors deux fois dérivable sur I et pour tout $t \in I$:

$$y'(t) = P'(t)e^{\alpha t} + \alpha P(t)e^{\alpha t}$$

$$y''(t) = P''(t)e^{\alpha t} + 2\alpha P'(t)e^{\alpha t} + \alpha^2 P(t)e^{\alpha t}$$

Ainsi (en factorisant directement par $e^{\alpha t}$) :

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) &= Ae^{\alpha t} \\ \iff (P''(t) + (2\alpha + a)P'(t) + (\alpha^2 + a\alpha + b)P(t))e^{\alpha t} &= Ae^{\alpha t} \\ \iff P''(t) + (2\alpha + a)P'(t) + (\alpha^2 + a\alpha + b)P(t) &= A \end{aligned}$$

Ainsi :

- Si $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$, il suffit de faire en sorte que P soit constant et égal, en tout $t \in I$, à $\frac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b}$.
- Si $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$, l'égalité précédente devient

$$P''(t) + (2\alpha + a)P'(t) = A$$

Deux sous-cas peuvent alors se produire :

- Si $2\alpha + a \neq 0$, il suffit alors de faire en sorte que P' soit constant et égal, en tout $t \in I$, à $\frac{1}{2\alpha + a}$. On peut donc prendre $P : t \mapsto \frac{A}{2\alpha + a}t$.
- Si $2\alpha + a = 0$, l'égalité précédente devient simplement $P''(t) = 1$. On peut alors prendre $P : t \mapsto \frac{A}{2}t^2$.

Remarque 12.3.11

Supposons que $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$. Alors

$$2\alpha + a = 0 \iff \alpha \text{ est l'unique racine de la fonction polynomiale } x \mapsto x^2 + ax + b$$

En effet, en notant β l'autre racine de cette fonction polynomiale, on sait que $\alpha + \beta = -a$ et donc que $2\alpha + a = \alpha - \beta$. Ce cas échéant, on dit que α est *racine double* de l'équation polynomiale $x^2 + ax + b = 0$, et en est *racine simple* dans le cas contraire.

Il ne s'agit certainement pas d'apprendre ces formules par cœur, mais on peut par contre retenir la méthode suivante :

Méthode 12.3.12 : Second membre de la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t}$

Soit $(a, b, A, \alpha) \in \mathbb{K}^4$. On peut chercher une solution particulière de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = Ae^{\alpha t}$$

sous l'une des formes suivantes :

- Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique (c'est-à-dire si $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$), on cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto \lambda e^{\alpha t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Si α est racine simple de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto \lambda t e^{\alpha t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Si α est racine double de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto \lambda t^2 e^{\alpha t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dans le cas d'un second membre de la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t}$ avec $A \in \mathbb{K}$, on peut utiliser le principe de superposition (voir exercice ci-après).

Exercice 12.3.13

Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 4e^{3t} \quad (12.2)$$

Correction. L'équation caractéristique est

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

et ses racines sont 2 et 3. Les solutions réelles de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{3t}$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels quelconques.

Cherchons une solution particulière de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 4e^{3t}$$

On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$: 3 est donc racine simple de l'équation caractéristique et on cherche une solution sous la forme $y : t \mapsto \lambda t e^{3t}$. y est alors deux fois dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y'(t) = \lambda e^{3t} + 3\lambda t e^{3t}$$

$$y''(t) = 3\lambda e^{3t} + 3\lambda e^{3t} + 9\lambda t e^{3t} = 6\lambda e^{3t} + 9\lambda t e^{3t}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 4e^{3t} \iff (6\lambda + 9\lambda t - 5\lambda - 15\lambda t + 6\lambda t)e^{3t} = 4e^{3t} \\ \iff \lambda = 4$$

La fonction $t \mapsto 4te^{3t}$ est donc une solution particulière de (12.2). Les solutions réelles de cette équation sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda_1 e^{3t} + \lambda_2 e^{2t} + 4te^{3t}$$

où λ_1 et λ_2 sont deux réels quelconques.

Second membre défini par une fonction circulaire

Soit $(a, b, B, \omega) \in \mathbb{R}^4$. On considère les équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = B \cos(\omega t) \quad (E_1)$$

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = B \sin(\omega t) \quad (E_2)$$

Pour en trouver une solution particulière, il suffit de déterminer une solution particulière de l'équation

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = Be^{i\omega t}$$

et d'en prendre la partie réelle (pour l'équation (E_1)) ou la partie imaginaire (pour l'équation (E_2)).

Exercice 12.3.14

Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 4y(t) = 3 \cos(2t) \quad (12.3)$$

Correction. Cette équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants a pour équation caractéristique

$$x^2 - 4 = 0$$

qui a pour racines 2 et -2 .

Les solutions réelles de l'équation homogène associée sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{-2t}$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels quelconques.

Cherchons alors une solution particulière (complexe) à l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 4y(t) = 3e^{2it} \quad (12.4)$$

2 étant racine simple de l'équation caractéristique, on cherche cette solution sous la forme $y : t \mapsto \lambda te^{2it}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. y est alors deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y'(t) = \lambda e^{2it} + 2i\lambda te^{2it} \\ y''(t) = 2i\lambda e^{2it} + 2i\lambda e^{2it} - 4\lambda te^{2it} = 4i\lambda e^{2it} - 4\lambda te^{2it}$$

Ainsi :

$$y''(t) - 4y(t) = 3e^{2it} \iff (4i\lambda - 4\lambda t + 4\lambda t)e^{2it} = 3e^{2it} \\ \iff 4i\lambda = 3 \\ \iff \lambda = \frac{3}{4i} = \frac{-3i}{4}$$

La fonction $t \mapsto \frac{-3i}{4}te^{2it}$ est donc une solution particulière de l'équation (12.4). Sa partie réelle est alors une solution de l'équation (12.3). Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{-3i}{4}te^{2it} \right) = \frac{3}{4}t \sin(2t)$$

Les solutions réelles de l'équation (12.3) sont alors les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{-2t} + \frac{3}{4}t \sin(2t)$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels quelconques.

12.3.5 Problème de Cauchy

Théorème 12.3.15 – Problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ continue.

Soit $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

La conjonction suivante, d'inconnue $y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ deux fois dérivable, est appelée *problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 à coefficients constants* :

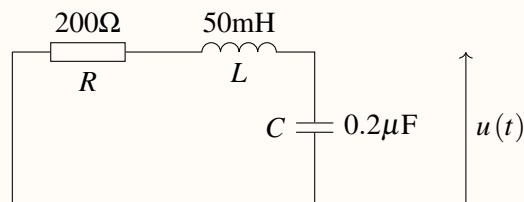
$$\begin{cases} \forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

Les équations $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$ sont appelées *conditions initiales* de ce problème de Cauchy. Ce problème de Cauchy admet une unique solution.

■ *Démonstration.* Admis. □

Exercice 12.3.16 – Circuit RLC en régime libre pseudo-périodique

On étudie, en fonction du temps exprimé en secondes, la tension u aux bornes d'un condensateur dans le circuit RLC suivant. A l'instant initial 0, ce condensateur est chargé et la tension précédemment citée est égale à 12V.



La loi des mailles conduit au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+, u''(t) + \frac{R}{L}u'(t) + \frac{1}{LC}u(t) = 0 \\ u(0) = 12 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(tension initiale)} \\ \text{(intensité initiale)} \end{array}$$

Exprimer $u(t)$ en fonction de t , pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Correction. L'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, u''(t) + \frac{R}{L}u'(t) + \frac{1}{LC}u(t) = 0 \quad (12.5)$$

a pour équation caractéristique, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$:

$$x^2 + \frac{R}{L}x + \frac{1}{LC} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{R}{L} &= \frac{200}{50 \times 10^{-3}} \\ &= 4 \times 10^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{LC} &= \frac{1}{50 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^{-9}} \\ &= 10^8 \end{aligned}$$

Son discriminant est $\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} = -384 \times 10^6 = (8\sqrt{6} \times 10^3 i)^2$ et ses racines sont

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-4 \times 10^3 + 8\sqrt{6} \times 10^3 i}{2} \\ &= (-2 - 4\sqrt{6}i) 10^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{-4 \times 10^3 - 8\sqrt{6} \times 10^3 i}{2} \\ &= (-2 + 4\sqrt{6}i) 10^3 \end{aligned}$$

Notons :

$$\omega = 4\sqrt{6} \times 10^3$$

$$\lambda = 2 \times 10^3$$

de sorte que $r_1 = -\lambda - \omega i$ et $r_2 = -\lambda + \omega i$.

Il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$u(t) = (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) e^{-\lambda t}$$

et

$$u'(t) = \omega(-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)) e^{-\lambda t} - \lambda(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) e^{-\lambda t}$$

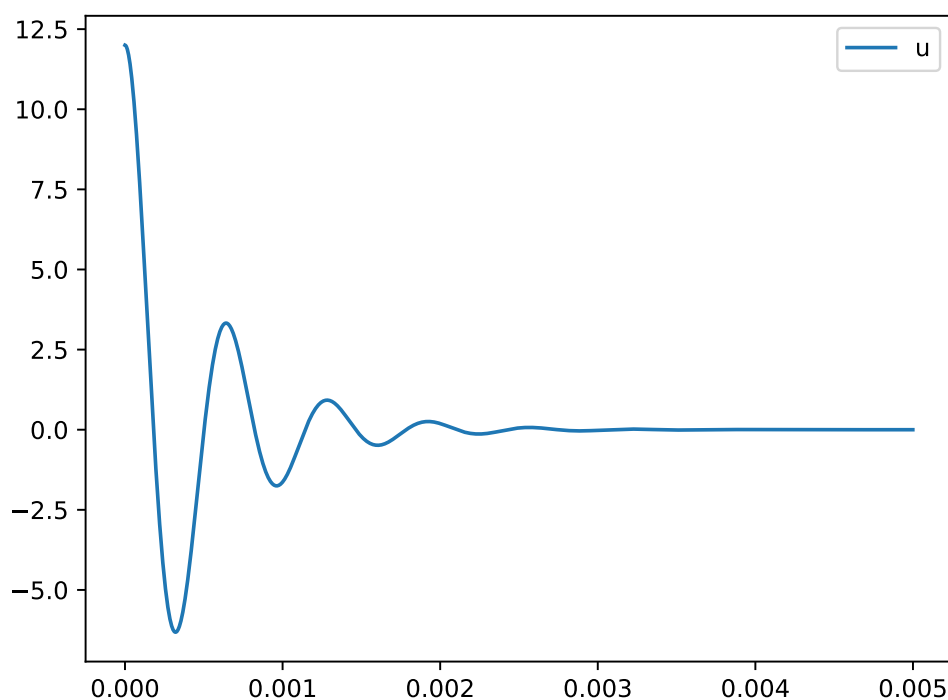
Les conditions initiales donnent alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u(0) &= 12 \\ u'(0) &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 = 12 \\ \omega C_2 - \lambda C_1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_1 = 12 \\ C_2 = \frac{\lambda C_1}{\omega} = \sqrt{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, u(t) = (12 \cos(\omega t) + \sqrt{6} \sin(\omega t)) e^{-\lambda t}$$

avec $\omega = 4\sqrt{6}10^3$ et $\lambda = 2 \times 10^3$.



12.4 Exercices

Exercice 12.4.1

Déterminer des primitives de f sur I dans les cas suivants :

1. $f : x \mapsto \frac{x+1}{x}, I = \mathbb{R}_+^*$.

2. $f : x \mapsto \frac{x}{2x+1}, I = \mathbb{R}_+^*$.

3. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}, I = \mathbb{R}_+^*$.

4. $f : x \mapsto e^x \sin(x), I = \mathbb{R}$.

5. $f : x \mapsto \frac{3}{x^2+4}, I = \mathbb{R}$.

6. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}, I =]1; +\infty[$.

7. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, I =]-1; 1[$.

8. $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}, I =]-1; 1[$.

9. $f : x \mapsto \frac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)}, I = \mathbb{R}$ (on pourra poser $\varphi : x \mapsto \sin(x)$).

Exercice 12.4.2

Calculer

$$\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx$$

On pourra chercher $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{x+2}$$

Exercice 12.4.3

Calculer les intégrales suivantes :

1.

$$\int_0^1 x^3 - x^2 + x - 1 dx$$

2.

$$\int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t}$$

3.

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

4.

$$\int_{-3}^3 |x^2 - 4| dx$$

5.

$$\int_{-3}^5 \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^5} dx$$

6.

$$\int_{-4}^4 \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx$$

7.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

8.

$$\int_{-1}^3 (x-1)^3 e^x dx$$

9.

$$\int_e^{e^3} t \ln(t) dt$$

10.

$$\int_1^e t^3 \ln^2(t) dt.$$

Exercice 12.4.4

On définit une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx.$$

1. Calculer I_1 2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, I_n en fonction de I_{n-1} .3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ 4. Majorer la fonction $x \mapsto (1-x)^n e^x$ sur $[0; 1]$. En déduire la limite de (I_n) puis montrer que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ **Exercice 12.4.5**

Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^x$ définie sur \mathbb{R} .

On pourra chercher cette primitive sous la forme $F_n : x \mapsto P_n(x) e^x$ où P_n est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n .

Correction. Suivons l'indication de l'énoncé. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Enfin, posons $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto P_n(x) e^x$, définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
 F_n'(x) &= P_n'(x) e^x + P_n(x) e^x \\
 &= (P_n'(x) + P_n(x)) e^x \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^n a_k x^k \right) e^x \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^n a_k x^k \right) e^x \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} ((k+1) a_{k+1} + a_k) x^k + a_n x^n \right) e^x
 \end{aligned}$$

Pour obtenir $x^n e^x$, il suffit donc d'avoir

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, (k+1) a_{k+1} + a_k = 0 \\ a_n = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, a_k = -(k+1) a_{k+1} \\ a_n = 1 \end{cases}$$

On suppose donc que c'est le cas.

Une récurrence immédiate montre alors que dans ce cas, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $a_{n-k} = (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!}$. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$a_k = a_{n-(n-k)} = (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-(n-k))!} = (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}$$

Finalement, la fonction

$$F_n : x \mapsto \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k \right) e^x$$

est une primitive de $x \mapsto x^n e^x$ sur \mathbb{R} .

Exercice 12.4.6

Calculer

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$$

Exercice 12.4.7

Résoudre, sur $]0; \pi[$:

$$y' + \frac{1}{\sin(x)} y = \frac{1}{\sin(x)}$$

On pourra remarquer que, pour tout $x \in]0; \pi[$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin(t)} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{1 - \cos^2(t)} \sin(t) dt$$

et utiliser le changement de variable $\varphi : t \mapsto \cos(t)$.

Exercice 12.4.8

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n(x) \, dx$$

Exercice 12.4.9

Déterminer les solutions ne s'annulant pas sur \mathbb{R}_+^* de

$$yy'' - y'^2 + \frac{1}{x}yy' = 0$$

On pourra poser $g = \frac{y'}{y}$.

Exercice 12.4.10

1. Déterminer les fonctions y définies et dérivables sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{C} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = e^{ix}$$

2. Déterminer les fonctions y définies et dérivables sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R} telles que

(a)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \cos(x) \quad (12.6)$$

(b)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \sin(x) \quad (12.7)$$

Exercice 12.4.11

Résoudre

1. $y' - \frac{2}{x}y = 0;$

2. $y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0;$

3. $y' + \cos(x)y = 0;$

4. $y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0;$

5. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{x}{x-1}.$

Exercice 12.4.12

Résoudre

1. $y'' + y' - 6y = 0;$

2. $y'' + y' - 6y = 3 + 2x;$

3. $y'' + y' - 6y = e^{2x}.$

Exercice 12.4.13

Via le changement de variable $x = \sin(t)$, trouver une primitive sur $[-1; 1]$ de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 12.4.14

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$;
2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-t^2}} dt$;
3. $\int_0^2 \frac{1}{3x^2+2x+1} dx$;
4. $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

Exercice 12.4.15

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \sqrt{e^x+1}$ sur \mathbb{R} .

12.5 DM conducteur**Exercice 39**

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^{2x} \cos(3x)$ sur \mathbb{R} . PTS 3 (hors barème)

Correction. Posons $\varphi : x \mapsto e^{(2+3i)x}$, de sorte que pour tout réel x :

$$\operatorname{Re}(\varphi(x)) = e^{2x} \cos(3x)$$

φ a pour primitive, sur \mathbb{R} :

$$\Phi : x \mapsto \frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)x}$$

Pour tout réel x , on a alors :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)x} \\ &= \frac{2-3i}{|2+3i|^2} e^{(2+3i)x} \\ &= \frac{2-3i}{2^2+3^2} e^{2x} e^{3ix} \\ &= \frac{1}{13} e^{2x} (2-3i) (\cos(3x) + i \sin(3x)) \end{aligned}$$

En développant, on obtient alors :

$$\operatorname{Re}(\Phi(x)) = \frac{1}{13} e^{2x} (2 \cos(3x) + 3 \sin(3x))$$

Ainsi, $F : x \mapsto \frac{1}{13} e^{2x} (2 \cos(3x) + 3 \sin(3x))$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .

Exercice 40

1. On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt$.

Montrer que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt$$

2. En calculant $I + I$, montrer que $I = \frac{\pi}{4}$.

3. Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2} + t} dt$$

Correction. I est bien définie car $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)}$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En effet, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \cos(x) + \sin(x) = 0 &\iff \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) = 0 \\ &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

et $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cap \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \emptyset$.

1. Soit $\varphi : t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$, de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\varphi'(t) = -1$ et $t = \frac{\pi}{2} - \varphi(t)$. Par changement de variable :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi(t)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi(t)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi(t)\right)} \times (-1) \times \underbrace{\varphi'(t)}_{=-1} dt \\ &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-\sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)} dt \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} I + I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

donc $2I = \frac{\pi}{2}$ et $I = \frac{\pi}{4}$.

3. Avec le changement de variable $\psi : t \mapsto \sin(t)$, de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}+t} dt &= \int_{\psi(0)}^{\psi(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}+t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\psi(t)^2}+\psi(t)} \psi'(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}+\sin(t)} \cos(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} dt \end{aligned}$$

car, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$$

car $\cos(t) \geq 0$

Finalement

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}+t} dt = I = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 41

Résoudre, les équations différentielles suivantes :

1. $(x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

2. $\cos^3(x)y' = \sin(x)y$ sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

3. $y' + \frac{1}{t}y = e^t$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$. PTS 2

4. $y' - 3y = \sin(2t)$ sur \mathbb{R} . PTS 2

Correction. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2+1)^2 > 0$ et :

$$(x^2+1)^2 y'(x) + 2x(x^2+1)y(x) = 1 \iff y'(x) + \frac{2x}{x^2+1}y(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$a : x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ est bien continue sur \mathbb{R} et a pour primitive $A : x \mapsto \ln(x^2+1)$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-\ln(x^2+1)} = \frac{C}{x^2+1}$ avec $C \in \mathbb{K}$.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable. On cherche une solution particulière de l'équation fournie sous la forme $\varphi : x \mapsto \frac{\gamma(x)}{x^2+1}$.

En injectant φ dans l'équation, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \frac{2x}{x^2+1}\varphi(x) &= \frac{1}{(x^2+1)^2} \iff \frac{\gamma'(x)}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^2} \\ &\iff \gamma'(x) = \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

On donc prendre, par exemple, $\gamma : x \mapsto \arctan(x)$. La fonction $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x^2+1}$ est donc une solution particulière de l'équation de l'énoncé.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation fournie est

$$\left\{ x \mapsto \frac{C + \arctan(x)}{x^2 + 1}, C \in \mathbb{K} \right\}$$

où ces fonctions sont définies sur \mathbb{R} .

2. Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, on a $\cos^3(x) > 0$ donc

$$\cos^3(x) y'(x) = \sin(x) y(x) \iff y'(x) - \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} y(x) = 0$$

On est donc ramenés à une équation homogène.

$a : x \mapsto \frac{-\sin(x)}{\cos^3(x)} = \cos'(x) \cos^{-3}(x)$ est continue sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et a pour primitive $A : x \mapsto \frac{1}{-2} \cos^{-2}(x) = \frac{-1}{2 \cos^2(x)}$ sur cet intervalle.

L'ensemble des solutions de l'équation fournie, homogène, est alors

$$\left\{ x \mapsto C e^{\frac{1}{2 \cos^2(x)}}, C \in \mathbb{K} \right\}$$

3. $a : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et a pour primitive $A : t \mapsto \ln(t)$ sur cet intervalle. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto C e^{-\ln(t)} = \frac{C}{t}$ avec $C \in \mathbb{K}$.

Cherchons alors une solution particulière à l'équation fournie sous la forme $\varphi : t \mapsto \frac{\gamma(t)}{t}$ où $\gamma : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable. En injectant φ dans l'équation, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) + \frac{1}{t} \varphi(t) &= e^t \iff \frac{\gamma'(t)}{t} = e^t \\ &\iff \gamma'(t) = t e^t \end{aligned}$$

On cherche alors une primitive de $t \mapsto t e^t$ sur \mathbb{R}_+^* , intervalle sur lequel cette fonction est continue. D'après le théorème fondamental de l'analyse, une telle primitive est $F : x \mapsto \int_1^x t e^t dy$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in [1; x]$ (ou $[x; 1]$ si $x < 1$), posons :

$$\begin{aligned} u(t) &= t & v'(t) &= e^t \\ u'(t) &= 1 & v(t) &= e^t \end{aligned}$$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; x]$ donc en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^x t e^t dt &= [t e^t]_1^x - \int_1^x e^t dt \\ &= x e^x - [e^t]_1^x \\ &= x e^x - e - (e^x - 1) \\ &= x e^x - e - e^x + 1 \\ &= (x - 1) e^x + 1 - e \end{aligned}$$

Ainsi, $\gamma : t \mapsto (t-1)e^t$ est une primitive de $t \mapsto te^t$ sur \mathbb{R}_+^* . La fonction $t \mapsto \frac{(t-1)e^t}{t}$ est donc une solution particulière de l'équation initialement fournie.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc

$$\left\{ t \mapsto \frac{C + (t-1)e^t}{t}, C \in \mathbb{K} \right\}$$

où ces fonctions sont définies sur \mathbb{R}_+^* .

4. L'équation homogène a pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{3t}$ avec $C \in \mathbb{K}$.

On cherche alors une solution particulière sous la forme $\varphi : t \mapsto \gamma(t)e^{3t}$ avec $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) - 3\varphi(t) &= \sin(2t) \iff \gamma'(t)e^{3t} = \sin(2t) \\ &\iff \gamma'(t) = \sin(2t)e^{-3t} \end{aligned}$$

On cherche alors une primitive de $t \mapsto \sin(2t)e^{-3t}$ sur \mathbb{R} : il suffit pour cela de prendre la partie imaginaire d'une primitive de $t \mapsto e^{(2i-3)t}$ comme $t \mapsto \frac{1}{2i-3}e^{(2i-3)t}$.

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i-3}e^{(2i-3)t} &= \frac{-2i-3}{|2i-3|^2}e^{2it}e^{-3t} \\ &= \frac{-1}{13}e^{-3t}(2i+3)(\cos(2t) + i\sin(2t)) \end{aligned}$$

qui a pour partie imaginaire

$$\frac{-1}{13}e^{-3t}(2\cos(2t) + 3\sin(2t))$$

Finalement, on peut poser $\gamma : t \mapsto \frac{-1}{13}e^{-3t}(2\cos(2t) + 3\sin(2t))$. La fonction $t \mapsto \frac{-1}{13}e^{-3t}(2\cos(2t) + 3\sin(2t))e^{3t} = \frac{-1}{13}(2\cos(2t) + 3\sin(2t))$ est donc une solution particulière de l'équation posée dans l'énoncé.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc

$$\left\{ t \mapsto \frac{-1}{13}(2\cos(2t) + 3\sin(2t)) + Ce^{3t}, C \in \mathbb{K} \right\}$$

Exercice 42

On considère l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos(4x) \quad (E)$$

d'inconnue $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fois dérivable.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = e^{x(1+4i)} \quad (E')$$

3. En déduire les solutions de (E).

Correction. 1. L'équation caractéristique, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$, est

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

Elle a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 = -16 = (4i)^2$ et pour racines

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2-4i}{2} & r_2 &= \frac{2+4i}{2} \\ &= 1-2i & &= 1+2i \end{aligned}$$

Les solutions (réelles, comme le demande l'énoncé) de l'équation homogène associée à (E) sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto (\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)) e^x$$

où α et β sont des réels quelconques.

2. $1+4i$ n'est pas racine de l'équation homogène : on cherche donc une solution particulière de l'équation (E') sous la forme $y : x \mapsto \lambda e^{(1+4i)x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y'(x) = \lambda (1+4i) e^{(1+4i)x}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \lambda (1+4i)^2 e^{(1+4i)x} \\ &= \lambda (8i-15) e^{(1+4i)x} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &y \text{ est solution de } (E') \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, \lambda (8i-15) e^{(1+4i)x} - 2\lambda (1+4i) e^{(1+4i)x} + 5\lambda e^{(1+4i)x} = e^{(1+4i)x} \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, \lambda (8i-15-2(1+4i)+5) = 1 \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, -12\lambda = 1 \\ \iff &\lambda = \frac{-1}{12} \end{aligned}$$

La fonction

$$g : x \mapsto \frac{-1}{12} e^{(1+4i)x}$$

est donc solution particulière de (E') .

3. On obtient une solution particulière de (E) , il suffit de prendre la partie réelle de g .

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(g(x)) &= \operatorname{Re}\left(\frac{-1}{12} e^{(1+4i)x}\right) \\ &= \frac{-1}{12} e^x \cos(4x) \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto (\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)) e^x - \frac{1}{12} e^x \cos(4x)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 43

On cherche les fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2-x) \quad (*)$$

1. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, deux fois dérivable, vérifie (*).

(a) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f(x)$$

(b) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant (*).

Correction. 1. (a) Pour tout réel x et puisque f et $x \mapsto 2-x$ sont dérivables sur \mathbb{R} , on a

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) \\ &= \frac{d}{dx}(f(2-x)) \\ &= \left(\frac{d}{dx}(2-x)\right) \times f'(2-x) \\ &= (-1) \times f(x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

On a donc $f'' + f = 0$.

- (b) L'équation caractéristique est $x^2 + 1 = 0$, qui a pour racines i et $-i$. Les solutions (ici réelles) de l'équation $y'' + y = 0$, homogène, sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Si f vérifie (*), alors $f'' + f = 0$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout réel x : $f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$.

Ainsi, pour tout réel x , on a

$$f'(x) = -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$$

donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(2-x) \\ \iff -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) &= \alpha \cos(2-x) + \beta \sin(2-x) \\ \iff -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) &= \alpha (\cos(2)\cos(x) + \sin(2)\sin(x)) + \beta (\sin(2)\cos(x) - \cos(2)\sin(x)) \\ \iff -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) &= (\alpha \cos(2) + \beta \sin(2))\cos(x) + (\alpha \sin(2) - \beta \cos(2))\sin(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f &\text{ vérifie } (*) \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) &= (\alpha \cos(2) + \beta \sin(2))\cos(x) + (\alpha \sin(2) - \beta \cos(2))\sin(x) \\ \iff \begin{cases} -\alpha &= \alpha \sin(2) - \beta \cos(2) \\ \beta &= \alpha \cos(2) + \beta \sin(2) \end{cases} \end{aligned}$$

En effet, le sens réciproque est trivial, et se le sens direct s'obtient en remplaçant x par 0 et par $\frac{\pi}{2}$. Il ne reste plus qu'à résoudre.

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} -\alpha &= \alpha \sin(2) - \beta \cos(2) \\ \beta &= \alpha \cos(2) + \beta \sin(2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin(2) + 1)\alpha - \cos(2)\beta &= 0 \\ \cos(2)\alpha - (1 - \sin(2))\beta &= 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{(-1 - \sin(2))(-1 + \sin(2))}{\cos(2)} - \cos(2) \right) \beta &= 0 \\ \cos(2)\alpha - (1 - \sin(2))\beta &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\frac{(-1 - \sin(2))(-1 + \sin(2))}{\cos(2)} - \cos(2) &= \frac{(-1)^2 - \sin^2(2) - \cos^2(2)}{\cos(2)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Le système précédent équivaut donc à :

$$\{ \cos(2)\alpha - (1 - \sin(2))\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1 - \sin(2)}{\cos(2)}\beta$$

Finalement, les fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , vérifiant (\star) sont les fonctions de la fonction

$$x \mapsto \frac{1 - \sin(2)}{\cos(2)}\beta \cos(x) + \beta \sin(x) = \beta \times \left(\frac{1 - \sin(2)}{\cos(2)} \cos(x) + \sin(x) \right)$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Une dernière simplification s'impose. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\beta \times \left(\frac{1 - \sin(2)}{\cos(2)} \cos(x) + \sin(x) \right) &= \frac{\beta}{\cos(2)} ((1 - \sin(2)) \cos(x) + \cos(2) \sin(x)) \\
&= \frac{\beta}{\cos(2)} (\cos(x) - \sin(2) \cos(x) + \cos(2) \sin(x)) \\
&= \frac{\beta}{\cos(2)} (\cos(x) - \sin(2 - x)) \\
&= \beta' (\cos(x) - \sin(2 - x))
\end{aligned}$$

en posant $\beta' = \frac{\beta}{\cos(2)}$.

Conclusion : les fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , vérifiant (\star) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \beta' (\cos(x) - \sin(2 - x))$$

où β' est un réel quelconque.

Chapitre 13

Nombres réels et suites

13.1	Borne supérieure ou inférieure d'un ensemble de réels	364
13.2	Généralités sur les suites	366
13.2.1	Définition	366
13.2.2	Monotonie	368
13.3	Limites de suites	370
13.3.1	Définition	370
13.3.2	Opérations sur les limites	374
13.3.3	Théorèmes de comparaison	378
13.3.4	Limites et inégalités	379
13.3.5	Théorème de la limite monotone	380
13.3.6	Suites extraites	381
13.3.7	Suites adjacentes	383
13.3.8	Extension au cas complexe	384
13.4	Suites usuelles	386
13.4.1	Suites arithmétiques	386
13.4.2	Suites géométriques	386
13.4.3	Suites arithmético-géométrique	388
13.4.4	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	389
13.4.5	Étude de suites définies par récurrence	393
13.5	Exercices	398
13.6	DM conducteur	402

13.1 Borne supérieure ou inférieure d'un ensemble de réels

Définition 13.1.1 – Borne supérieure

Soit A une partie de \mathbb{R} non vide majorée. Alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, appelé *borne supérieure de A* et noté $\sup(A)$.

■ *Démonstration.* Admis. □

Remarque 13.1.2

Étant un minimum, si $\sup(A)$ existe, il est unique.

Exemple 13.1.3

$[0; 3[$ est majoré et son plus petit majorant est 3, ainsi

$$\sup([0; 3[) = 3$$

De même

$$\sup([0; 3]) = 3$$

Remarquons que 3 est le maximum de $[0; 3]$ mais n'est pas le maximum de $[0; 3[$.

De façon analogue, on définit la notion de *borne inférieure*.

Définition 13.1.4 – Borne inférieure

Soit A une partie de \mathbb{R} non vide minorée. Alors l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, appelé *borne inférieure de A* et noté $\inf(A)$.

Propriété 13.1.5 – Caractérisation de la borne supérieure

Soit A une partie non vide majorée de \mathbb{R} . Soit $M \in \mathbb{R}$. Alors :

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M & (M \text{ est un majorant de } A) \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in A, M - \varepsilon < x & (M - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant de } A) \end{cases}$$

Démonstration. — Supposons que $M = \sup(A)$. Par définition, M est un majorant de A donc :

$$\forall x \in A, x \leq M$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $M - \varepsilon < M$ et comme M est le plus petit majorant de A , $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A , autrement dit il existe bien $x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x$, ce qui achève de prouver le sens direct.

— Réciproquement, supposons que

$$\begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \end{cases}$$

M est donc un majorant de A : montrons que c'est le plus petit. Supposons qu'il existe M' , majorant de A tel que $M' < M$. Posons $\varepsilon = M - M' > 0$. Par hypothèse, il existe $x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x$ ou encore $M' < x$ et M' n'est pas un majorant de A : absurde. On a donc bien $M = \sup(A)$. □

De façon analogue, on a le résultat suivant pour la borne inférieure :

Propriété 13.1.6 – Caractérisation de la borne inférieure

Soit A une partie non vide minorée de \mathbb{R} . Soit $m \in \mathbb{R}$. Alors :

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, m \leq x & (m \text{ est un minorant de } A) \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in A, x < m + \varepsilon & (m - \varepsilon \text{ n'est pas un minorant de } A) \end{cases}$$

Propriété 13.1.7

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . Si A admet un maximum M (resp. un minimum m), alors A admet une borne supérieure (resp. inférieure) et $M = \sup(A)$ (resp. $m = \inf(A)$).

Démonstration. Supposons que A admet un maximum, noté M . M est donc un majorant de A .

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: on a $M - \varepsilon < M$ et $M \in A$. Par caractérisation de la borne supérieure, M est la borne supérieure de A .

La démonstration est similaire pour le minimum. □

Exercice 13.1.8

Soit $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. A admet-elle un minimum, un maximum, une borne supérieure, une borne inférieure ? Si oui, les déterminer.

Correction. Pour commencer, A est non vide (il contient par exemple $1 - \frac{1}{1} = 0$).

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

donc

$$0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$$

A est donc minorée et majorée : elle admet une borne inférieure et supérieure.

Remarquons que 0 est un minorant de A et que $0 \in A$. 0 est donc le minimum et la borne inférieure de A :

$$\min(A) = \inf(A) = 0$$

C'est différent pour 1 puisque $1 \notin A$. Montrons que 1 est la borne supérieure de A . C'en est déjà un majorant : considérons alors $\varepsilon > 0$ et montrons que $1 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A , c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $1 - \varepsilon < x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On résout :

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} &\iff \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\iff n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

Posons $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, alors $n \in \mathbb{N}^*$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$. On a donc bien trouvé $x \in A$ (avec $x = 1 - \frac{1}{n}$) tel que $1 - \varepsilon < x$.

1 est donc bien la borne supérieure de A :

$$\sup(A) = 1$$

Puisque $1 \notin A$, A n'admet pas de maximum (sinon, celui-ci serait forcément 1, ce qui est exclu).

13.2 Généralités sur les suites

13.2.1 Définition

Soit \mathcal{A} un ensemble non vide quelconque.

Définition 13.2.1 – Suite

On appelle *suite d'éléments de \mathcal{A}* toute fonction u définie sur une partie I de \mathbb{N} à valeurs dans \mathcal{A} .
 Pour tout $n \in I$, $u(n)$ est aussi noté u_n et est appelé *terme de rang n* de la suite u .
 On note également $u = (u_n)_{n \in I}$ et on dit que u_n est le *terme général de la suite u* .
 L'ensemble des suites définies sur I à valeurs dans \mathcal{A} est noté \mathcal{A}^I .

Remarque 13.2.2

- En reprenant les notations ci-dessus, si u et v sont deux suites définies sur I , alors u et v sont égales si et seulement si pour tout $n \in I$, on a $u_n = v_n$.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites définies sur \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{R} .
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ est l'ensemble des suites définies sur \mathbb{N}^* à valeurs dans \mathbb{C} .
- Dans le cas d'une suite u définie sur \mathbb{N} , on pourra noter $u = (u_n)$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

Commentaire

Dans toute la suite de ce chapitre, on s'intéresse aux suites définies sur \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{R} .
 Cependant, les résultats vus ci-après peuvent être étendus sans difficulté aux suites définies sur \mathbb{N}^* , $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou tout ensemble de la forme $\mathbb{N} \setminus \llbracket 0; n_0 \rrbracket$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
 Nous utiliserons allègrement ces résultats étendus dans les exercices et exemples qui suivent.

Exemple 13.2.3

Soit $u = \left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Alors le terme de rang 10 de la suite u est

$$u_{10} = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$$

Une suite peut être définie de manière explicite : à tout $n \in \mathbb{N}$, on associe un élément u_n de \mathcal{A} défini explicitement à partir de n .

Exemple 13.2.4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{1+n}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors définie de manière explicite.
 On peut facilement calculer les termes de u : par exemple $u_{10} = \sqrt{11}$.

Exemple 13.2.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de solutions complexes de l'équation $z^n - z = 0$. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors définie de façon explicite.
 Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la valeur de u_n ?

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

Si $n = 0$, on a

$$z^n - z = 0 \iff 1 - z = 0 \iff z = 1$$

Ainsi $u_0 = 1$.

Supposons que $n \geq 1$. Alors :

$$z^n - z = 0 \iff z(z^{n-1} - 1) = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z^{n-1} = 1$$

Les solutions de cette équation sont donc 0 et les $n - 1$ racines $n - 1$ -ième de l'unité (dont 0 ne fait pas partie). On a donc $u_n = n$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Une suite peut également être définie par récurrence : les premiers termes sont fixés, et les termes suivants sont définis à partir des précédents.

Exemple 13.2.6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n^2 + 1} \end{cases}$$

Que vaut u_3 ?

Nous reviendrons plus en détails sur l'étude de telles suites dans la partie 13.4.5.

Propriété vraie à partir d'un certain rang

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère un prédicat \mathcal{P}_n .

On dit que \mathcal{P}_n est vraie à partir d'un certain rang si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \mathcal{P}_n$$

Exemple 13.2.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 - \frac{3}{n}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, les valeurs de u_n sont strictement positives.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n > 0 \iff 1 - \frac{3}{n} > 0 \iff 1 > \frac{3}{n} \iff n > 3$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 4$, on a bien $u_n > 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs strictement positives à partir d'un certain rang.

13.2.2 Monotonie

Définition 13.2.8 – Suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante, (strictement) monotone

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels.

— On dit que u est *croissante* si

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n < m \implies u_n \leq u_m$$

— On dit que u est *décroissante* si

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n < m \implies u_n \geq u_m$$

— On dit que u est *strictement croissante* si

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n < m \implies u_n < u_m$$

— On dit que u est *strictement décroissante* si

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n < m \implies u_n > u_m$$

On dit qu'une suite est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou décroissante.

Remarque 13.2.9

Une suite étant un cas particulier de fonction, on retrouve les définitions générales de la croissance / décroissance / monotonie.

Exemple 13.2.10

La suite $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone : $u_0 = 1 > -1 = u_1$ donc u n'est pas croissante, mais $u_1 = -1 < 1 = u_2$ donc u n'est pas non plus décroissante.

Exercice 13.2.11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$$

Étudier le sens de variation de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \\ &= \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n}^2 - \sqrt{n+1}^2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Les fonctions $n \mapsto \sqrt{n}$ et $n \mapsto \sqrt{n+1}$ sont strictement croissantes sur \mathbb{N} , à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . La fonction $t \mapsto \frac{-1}{t}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . Par composition, la suite u est donc strictement croissante sur \mathbb{N} .

Propriété 13.2.12

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels. Alors :

- u est croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- u est décroissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
- u est strictement croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
- u est strictement décroissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.

Démonstration. Traitons le cas d'une suite strictement croissante, les autres cas sont similaires et laissés en exercice.

- Supposons u strictement croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $n < n+1$, on a bien $u_n < u_{n+1}$ par définition de la stricte croissance.
- Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < u_{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une récurrence immédiate montre alors que pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $m > n$, on a $u_n < u_m$. En effet :
 - $u_n < u_{n+1}$ par hypothèse, ce qui initialise la récurrence.
 - Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m > n$ et supposons que $u_n < u_m$. Alors

$$u_n < \underbrace{u_m < u_{m+1}}_{\text{par hypothèse}}$$

ce qui achève la récurrence. □

Méthode 13.2.13 : Étudier la monotonie d'une suite

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour étudier la monotonie de u , on peut chercher à déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple, si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et u est croissante.

Exercice 13.2.14

Étudier le sens de variation de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n+1}{n}$$

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{(n+2)n - (n+1)^2}{n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: u est strictement décroissante.

Exercice 13.2.15

1. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x - e^{-x} \leq 0$$

2. On définit une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} \end{cases}$$

Étudier les variations de u .

Correction. 1. Soit $f : x \mapsto 1 - x - e^{-x}$, définie et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -1 + e^{-x}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff e^{-x} \geq 1 \\ &\iff x \leq 0 \end{aligned}$$

f est donc croissante sur \mathbb{R}_- et décroissante sur \mathbb{R}_+ : elle atteint son maximum en 0. Or $f(0) = 0$, et finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x - e^{-x} \leq 0$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n \leq 0$$

d'après la question précédente. La suite u est donc décroissante.

13.3 Limites de suites

13.3.1 Définition

Définition 13.3.1 – Limite d'une suite

Soit $u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

— Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que u admet l pour limite (ou que u tend vers l) si :

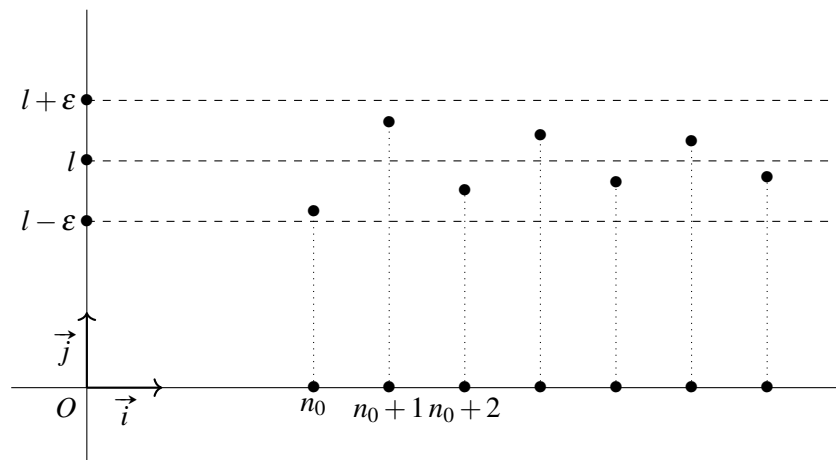
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$$

— On dit que u a pour limite $+\infty$ (ou que u tend vers $+\infty$) si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies u_n \geq M$$

— On dit que u a pour limite $-\infty$ (ou que u tend vers $-\infty$) si :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies u_n \leq m$$



Suite convergente vers l : pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, à partir d'un certain rang n_0 , les termes de u sont tous dans $[l - \varepsilon; l + \varepsilon]$.

Remarque 13.3.2

Soit $(M, M') \in \mathbb{R}^2$ avec $M' \leq M$. Supposons qu'il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies u_n \geq M$$

Puisque $M \geq M'$, on a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies u_n \geq M'$$

Dans la définition d'une suite tendant vers $+\infty$, on peut donc se contenter de montrer (par exemple) que

$$\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies u_n \geq M$$

Il en est de même dans le cas d'une suite tendant vers $-\infty$.

Remarque 13.3.3

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $I = \mathbb{N} \setminus \llbracket 0; n_0 \rrbracket$.

Soit $u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $u|_I = (u_n)_{n \in I}$.

Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Alors u admet l pour limite si et seulement si $u|_I$ admet l pour limite.

Cela signifie que pour étudier la limite d'une suite, on peut si nécessaire exclure ses premiers termes.

Propriété 13.3.4 – Unicité de la limite

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si u possède une limite (finie ou non), celle-ci est unique.

Démonstration. Supposons que u admet l et l' pour limite, et que l et l' sont des réels (les autres cas, par exemple si l est finie mais pas l' , sont laissés en exercice).

Supposons que $l \neq l'$ et posons $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{3} > 0$. Puisque u admet l et l' pour limites, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon \quad (13.1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies |u_n - l'| \leq \varepsilon \quad (13.2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $n \geq \max(n_0, n_1)$, de sorte que $n \geq n_0$ et $n \geq n_1$. On a alors

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \text{ et } |u_n - l'| \leq \varepsilon$$

donc, par inégalité triangulaire :

$$|l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| \leq \varepsilon + \varepsilon = \frac{2|l - l'|}{3}$$

et en particulier

$$|l - l'| \leq \frac{2|l - l'|}{3}$$

ce qui est absurde puisque $|l - l'| > 0$.

On a donc bien $l = l'$. □

L'unicité de la limite permet d'introduire la notation suivante :

Notation

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, admettant une limite l (finie ou non).

On dit alors que l est la limite de u , et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ ou encore } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

Définition 13.3.5 – Suite convergente, suite divergente

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que la suite (u_n) *converge* si elle admet une limite finie.

Sinon, on dit que la suite (u_n) *diverge*.

Remarque 13.3.6

- Pour une suite, diverger signifie *ne pas avoir de limite* ou *avoir une limite non finie*.
- Dire que u converge vers un réel l revient à dire que $(u_n - l)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, ou encore que $(|u_n - l|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 13.3.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n}{n+1}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Correction. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} |u_n - 1| \leq \varepsilon &\iff \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \leq \varepsilon \\ &\iff \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| \leq \varepsilon \\ &\iff \left| \frac{-1}{n+1} \right| \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} \leq n+1 \end{aligned}$$

Posons $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq n_0$, on a

$$n + 1 \geq n_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

donc $|u_n - 1| \leq \varepsilon$.

On a bien montré, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'existence de n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq n_0$: $|u_n - 1| \leq \varepsilon$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bien convergente vers 1.

Propriété 13.3.8

Soit u une suite réelle convergente. Alors u est bornée.

Démonstration. Il suffit de montrer que la suite $|u|$ est majorée.

Notons $l \in \mathbb{R}$ la limite de u . Posons $\varepsilon = 1$. Par définition, il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta$, on a

$$|u_n - l| \leq 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $n \geq \eta$, alors

$$|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| \leq 1 + |l|$$

— Si $n < \eta$, alors $u_n \in \{u_k, k \in I \cap [0; \eta - 1]\}$: or cet ensemble est une partie finie de \mathbb{N} et admet donc un majorant M (s'il est vide, n'importe quel réel convient).

Dans les deux cas, on a

$$|u_n| \leq \max(M, 1 + |l|)$$

donc $|u|$ est majorée et u est bornée. □

Propriété 13.3.9

Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

— $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq v_n$

— v converge vers 0

Alors u converge vers l .

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a déjà $0 \leq |u_n - l| \leq v_n$ donc $0 \leq v_n$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque v converge vers 0, il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq \eta \implies |u_n - l| \leq v_n = |v_n| \leq \varepsilon$$

Ainsi u converge vers l . □

Propriété 13.3.10

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$.

Alors $|u|$ converge vers $|l|$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par inégalité triangulaire

$$0 \leq ||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc d'après la propriété précédente :

$$|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |l|$$

□

Remarque 13.3.11

La réciproque est fautive : si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, alors

$$|u_n| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

mais on verra que u ne converge pas.

Propriété 13.3.12 – Suite convergente de limite strictement positive

Soit u une suite réelle définie sur \mathbb{N} , que l'on suppose convergente vers un réel strictement positif. Alors u est strictement positive à partir d'un certain rang, autrement dit, il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies u_n > 0$$

Démonstration. Notons $l \in \mathbb{R}_+^*$ la limite de u . Posons $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$. Puisque u converge vers l , il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in I$ avec $n \geq \eta$:

$$|u_n - l| \leq \frac{l}{2}$$

donc $l - u_n \leq \frac{l}{2}$ ou encore

$$0 < \frac{l}{2} \leq u_n$$

Ainsi, pour tout $n \in I$ avec $n \geq \eta$, on a bien $u_n > 0$.

□

13.3.2 Opérations sur les limites

Propriété 13.3.13 – Suites convergentes vers 0

1. Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ toutes deux convergentes vers 0. Alors $u + v$ converge vers 0.
2. Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que u converge vers 0 et que v est bornée. Alors uv converge vers 0.

Démonstration. 1. Supposons que u converge vers $l \in \mathbb{R}$ et que v converge vers l' . Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Par définition, il existe $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} n \geq \eta_0 \implies |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq \eta_1 \implies |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Posons alors $\eta = \max(\eta_0, \eta_1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta$, on a $n \geq \eta_0$ et $n \geq \eta_1$ donc, par inégalité triangulaire :

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$u + v$ est donc bien convergente vers 0.

2. Supposons que u converge vers 0 et que v soit bornée. En particulier, il existe $M \in \mathbb{R}$, que nous supposons strictement positif (sans perte de généralité) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ et comme u converge vers 0, il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta$, on a :

$$|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

donc uv converge bien vers 0. □

Corollaire 13.3.14 – Suites convergentes

Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes respectivement vers $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda u + \mu v$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.
2. uv converge vers ll' .
3. Si $l' \neq 0$ alors $\frac{u}{v}$ converge vers $\frac{l}{l'}$.

Démonstration. 1. Pour tout $n \in I$, on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda l + \mu l')| = |\lambda(u_n - l) + \mu(v_n - l')| \leq |\lambda| |u_n - l| + |\mu| |v_n - l'|$$

La suite $(|\lambda|)_{n \in I}$ est constante donc bornée, et la suite $(|u_n - l|)_{n \in I}$ converge vers 0 : on a donc $|l| |u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et, de même, $|\mu| |v_n - l'| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, $|\lambda| |u_n - l| + |\mu| |v_n - l'| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\lambda u + \mu v$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.

2. Pour tout $n \in I$, on a, par inégalité triangulaire :

$$0 \leq |u_n v_n - ll'| = |(u_n - l)v_n + l(v_n - l')| \leq |u_n - l| |v_n| + |l| |v_n - l'|$$

Or u converge vers l donc $u_n - l \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et v est convergente donc bornée. On a donc $|u_n - l| |v_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après 13.3.13. De plus $|l| |v_n - l'| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a donc, encore d'après 13.3.13 : $|u_n - l| |v_n| + |l| |v_n - l'| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puis $|u_n v_n - ll'| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ c'est-à-dire que uv converge vers ll' .

3. Puisque v converge vers $l' \in \mathbb{R}^*$, $|v|$ converge vers $|l'| > 0$. Puisque $\frac{|l'|}{2} > 0$, il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in I$ avec $n \geq \eta$:

$$|l'| - |v_n| \leq ||l'| - |v_n|| \leq |l' - v_n| \leq \frac{|l'|}{2}$$

par inégalité triangulaire. Soit $n \in I$ avec $n \geq \eta$. On a donc $|l'| - \frac{|l'|}{2} \leq |v_n|$ donc $0 < \frac{|l'|}{2} \leq |v_n|$ et par passage à l'inverse :

$$0 < \frac{1}{|v_n|} \leq \frac{2}{|l'|}$$

Ainsi :

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{l}{l'} \right| = \left| \frac{u_n l' - v_n l}{l' v_n} \right| = |u_n l' - v_n l| \times \frac{1}{|l' v_n|} \leq |u_n l' - v_n l| \times \frac{2}{l'^2}$$

Or $u_n l' - v_n l \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l l' - l' l = 0$ donc

$$|u_n l' - v_n l| \times \frac{2}{l'^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\frac{u}{v}$ converge donc bien vers $\frac{l}{l'}$ d'après 13.3.9.

□

Notation

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$. On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l^+ \text{ ou } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l^+$$

si u converge vers l et si u est supérieure ou égale à l à partir d'un certain rang.

De même, on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l^- \text{ ou } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l^-$$

si u converge vers l et si u est inférieure ou égale à l à partir d'un certain rang.

Propriété 13.3.15 – Somme divergente de suites

Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si u est minorée et si v tend vers $+\infty$, alors $u + v$ tend vers $+\infty$.
2. Si u est majorée et si v tend vers $-\infty$, alors $u + v$ tend vers $-\infty$.

Démonstration. 1. Supposons u minorée par $m \in \mathbb{R}$ et que v tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta$, on ait $v_n \geq M - m$. On a alors $u_n + v_n \geq m + M - m = M$: $u + v$ tend bien vers $+\infty$.

2. Raisonnement similaire.

□

Propriété 13.3.16 – Produit divergent de suites

Soient u et v deux suites réelles définies sur \mathbb{N} .

1. Si u est minorée par un réel strictement positif et si v tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors uv tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
2. Si u est majorée par un réel strictement négatif et si v tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors uv tend vers $-\infty$ (respectivement $+\infty$).

Démonstration. 1. Soit m un minorant strictement positif de u . Supposons que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Puisque v tend vers $+\infty$, il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta$, on ait $v_n \geq \frac{M}{m} \geq 0$. On a alors

$$u_n v_n \geq m v_n \geq m \frac{M}{m} = M$$

ainsi uv tend vers $+\infty$. La preuve est similaire si v tend vers $-\infty$.

2. Preuve similaire.

□

Propriété 13.3.17 – Inverse d'une suite de limite nulle

Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si v tend vers 0^+ , alors $\frac{1}{v}$ tend vers $+\infty$.
2. Si v tend vers 0^- , alors $\frac{1}{v}$ tend vers $-\infty$.

Démonstration. 1. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque v tend vers 0^+ , il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta$, on ait $v_n \geq 0$ et $v_n = |v_n| \leq \frac{1}{M} > 0$ puis $\frac{1}{v_n} \geq M$ par passage à l'inverse. v diverge donc bien vers $+\infty$.

2. On applique le point précédent à $-v$, qui tend vers 0^+ .

□

Remarque 13.3.18

Si v tend vers 0, sans information sur son signe, on peut seulement dire que $\frac{1}{v}$ ne converge pas.

Dans les tableaux suivants, l'abréviation « F.I. » signifie « forme indéterminée » : cela veut dire que l'on ne connaît pas la valeur de la limite mentionnée ni même si elle existe.

Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que u admet l pour limite et que v admet l' pour limite, avec $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Limite de $u + v$	$l' = -\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$l' = +\infty$
$l = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$l \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l + l'$	$+\infty$
$l = +\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

Limite de uv	$l' = -\infty$	$l' \in \mathbb{R}_-^*$	$l = 0$	$l' \in \mathbb{R}_+^*$	$l' = +\infty$
$l = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	ll'	0	ll'	$-\infty$
$l = 0$	F.I.	0	0	0	F.I.
$l \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	ll'	0	ll'	$+\infty$
$l = +\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

Dans le tableau suivant, on suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Limite de $\frac{u}{v}$	$l' = -\infty$	$l' \in \mathbb{R}_-^*$	$l' = 0^-$	$l' = 0$	$l' = 0^+$	$l' \in \mathbb{R}_+^*$	$l' = +\infty$
$l = -\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$l \in \mathbb{R}_-^*$	0^+	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$\frac{l}{l'}$	0^-
$l = 0^-$	0^+	0^+	F.I.	F.I.	F.I.	0^-	0^-
$l = 0$	0	0	F.I.	F.I.	F.I.	0	0
$l = 0^+$	0^-	0^-	F.I.	F.I.	F.I.	0^+	0^+
$l \in \mathbb{R}_+^*$	0^-	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$\frac{l}{l'}$	0^+
$l = +\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple 13.3.19 – Exemple de forme indéterminée pour une somme

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n + (-n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

Cependant,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1) = +\infty$$

Cela montre que dans, pour une somme, le cas « $l = +\infty$, $l' = -\infty$ » est indéterminé.

Exemple 13.3.20 – Exemple de forme indéterminée pour un produit

On a

$$n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cependant,

$$n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } n^2 \times \frac{1}{n} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Cela montre que dans, pour un produit, le cas « $l = +\infty$, $l' = 0$ » est indéterminé.

Exercice 13.3.21

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n}{n + \sqrt{n}}$$

13.3.3 Théorèmes de comparaison**Théorème 13.3.22 – Théorème d'encadrement et de comparaison**

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- A partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$
- u et w convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.

Alors v converge vers l .

Démonstration. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq v_n \leq w_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on a donc

$$0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$$

ainsi

$$|v_n - l| = |v_n - u_n + u_n - l| \leq |v_n - u_n| + |u_n - l| = v_n - u_n \leq w_n - u_n + |u_n - l|$$

Or u et w convergent vers l donc $w_n - u_n = w_n - l - (u_n - l) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + 0 = 0$.

De plus $|u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par 13.3.13, on a donc $w_n - u_n + |u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: v est bien convergente vers l . □

Théorème 13.3.23 – Théorème de divergence par minoration

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- A partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
 Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq v_n$.

Soit $M \in \mathbb{R}$: il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies M \leq u_n$.

Posons $\eta' = \max(\eta, n_0)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta'$, on a donc : $M \leq u_n \leq v_n$ et en particulier $M \leq v_n$: la suite v diverge donc bien vers $+\infty$. \square

Théorème 13.3.24 – Théorème de divergence par majoration

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

— À partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n$

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de divergence par minoration à $-u$ et $-v$. \square

Exercice 13.3.25

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq |u_n| = \left| \frac{\cos(n)}{n} \right| = \frac{|\cos(n)|}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, u converge vers 0 par encadrement.

13.3.4 Limites et inégalités

Propriété 13.3.26 – Passage à la limite dans une inégalité large

Soient u et v deux suites réelles définies sur I . On suppose que :

— u et v convergent.

— À partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n$.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Démonstration. Notons l et l' les limites respectives de u et v .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = u_n - v_n$, qui est négatif à partir d'un certain rang par hypothèse. La suite $(w_n)_{n \in I}$ est convergente vers $l - l'$.

Supposons que $l - l' > 0$. D'après la propriété 13.3.12, il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in I$ avec $n \geq \eta$:

$$0 < w_n$$

C'est absurde puisque w est négative à partir d'un certain rang, donc $l - l' \leq 0$ et $l \leq l'$. \square

Remarque 13.3.27

Attention, l'inégalité obtenue après passage à la limite est large : rien ne permet en général d'affirmer qu'elle est stricte. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < \frac{1}{n}$, pourtant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$$

13.3.5 Théorème de la limite monotone

Le théorème suivant est très important : il permet de montrer qu'une suite converge sans pour autant connaître sa limite.

Théorème 13.3.28 – Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose que u est croissante à partir d'un certain rang.
Si u est majorée, alors u converge vers $l = \sup \{u_n, n \in I\}$.
Sinon, u diverge vers $+\infty$.
2. On suppose que u est décroissante à partir d'un certain rang.
Si u est minorée, alors u converge vers $l = \inf \{u_n, n \in I\}$.
Sinon, u diverge vers $-\infty$.

Démonstration. 1. u est supposée croissante à partir d'un certain rang. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq u_{n+1}$.

— Supposons u majorée. L'ensemble $\mathcal{U} = \{u_n, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ est donc une partie non vide majorée de \mathbb{R} : elle admet donc une borne supérieure que nous noterons l .

Montrons que u converge vers l . Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: par caractérisation de la borne supérieure, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de \mathcal{U} : il existe donc $\eta \in \mathbb{N}$ avec $\eta \geq n_0$ tel que

$$l - \varepsilon < u_\eta \leq l$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \eta$, on a donc :

$$l - \varepsilon < u_\eta \leq u_n \leq l$$

puisque l est un majorant de \mathcal{U} et puisque u est croissante. On a donc également $-\varepsilon < u_n - l \leq 0$ ainsi $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta$: la suite u converge vers l .

— Supposons maintenant que u n'est pas majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$. Puisque u n'est pas majorée, il existe $\eta \in \mathbb{N}$ avec $\eta \geq n_0$ tel que $u_\eta \geq M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta$, on a alors par croissance de u :

$$M \leq u_\eta \leq u_n$$

u tend donc bien vers $+\infty$.

2. Raisonnement similaire au précédent. On peut aussi utiliser $-u$, qui est croissante si u est décroissante. □

Remarque 13.3.29

On peut retenir que toute suite réelle croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge vers un réel l et que l est un majorant (respectivement un minorant) de u .

Exercice 13.3.30

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0; 1]$.
2. Montrer que la suite u est convergente.

Correction. 1. On raisonne par récurrence.

- Pour $n = 0$, c'est vrai par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [0; 1]$. Alors

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n) \in [0; 1]$$

puisque $u_n \in [0; 1]$ et $1 - u_n \in [0; 1]$.

On a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leq 0$$

donc u est décroissante. Puisque u est minorée par 0, le théorème de la limite monotone affirme que u est convergente (nous déterminerons sa limite un peu plus loin).

13.3.6 Suites extraites**Définition 13.3.31 – Suite extraite**

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une *suite extraite* ou *sous-suite* de u est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple 13.3.32

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (u_0, u_2, u_4, \dots)$ est une suite extraite de u puisque l'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ & & n \mapsto 2n \end{array}$$

est strictement croissante. Il s'agit de la sous-suite des termes de rangs pairs de u .

De même, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (u_1, u_3, u_5, \dots)$ est la sous-suite des termes de rangs impairs de u .

Remarque 13.3.33

Intuitivement, v est une suite extraite de u si peut obtenir v en retirant des termes à u et en laissant les termes restants dans l'ordre.

Propriété 13.3.34

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que u admet une limite, finie ou non.
Alors toute suite extraite de u converge vers cette même limite.

Démonstration. Traitons le cas où u converge vers un réel l (les autres cas sont similaires).

Soit $v = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de u , φ étant une application strictement croissante de \mathbb{N} vers \mathbb{N} .

Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$:

— $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) \geq n$. Alors $(n+1) > \varphi(n) \geq n$ donc $\varphi(n+1) \geq n+1$ puisque $\varphi(n+1)$ est un entier.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u converge vers l , il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta$, on a $\varphi(n) \geq n \geq \eta$ donc

$$|u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$$

et la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers l . □

Cette propriété est utile, par exemple, pour prouver qu'une suite n'admet pas de limite (finie ou non).

Exercice 13.3.35

Montrer que la suite $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, finie ou non.

Correction. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de u , or pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

La suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de u , or pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$$

Ces deux suites extraites de u n'ont pas la même limite : u n'admet donc pas de limite, finie ou non.

Propriété 13.3.36

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite, alors celle-ci est aussi la limite de u .

Démonstration. Traitons par exemple le cas où (u_{2n}) et (u_{2n+1}) divergent vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$.

Il existe donc $\eta_0 \in \mathbb{N}$ et $\eta_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq \eta_0 \implies u_{2n} \geq M \tag{13.3}$$

$$n \geq \eta_1 \implies u_{2n+1} \geq M \tag{13.4}$$

Posons $\eta = \max(2\eta_0, 2\eta_1 + 1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \eta$.

— Supposons n pair. Notons $m = \frac{n}{2}$: c'est un entier naturel et $n \geq 2\eta_0$ donc $m \geq \eta_0$. D'après 13.3, on a donc

$$u_n = u_{2m} \geq M$$

— Supposons n impair. Notons $m = \frac{n-1}{2}$: c'est un entier naturel et $n \geq 2\eta_1 + 1$ donc $m \geq \eta_1$. D'après 13.4, on a donc

$$u_n = u_{2m+1} \geq M$$

Dans les deux cas, on a bien $u_n \geq M$: u admet bien $+\infty$ pour limite. □

13.3.7 Suites adjacentes

Définition 13.3.37

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u et v sont *adjacentes* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- À partir d'un certain rang, l'une est croissante et l'autre est décroissante.
- $u - v$ converge vers 0.

Théorème 13.3.38

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u et v sont adjacentes, alors u et v convergent vers un même réel.

Remarque 13.3.39

Dire que $u - v$ converge vers 0 revient à dire que $v - u = -(u - v)$ converge vers 0. On peut donc permuter les rôles de u et v .

Démonstration. Supposons qu'à partir d'un rang n_0 , u est décroissante et que v est croissante (quitte à inverser les rôles). Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on a $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$ donc $u_n - v_n \leq u_{n+1} - v_{n+1}$.

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n - v_n \leq 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas : il existe $\eta \in \mathbb{N}$ avec $\eta \geq n_0$ tel que $u_\eta - v_\eta > 0$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on a :

$$0 < u_\eta - v_\eta \leq u_n - v_n$$

et par passage à la limite $0 < u_\eta - v_\eta \leq 0$ ce qui est absurde. La suite $u - v$ est donc bien à valeurs négatives à partir du rang n_0 , ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq v_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on a donc :

$$u_{n_0} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n_0}$$

La suite u est donc croissante majorée et v est décroissante minorée : ces deux suites sont alors convergentes.

Notons l la limite de u et l' la limite de v . $u - v$ converge donc vers $l - l'$, or $u - v$ converge aussi vers 0. Par unicité de la limite, on a donc $l - l' = 0$ puis $l = l'$: u et v convergent bien vers la même limite. \square

Propriété 13.3.40 – Approximation d'un réel par des rationnels

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{10^n} = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Montrer que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers x .

Commentaire

u et v sont alors des suites de rationnels convergentes vers x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n (respectivement v_n) est appelée *approximation décimale à la précision 10^{-n} par défaut (respectivement par excès) de x* .

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

donc

$$10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10$$

Or $10 \lfloor 10^n x \rfloor$ et $10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10$ sont des entiers, et par définition, $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^{n+1} x$ et $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $10^{n+1} x$.

On a donc

$$10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leq 10^{n+1} x < \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \leq 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10$$

et en divisant par 10^{n+1} , on obtient

$$u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq \underbrace{\frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor}{10^{n+1}}}_{=u_{n+1}} \leq x < \underbrace{\frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1}{10^{n+1}}}_{=v_{n+1}} \leq \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n} = v_n$$

u est donc croissante et v décroissante. De plus :

$$u_n - v_n = \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

u et v sont donc adjacentes : elles convergent vers un même réel l . Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leq x < v_n$$

donc par passage à la limite (qui préserve les inégalités **larges**) :

$$l \leq x \leq l$$

donc $l = x$. □

Exemple 13.3.41

Avec $x = \pi$ et en reprenant les notations ci-dessus, on a :

$$u_0 = 3$$

$$v_0 = 4$$

$$u_1 = 3,1$$

$$v_1 = 3,2$$

$$u_2 = 3,14$$

$$v_2 = 3,15$$

et ainsi de suite.

13.3.8 Extension au cas complexe

Dans le cas des complexes, nous n'avons pas de relation d'ordre : si z et z' sont deux complexes, cela n'a pas de sens d'écrire que « $z \leq z'$ », par exemple.

Cela implique que les notions de monotonie, de majoration ou de minoration, de divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$, d'encadrement et de limite monotone ne font pas sens dans le cas de complexes.

On peut cependant adapter certaines notions.

Définition 13.3.42 – Convergence d'une suite complexe

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que u converge vers l si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Les opérations sur les limites (somme, produit, quotient) restent valides dans le cas de suites complexes convergentes. La définition donne immédiatement le résultat suivant :

Propriété 13.3.43

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. Alors

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \iff |u_n - l| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Propriété 13.3.44

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. On a

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \iff \overline{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{l}$$

Démonstration. C'est direct :

$$\begin{aligned} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l &\iff |u_n - l| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\ &\iff \left| \overline{(u_n - l)} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\ &\iff |\overline{u_n} - \bar{l}| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\ &\iff \overline{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{l} \end{aligned}$$

□

Propriété 13.3.45

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. Alors :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Re}(l) \\ \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Im}(l) \end{cases}$$

Démonstration. Notons $a = \operatorname{Re}(l)$ et $b = \operatorname{Im}(l)$ et, pour tout $n \in I$, notons $x_n = \operatorname{Re}(u_n)$ et $y_n = \operatorname{Im}(u_n)$.

— Supposons que u converge vers l . Alors \overline{u} converge vers \bar{l} , donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u_n) &= \frac{u_n + \overline{u_n}}{2} & \operatorname{Im}(u_n) &= \frac{u_n - \overline{u_n}}{2i} \\ \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{l + \bar{l}}{2} &= \operatorname{Re}(l) & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{l - \bar{l}}{2i} &= \operatorname{Im}(l) \end{aligned}$$

— Supposons que $\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Re}(l)$ et $\operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Im}(l)$. Alors

$$u_n = \operatorname{Re}(u_n) + i\operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Re}(l) + i\operatorname{Im}(l) = l$$

□

Exercice 13.3.46

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$z_n = 1 + i + \frac{1}{n}e^{3in}$$

Étudier la convergence de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} |z_n - (1 + i)| &= \left| \frac{1}{n} e^{3in} \right| \\ &= \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

donc $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $1 + i$.

13.4 Suites usuelles

13.4.1 Suites arithmétiques

Définition 13.4.1 – Suite arithmétique

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $r \in \mathbb{C}$. On dit que u est une suite arithmétique de raison r si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété 13.4.2

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n - p)r$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Démonstration. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$.

- C'est évident pour $n = 0$: $u_0 + 0 \times r = u_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_0 + nr$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n + 1)r$$

ce qui achève la récurrence.

On a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, on a alors

$$u_p + (n - p)r = u_0 + pr + nr - pr = u_0 + nr = u_n$$

□

13.4.2 Suites géométriques

Définition 13.4.3 – Suite géométrique

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $q \in \mathbb{C}$. On dit que u est géométrique de raison q si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$$

Propriété 13.4.4

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$. Alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_p q^{n-p}$$

En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$$

■ *Démonstration.* C'est un raisonnement par récurrence très similaire à celle vue pour les suites arithmétique. □

Corollaire 13.4.5

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$.

1. Si $u_0 = 0$, alors u est la suite nulle et u converge vers 0.
2. Si $u_0 \neq 0$:
 - (a) Si $|q| < 1$, alors u converge vers 0.
 - (b) Si $|q| > 1$, alors $|u|$ tend vers $+\infty$.
 - (c) Si $q \in]-\infty; -1]$, u n'admet pas de limite.

Démonstration. 1.

2. Évident.

3. (a) Supposons que $|q| < 1$. Si $q = 0$, u est nulle à partir du rang 1 : elle converge vers 0.

Supposons que $q \neq 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n| = |u_0 q^n| = |u_0| |q|^n = |u_0| e^{n \ln |q|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

puisque $\ln |q| < 0$.

Dans tous les cas : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(b) Supposons que $|q| > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$|u_n| = |u_0| e^{n \ln |q|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

puisque $\ln |q| > 0$.

(c) Supposons que $q \in]-\infty; -1]$: on a alors $q = -|q|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{2n}}{u_0} = q^{2n} = (-|q|)^{2n} = (-1)^{2n} |q|^{2n} = |q|^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } q = -1 \\ +\infty & \text{si } q < -1 \end{cases}$$

et de même :

$$\frac{u_{2n+1}}{u_0} = q^{2n+1} = -|q|^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} -1 & \text{si } q = -1 \\ -\infty & \text{si } q < -1 \end{cases}$$

Dans tous les cas, $\left(\frac{u_{2n}}{u_0}\right)$ et $\left(\frac{u_{2n+1}}{u_0}\right)$ n'ont pas la même limite : la suite $\left(\frac{u_n}{u_0}\right)$ n'admet donc pas de limite, et il en est de même pour (u_n) . □

13.4.3 Suites arithmético-géométrique

Définition 13.4.6

Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Propriété 13.4.7

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

— Si $a = 1$, u est arithmétique de raison b et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb$.

— Si $a \neq 1$, notons $l = \frac{b}{1-a}$. l est l'unique solution de l'équation $x = ax + b$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - l)a^n + l$$

Démonstration. Le cas $a = 1$ est évident, supposons donc que $a \neq 1$.

Soit $x \in \mathbb{C}$. On a :

$$x = ax + b \iff (1-a)x = b \iff x = \frac{b}{1-a}$$

Notons alors $l = \frac{b}{1-a}$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - l$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - (al) = a(u_n - l) = av_n$$

La suite v est donc géométrique de raison a , ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 a^n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - l = v_0 a^n$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - l)a^n + l$$

□

Exercice 13.4.8

On définit une suite u par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+2i}{5}u_n + 1-i \end{cases}$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n . Étudier la convergence de la suite u .

Correction. u est arithmético-géométrique. Posons

$$l = \frac{1-i}{1-\frac{1+2i}{5}} = 5 \frac{1-i}{5-1-2i} = 5 \frac{1-i}{4-2i} = 5 \frac{(1-i)(4+2i)}{4^2+2^2} = 5 \frac{4+2i-4i+2}{20} = \frac{3-i}{2}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(u_0 - \frac{3-i}{2}\right) \left(\frac{1+2i}{5}\right)^n + \frac{3-i}{2}$$

Remarquons que

$$\left|\frac{1+2i}{5}\right| = \frac{1}{5}|1+2i| = \frac{1}{5}\sqrt{1^2+2^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \in]-1; 1[$$

$$\text{donc } \left|\left(\frac{1+2i}{5}\right)^n\right| = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2i}{5}\right)^n = 0$$

et par somme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3-i}{2}$$

13.4.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 13.4.9 – Suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants* s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Comme souvent, nous aimerions exprimer u_n directement en fonction de n . Cherchons les suites géométriques vérifiant la relation précédente : soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r . La relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

devient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 r^{n+2} = au_0 r^{n+1} + bu_0 r^n$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 r^n (r^2 - ar - b) = 0$$

En particulier, cette relation est bien vérifiée si $r^2 - ar - b = 0$ ou encore $r^2 = ar + b$, ce qui nous amène à la notion d'*équation caractéristique* :

Définition 13.4.10 – Équation caractéristique

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation polynomiale

$$x^2 = ax + b$$

d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ est appelée *équation caractéristique de u* .

Théorème 13.4.11 – Terme général d'une suite récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dans \mathbb{C}

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On note

$$x^2 = ax + b \tag{EC}$$

l'équation caractéristique de u .

On note (\star) la relation suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (\star)$$

— Si (EC) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors :

$$(\star) \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

— Si (EC) n'admet qu'une seule racine r , alors :

$$(\star) \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) r^n$$

Dans les deux cas, λ et μ sont définis de manière unique à partir de u .

Remarque 13.4.12

λ et μ peuvent être déterminés en utilisant, par exemple, les deux premiers termes de la suite u .

Démonstration. Supposons que (EC) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 . L'autre cas se démontre de la même façon. Supposons dans un premier temps qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} au_{n+1} + bu_n &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n \underbrace{(ar_1 + b)}_{=r_1^2} + \mu r_2^n \underbrace{(ar_2 + b)}_{=r_2^2} \\ &= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} \\ &= u_{n+2} \end{aligned}$$

et la relation (\star) est vérifiée.

Réciproquement, supposons que (\star) soit vérifiée. On peut raisonner par analyse-synthèse.

— **Analyse :** Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

La relation (\star) avec $n = 0$ et $n = 1$ donne alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda + \mu &= u_0 \\ r_1 \lambda + r_2 \mu &= u_1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu &= u_0 \\ (-r_1 + r_2) \mu &= (-r_1 u_0 + u_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = u_0 - \frac{u_1 - u_0}{r_2 - r_1} \\ \mu = \frac{u_1 - u_0}{r_2 - r_1} \end{cases} \end{aligned}$$

λ et μ sont donc bien uniques.

— **Synthèse :** posons

$$\begin{cases} \lambda = u_0 - \frac{u_1 - u_0}{r_2 - r_1} \\ \mu = \frac{u_1 - u_0}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

et montrons, par récurrence double, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété \mathcal{P}_n : « $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ » est vraie.

— Par construction, on a déjà $\begin{cases} \lambda + \mu &= u_0 \\ r_1 \lambda + r_2 \mu &= u_1 \end{cases}$ donc \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 sont vraies.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} sont vraies. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n \underbrace{(ar_1 + b)}_{=r_1^2} + \mu r_2^n \underbrace{(ar_2 + b)}_{=r_2^2} \\ &= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} \end{aligned}$$

donc \mathcal{P}_{n+2} est vraie, ce qui achève la récurrence et cette démonstration. □

Théorème 13.4.13 – Terme général d’une suite récurrence linéaire réelle d’ordre 2 à coefficients constants dans \mathbb{R}

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On note

$$x^2 = ax + b \tag{EC}$$

l’équation caractéristique de u .

On note (\star) la relation suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \tag{\star}$$

— Si (EC) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors :

$$(\star) \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

— Si (EC) n’admet qu’une seule racine réelle r , alors :

$$(\star) \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) r^n$$

— Sinon, (EC) admet deux racines complexes non réelles conjuguées de la forme $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et :

$$(\star) \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)) r^n$$

Dans les trois cas, λ et μ sont définis de manière unique à partir de u .

Démonstration. Les deux premiers cas se traitent exactement comme dans \mathbb{C} .

Plaçons-nous dans le troisième cas : (EC) admet deux racines réelles conjuguées de la forme $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Remarquons que :

$$(\star) \iff u \text{ est la partie réelle d’une suite à valeurs complexes vérifiant } (\star)$$

En effet :

— Le sens direct est immédiat (u étant la partie réelle d’elle-même).

— Si $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie (\star) et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \operatorname{Re}(v_n)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \operatorname{Re}(v_{n+2}) \\ &= \operatorname{Re}(av_{n+1} + bv_n) \\ &= a \operatorname{Re}(v_{n+1}) + b \operatorname{Re}(v_n) \text{ car } a, b \in \mathbb{R} \\ &= au_{n+1} + bu_n \end{aligned}$$

donc u vérifie (\star) .

On a donc, d'après 13.4.11 :

$$(\star) \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \operatorname{Re} \left(\lambda \left(re^{i\theta} \right)^n + \mu \left(re^{-i\theta} \right)^n \right)$$

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\lambda \left(re^{i\theta} \right)^n + \mu \left(re^{-i\theta} \right)^n \right) &= \operatorname{Re} \left(\lambda r^n e^{in\theta} + \mu r^n e^{-in\theta} \right) \\ &= r^n \operatorname{Re} \left(\lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta} \right) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\lambda e^{in\theta} \right) &= \operatorname{Re} \left((\operatorname{Re}(\lambda) + i\operatorname{Im}(\lambda)) (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \right) \\ &= \operatorname{Re}(\lambda) \cos(n\theta) - \operatorname{Im}(\lambda) \sin(n\theta) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\mu e^{-in\theta} \right) &= \operatorname{Re}(\mu) \cos(-n\theta) - \operatorname{Im}(\mu) \sin(-n\theta) \\ &= \operatorname{Re}(\mu) \cos(n\theta) + \operatorname{Im}(\mu) \sin(n\theta) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\operatorname{Re} \left(\lambda \left(re^{i\theta} \right)^n + \mu \left(re^{-i\theta} \right)^n \right) = r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$$

avec

$$\alpha = \operatorname{Re}(\lambda) + \operatorname{Re}(\mu) \in \mathbb{R}$$

$$\beta = \operatorname{Im}(\mu) - \operatorname{Im}(\lambda) \in \mathbb{R}$$

On a donc bien

$$(\star) \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$$

(Pour le sens réciproque, on peut poser par exemple $\lambda = \alpha$ et $\mu = i\beta$).

L'unicité du couple (α, β) se déduit également des conditions initiales : supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$, alors pour $n = 0$ et $n = 1$.

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ r(\alpha \cos(\theta) + \beta \sin(\theta)) = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = \left(\frac{u_1}{r} - \alpha \cos(\theta) \right) \times \frac{1}{\sin(\theta)} \end{cases}$$

$\sin(\theta)$ est non nul puisque $re^{i\theta}$ n'est pas un réel. □

Exercice 13.4.14

On définit une suite u en posant :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -\sqrt{2}u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .

Correction. L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est $x^2 = -\sqrt{2}x - 2$ ou encore

$$x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0$$

Ses racines sont $\sqrt{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\sqrt{2}e^{-\frac{2i\pi}{3}}$: elles sont complexes non réelles conjuguées, ainsi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2}^n \left(\alpha \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right)$$

Avec $n = 0$ et $n = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\alpha + \beta \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right)$$

13.4.5 Étude de suites définies par récurrence

Définition 13.4.15

Soit A une partie de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{C})$. On dit que A est une *partie stable* par f si

$$\forall x \in A, f(x) \in A$$

Exemple 13.4.16

\mathbb{R}_+ est stable par l'application $f : x \mapsto e^x - 1$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $e^x - 1 \geq e^0 - 1 = 0$.

Propriété 13.4.17 – Définition d'une suite par récurrence

Soit A une partie de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{C})$. On suppose que A est une partie stable par f .

On peut alors définir une suite u en posant

$$\begin{cases} u_0 \in A \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in A$.

Démonstration. C'est un raisonnement par récurrence très simple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété \mathcal{P}_n : « u_n est bien défini et $u_n \in A$ ».

— \mathcal{P}_0 est vrai par hypothèse.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n soit vraie. Alors $f(u_n) = u_{n+1}$ est bien défini puisque $u_n \in A$ et f est définie sur A . De plus, A est stable par f et $u_n \in A$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in A$: \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

□

Méthode 13.4.18

Soit A une partie de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{C})$. Soit $u_0 \in A$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Pour montrer que (u_n) est bien définie, on peut, au choix :

- Raisonner par récurrence et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in A$.
- Montrer que A est une partie stable par f .

Il peut parfois être nécessaire de déterminer une partie de A (au lieu de A lui-même) qui soit stable par f tout en contenant u_0 .

Exercice 13.4.19

On pose

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n} \end{cases}$$

Montrer que la suite u est bien définie.

Correction. Considérons $A = [0; 1]$ et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in A$.

- C'est évident pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \in A$. $\sqrt{1 - u_n} = u_{n+1}$ est alors bien défini puisque $x \mapsto \sqrt{1 - x}$ est bien définie sur A . De plus, $0 \leq u_n \leq 1$ donc $0 \leq 1 - u_n \leq 1$ et $0 \leq \sqrt{1 - u_n} \leq 1$ donc $u_{n+1} \in A$: \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Définition 13.4.20 – Point fixe

Soit A une partie de \mathbb{C} , soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{C})$ et soit $l \in A$.

On dit que l est un *point fixe* de f si $f(l) = l$.

Théorème 13.4.21 – Convergence et point fixe

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. On suppose que A est stable par f .

Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in A \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On suppose que :

- u converge vers un $l \in A$.
- f est continue en l .

Alors l est un point fixe de f .

Remarque 13.4.22

- Ce théorème permet donc de déterminer les limites éventuelles d'une suite définie par récurrence.
- Pour le moment, nous utiliserons ce résultat pour des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} (puisque nous n'avons pas encore étudié la notion de continuité pour une fonction à valeurs complexes). Cependant, ce résultat reste valable dans le cas de fonctions à valeurs complexes.

Démonstration. Nous utilisons la *caractérisation séquentielle de la continuité*, que nous verrons en détail dans le chapitre sur la continuité. La preuve étant ici reste assez intuitive.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Or :

— (u_{n+1}) est une sous-suite de u : elle est donc aussi convergente vers l .

— $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ et f est continue en l donc $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l)$.

Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient

$$l = f(l)$$

et l est un point fixe de f . □

Exercice 13.4.23

On pose

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

1. Justifier que u est bien définie et est à valeurs réelles.
2. On pose $f : x \mapsto x^2 + 1$, définie sur \mathbb{R} . Étudier le signe, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de $f(x) - x$.
3. u est-elle convergente ? u admet-elle une limite ?

Correction. 1. \mathbb{R} est une partie stable par f contenant u_0 donc u est bien définie et est à valeurs dans \mathbb{R} .

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) - x = x^2 - x + 1$$

et cette expression polynomiale de degré 2 a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x > 0$$

3. Supposons u convergente vers un réel l . f étant continue sur \mathbb{R} , elle l'est aussi en l donc $f(l) = l$ ou encore $f(l) - l = 0$: c'est impossible d'après la question précédente.

u n'est donc pas convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, toujours d'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$$

donc u est strictement croissante.

En tant que suite strictement croissante non convergente, on obtient donc que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Méthode 13.4.24

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. On suppose que A est stable par f . Soit u une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in A \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Pour étudier u , on peut étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$: comme dans l'exercice précédent, cela peut aider à déterminer le sens de variation de u (si elle est monotone) et les limites éventuelles de u .

On dispose aussi du résultat suivant pour étudier les variations d'une suite définie par récurrence.

Propriété 13.4.25

Soit A une partie de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. On suppose que A est stable par f . Soit u une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in A \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Alors :

- Si f est croissante, la suite u est monotone. On peut déterminer son sens de variation en observant u_0 et u_1 :
 - Si $u_0 \leq u_1$, u est croissante.
 - Sinon, u est décroissante.
- Si f est décroissante, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires. On peut alors déterminer leurs sens de variation en observant u_0 et u_2 .
 - Si $u_0 \leq u_2$, (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante.
 - Sinon, (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.

Démonstration. — Supposons f croissante, et que $u_0 \leq u_1$. Par récurrence, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$$

En effet :

- C'est vrai au rang 0 par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq u_{n+1}$. En appliquant f , croissante sur A , à cette inégalité, et sachant que u_n et u_{n+1} sont dans A , on a obtenu $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ ou encore $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ ce qui achève la récurrence.

Le raisonnement est le même si $u_0 \geq u_1$.

- Supposons f décroissante. On a :
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_n)) = (f \circ f)(u_n)$.
 - De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2(n+1)+1} = (f \circ f)(u_{2n+1})$.
 - $f \circ f$ est croissante (composée de fonctions décroissantes) et A est stable par f donc par $f \circ f$: pour tout $x \in A$, on a $f(x) \in A$ et $f(f(x)) \in A$.

On en déduit que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Supposons que $u_0 \leq u_2$. La suite (u_{2n}) est donc croissante. Par décroissance de f , on a donc $u_1 = f(u_0) \geq f(u_2) = u_3$: la suite (u_{2n+1}) est décroissante. Le raisonnement est le même si $u_0 \geq u_2$. □

Exercice 13.4.26

On définit une suite u en posant

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que u est bien définie et à valeurs positives.
2. Quel est le sens de variation de u ?
3. Étudier la convergence de u .

Correction. On pose $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ définie sur \mathbb{R}_+ .

1. \mathbb{R}_+ est une partie stable pour f contenant u_0 donc u est bien définie et à valeurs dans \mathbb{R}_+ .
2. f est croissante donc u est monotone, or $u_1 = \sqrt{2} \geq u_0$ donc u est croissante.
 - Supposons que u converge vers un réel l . On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n$ donc $0 \leq l$ par passage à la limite. Or

f est continue sur \mathbb{R}_+ donc l est un point fixe de f . On résout (sachant que $l \geq 0$) :

$$f(l) = l \iff l = \sqrt{1+l} \iff l^2 = 1+l \iff l^2 - l - 1 \iff l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Cependant, $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ donc l vaut forcément $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, **si u converge**, c'est vers $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Dans ce cas, en tant que suite croissante convergente vers l , on aurait $u_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— Montrons que u est effectivement majorée par $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Cela peut être prouvé par récurrence :

— $u_0 = 1 \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = l$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq l$. Alors, par croissance de f :

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(l) = l$$

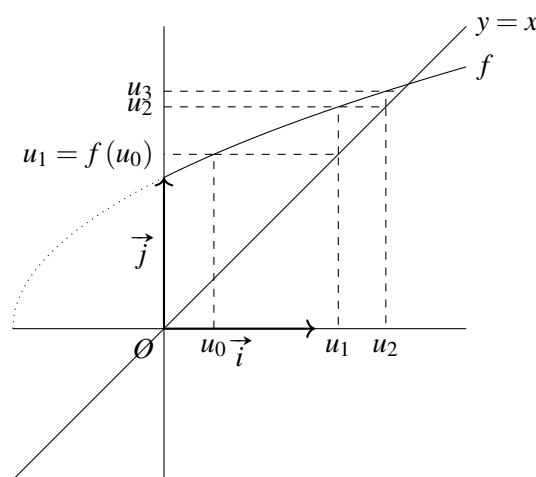
ce qui achève la récurrence.

Finalement, u est croissante majorée donc convergente, et sa seule limite possible est $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Remarque 13.4.27

- On peut tout à fait mener cette étude différemment et chercher dès le départ les points fixes.
- On peut aussi représenter graphiquement la suite u , en utilisant la première bissectrice du plan comme sur le dessin suivant, pour deviner le comportement de u .



Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

13.5 Exercices

Exercice 13.5.1

Soient A et B deux parties non vides majorées de \mathbb{R} . On note

$$A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$$

1. Montrer que $A + B$ est une partie non vide majorée de \mathbb{R} .
2. Montrer que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Exercice 13.5.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

2. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$:

$$S_n \leq T_{n-1} + 1$$

3. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l et que $l \leq 2$.

Exercice 13.5.3

Montrer que la suite $u = \left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite (finie ou non).

Correction. La suite $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de u , or pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{4n} = \sin\left(4n\frac{\pi}{2}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

La suite $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de u , or pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{4n+1} = \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Ces deux suites extraites de u n'ont pas la même limite : u n'admet donc pas de limite, finie ou non.

Exercice 13.5.4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{n \cos(n)}{n+2} - 3 \times ((-1)^n)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

Exercice 13.5.5

Étudier la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Exercice 13.5.6

Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n^2 - u_n - 3 \end{cases}$$

Justifier que la suite u est bien définie. Est-elle convergente ?

Exercice 13.5.7

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'équation

$$2\alpha X^2 - (\alpha^2 - 2)X - 4\alpha = 0$$

admet une unique solution dans \mathbb{R}_+^* .

2. Soit la suite (a_n) telle que

$$\begin{cases} a_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \text{ est la solution dans } \mathbb{R}_+^* \text{ de } 2a_n X^2 - (a_n^2 - 2)X - 4a_n = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que a_n est bien définie.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$b_n = a_n - \frac{2}{a_n}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$. Qu'en déduit-on sur la convergence de (b_n) ?

(c) Étudier la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - \frac{2}{x}$$
. En déduire la monotonie la convergence et la limite de (a_n) .

Exercice 13.5.8

On considère la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1} \end{cases}$$

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{1-x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

4. Quel est le sens de variation de u ?

5. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 13.5.9

Montrer de deux manières différentes que la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$$

converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 13.5.10

1. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation $x = \ln(1+x)$.

2. Montrer que la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$ est bien définie. Montrer alors qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 13.5.11

Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n^2) \end{cases}$$

Étudier la convergence de u .

Exercice 13.5.12

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - 2n + 1$

2. $u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$

3. $u_n = \frac{n^4 + 1}{3n^2 - 1}$

4. $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

5. $u_n = \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

6. $u_n = \frac{\sqrt{n^3 + n + 1}}{n^{5/3}}$

7. $u_n = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n}$

8. $u_n = \frac{e^{\frac{5}{n}} - 1}{e^{\frac{3}{n}} - 1}$ (utiliser la factorisation « $a^n - b^n = \dots$ »)

9. u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

10. u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}$$

11. u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Exercice 13.5.13

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite.

Exercice 13.5.14

On se propose de montrer que la suite $u = (\sin(n))$ n'admet pas de limite.

1. Justifier que u ne tend ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

Dans la suite, on suppose que u converge vers un réel l .

2. Montrer que $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. On pourra s'intéresser à la suite $(\sin(n+1) - \sin(n-1))_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que $l = 0$. On pourra s'intéresser à la suite $(\sin(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Trouver une contradiction et conclure.

Exercice 13.5.15

On définit deux suites réelles (x_n) et (y_n) en posant :

$$\begin{cases} x_0, y_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = x_n + iy_n$.

1. Montrer que la suite (z_n) est géométrique.
2. Étudier la convergence des suites (x_n) et (y_n) .

Exercice 13.5.16

On considère deux réels a_0 et b_0 positifs et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq b_n - a_n$$

et que

$$b_n - a_n \leq \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1})$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} (b_1 - a_1)$$

4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite.

13.6 DM conducteur

Exercice 44

Étudier les (éventuelles) limites des suites suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n} - 5n + 1$ PTS 1

2. $u_n = \sqrt{e^n + 1} - \sqrt{e^n}$ PTS 1

3. $u_n = \frac{3 \ln(n) + 1}{\ln(n) + 3}$ PTS 1

4. $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)$ PTS 1

5. u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -\frac{3u_n}{16} + \frac{\sqrt{2}u_{n+1}}{2} \end{cases}$$

PTS 1

Correction. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = n \times \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 5 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 5 + \frac{1}{n} = -5$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^n + 1 > e^n > 0$ donc u_n est bien défini et :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(\sqrt{e^n + 1} - \sqrt{e^n})(\sqrt{e^n + 1} + \sqrt{e^n})}{\sqrt{e^n + 1} + \sqrt{e^n}} \\ &= \frac{e^n + 1 - e^n}{\sqrt{e^n + 1} + \sqrt{e^n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e^n + 1} + \sqrt{e^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$ (pour que $\ln(n)$ soit bien défini et non nul), on a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(n)}{\ln(n)} \times \frac{3 + \frac{1}{\ln(n)}}{1 + \frac{3}{\ln(n)}} \\ &= \frac{3 + \frac{1}{\ln(n)}}{1 + \frac{3}{\ln(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1} = 3 \end{aligned}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{14n} &= \sin\left(\frac{14n\pi}{7}\right) \\ &= \sin(2n\pi) \\ &= 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{14n+1} &= \sin\left(\frac{(14n+1)\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \neq 0 \end{aligned}$$

On a donc trouvé deux sous-suites de (u_n) qui ne convergent pas vers la même limite : la suite (u_n) n'admet donc pas de limite.

5. L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est

$$x^2 = -\frac{3}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

ou encore

$$x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3}{16} = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{C}$. Son discriminant est

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{3}{16} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{-1}{4} \\ &= \left(\frac{1}{2}i\right)^2\end{aligned}$$

et ses racines sont

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i}{2} & r_2 &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i}{2} \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{2} + i) & &= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - i)\end{aligned}$$

D'après le cours, il existe alors $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{C}, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

Commentaire

Il est clair que (u_n) est ici à valeurs réelles, on pourrait donc aussi écrire u_n sous la forme $(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))|r_1|^n$ où θ est un argument de r_1 . Mais cela ne sera pas utile ici...

Remarquons alors que

$$\begin{aligned}|r_1| &= \frac{1}{4}|\sqrt{2} + i| \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\sqrt{2}^2 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} < 1\end{aligned}$$

et que

$$|r_2| = |\overline{r_1}| = |r_1| < 1$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|u_n| &= |\alpha r_1^n + \beta r_2^n| \\ &\leq |\alpha||r_1|^n + |\beta||r_2|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Commentaire

Ici, tout se joue sur le module de r_1 (et r_2) : en particulier, les deux premiers termes de (u_n) n'ont aucune importance.

Exercice 45

Dans cet exercice, on fixe un réel α strictement positif, et on définit une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en posant

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \alpha e^{-u_n} - 1 \end{cases}$$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

On définit la fonction $\varphi : x \mapsto x + \alpha e^{-x} - 1$.

2. Dresser le tableau de variations de φ .

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \ln(\alpha)$$

4. Préciser le signe de $\varphi(x) - x$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

5. Étudier alors les variations de la suite (u_n) .

6. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction. 1. \mathbb{R} est une partie stable pour $\varphi : x \mapsto x + \alpha e^{-x} - 1$, qui contient u_0 . La suite (u_n) est donc bien définie.

2. φ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

$$\varphi'(x) = 1 - \alpha e^{-x}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) \geq 0 &\iff 1 - \alpha e^{-x} \geq 0 \\ &\iff 1 \geq \alpha e^{-x} \\ &\iff e^x \geq \alpha \\ &\iff x \geq \ln(\alpha) \end{aligned}$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\ln(\alpha)$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-$	0	$+$
φ			

La valeur en $\ln(\alpha)$ se calcule ainsi (rappelons que $\alpha > 0$ par hypothèse) :

$$\varphi(\ln(\alpha)) = \ln(\alpha) + \alpha e^{-\ln(\alpha)} - 1 = \ln(\alpha) + \frac{\alpha}{\alpha} - 1 = \ln(\alpha)$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x) \geq \ln(\alpha)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n-1 \in \mathbb{N}$ donc u_{n-1} est bien défini et on a donc $u_n = \varphi(u_{n-1}) \geq \ln(\alpha)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(x) - x \geq 0 &\iff x + \alpha e^{-x} - 1 - x \geq 0 \\ &\iff \alpha e^{-x} - 1 \geq 0 \\ &\iff \alpha e^{-x} \geq 1 \\ &\iff \alpha \geq e^x \\ &\iff \ln(\alpha) \geq x\end{aligned}$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\ln(\alpha)$	$+\infty$
$\varphi(x) - x$	+	0	-

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 0$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) - u_n \leq 0$$

d'après le tableau précédent puisque l'on sait que $u_n \geq \ln(\alpha)$.

La suite (u_n) est donc décroissante **à partir du rang 1**. Par contre, on ne peut rien dire du premier terme.

6. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (en excluant donc le premier terme) est décroissante minorée (par $\ln(\alpha)$). Elle est donc convergente vers un réel l . Or φ est continue sur \mathbb{R} donc en l : l est donc un point fixe de φ , c'est donc $\ln(\alpha)$, seul point fixe de φ . Conclusion :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(\alpha)$$

Exercice 46

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes PTS 2. Que peut-on en déduire ? PTS 1

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq 0\end{aligned}$$

Ainsi (S_{2n}) est décroissante. De la même façon :

$$\begin{aligned}
 S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\
 &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\
 &= \frac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+3}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \geq 0
 \end{aligned}$$

donc (S_{2n+1}) est croissante. Enfin :

$$\begin{aligned}
 |S_{2n+1} - S_{2n}| &= \left| \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| \\
 &= \left| \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \right| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes : ainsi, elles convergent vers une même limite.

On peut donc en déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers cette limite commune.

Exercice 47

On souhaite approcher numériquement les éventuelles solutions de l'équation

$$\arctan(x) = 2x + 2 \quad (13.5)$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On définit alors la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(x) - 1$ et une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ et en préciser les limites.
(b) En déduire que l'équation (13.5) admet exactement une solution dans \mathbb{R} , que nous noterons l , et que $l \in]-\sqrt{3}; 0[$. On pourra montrer que φ s'annule une et une seule fois sur \mathbb{R} .
- Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et préciser sa dérivée et son sens de variation.
- Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

Indication : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t) dt$.

- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2} |u_n - l|$$

5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - l|$$

6. La suite (u_n) converge-t-elle ? Quelle est sa limite ?

Dans la suite de l'exercice, on pose $u_0 = 0$.

7. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq \frac{1}{2^n} \sqrt{3} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

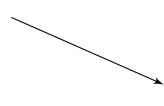
8. Écrire une fonction Python d'entête `solution_approchée(epsilon)`, où `epsilon` désigne un réel strictement positif ε et qui renvoie, en utilisant ce qui précède, une approximation de l à ε près (c'est-à-dire une approximation de l dans $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$).

Correction. 1. (a) f et φ sont dérivables sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2} - 2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - 2(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{-1 - 2x^2}{1+x^2} < 0 \end{aligned}$$

Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$, le tableau de variation de φ s'en déduit :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	—	
φ	$+\infty$  $-\infty$	

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\begin{aligned} \arctan(x) = 2x + 2 &\iff \frac{1}{2} \arctan(x) = x + 1 \\ &\iff \frac{1}{2} \arctan(x) - 1 - x = 0 \\ &\iff \varphi(x) = 0 \end{aligned}$$

φ est continue strictement décroissante sur \mathbb{R} . D'après le théorème de la bijection et le tableau précédent (y compris les limites de φ en $\pm\infty$), φ est alors une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

En particulier, il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(l) = 0$. L'équation (13.5) admet donc bien une unique solution réelle.

Enfin :

$$\varphi(-\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \arctan(-\sqrt{3}) - 1 - (-\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \times \frac{-\pi}{3} - 1 + \sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3} - 6 - \pi}{6} > 0$$

et

$$\varphi(0) = \frac{1}{2} \arctan(0) - 1 - 0 = -1 < 0$$

On a donc

$$\varphi(0) < 0 = \varphi(l) < \varphi(-\sqrt{3})$$

et par stricte décroissance de φ , on obtient

$$-\sqrt{3} < l < 0$$

2. Déjà fait : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3. Remarquons que pour tout réel x , on a $1+x^2 \geq 1$ donc

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Soient alors $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons que $y \leq x$. Alors, par croissance de f , on a $f(y) \leq f(x)$ donc $f(x) - f(y) \geq 0$ et :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t) dt \\ &\leq \int_y^x \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} (x - y) = \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned}$$

Si $y > x$, il suffit d'échanger les rôles de x et y .

On a donc bien :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\varphi(l) = 0$, on a $f(l) = l$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - l| &= |f(u_n) - f(l)| \\ &\leq \frac{1}{2} |u_n - l| \end{aligned}$$

d'après la question précédente.

5. Cela se montre par récurrence.

— On a évidemment

$$|u_0 - l| \leq \frac{1}{2^0} |u_0 - l|$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - l|$. Alors :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - l| &\leq \frac{1}{2} |u_n - l| \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} |u_0 - l| = \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - l| \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

6. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} |u_0 - l| = 0$, on obtient par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers l .

7. On suppose que $u_0 = 0$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et sachant que $l \in]-\sqrt{3}; 0[$ (et donc que $|l| < \sqrt{3}$) :

$$\begin{aligned} |u_n - l| &\leq \frac{1}{2^n} |l| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sqrt{3} \\ &< \frac{1}{2^n} \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour que $u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$, c'est-à-dire que $|u_n - l| < \varepsilon$, il suffit d'après les questions précédentes d'avoir $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \varepsilon$.

On en déduit deux versions de la fonction demandée, décrites dans le script suivant.

```

1 import numpy as np # On utilise numpy pour la fonction arctan
2
3 def f(x):
4     return np.arctan(x)/2 - 1
5
6 def solution_approchee(epsilon):
7     u = 0 # Premier terme de la suite
8     n = 0
9     while 1 / (2**(n-1)) > epsilon:
10         u = f(u)
11         n = n + 1
12     return u
13
14 # Autre version (plus légère en calculs puisque l'on ne calcule pas 2**(n-1) à
15   ↪ chaque tour de boucle)
16 def solution_approchee(epsilon):
17     u = 0 # Premier terme de la suite
18     q = 2 # On va calculer, au fur et à mesure, les termes de la suite
19           ↪ (1/(2^(n-1))), géométrie de premier terme 2 et de raison 1/2
20     while q > epsilon:
21         u = f(u)
22         q = q / 2
23     return u
24
25 epsilon = 1E-3 # 10^(-3), pour l'exemple
26 x = solution_approchee(epsilon)
27 print("Solution approchée, notée x : ", x)
28 # Affiche -1.4898239246729634, approximation de l à 10^(-3) près
29 print("Ecart entre arctan(x) et 2x+2: ", np.abs(np.arctan(x) - 2*x - 2))
30 # Affiche 9.103344966732152e-09, qui est effectivement très petit ! On peut
31   ↪ encore réduire epsilon pour avoir une approximation plus précise de l.

```


Chapitre 14

Matrices

14.1	Notion de matrice	412
14.1.1	Définition	412
14.1.2	Opérations sur les matrices	413
14.1.3	Matrices élémentaires	420
14.2	Systèmes linéaires et opérations élémentaires	422
14.2.1	Lien entre les systèmes linéaires et les matrices	422
14.2.2	Opérations élémentaires	424
14.3	Matrices carrées	427
14.3.1	Matrices symétriques, antisymétriques	428
14.3.2	Matrices triangulaires et diagonales	429
14.3.3	Formule du binôme	430
14.3.4	Matrices inversibles	432
14.4	Exercices	440
14.5	DM conducteur	445

Dans tout ce chapitre, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Les éléments de \mathbb{K} sont appelés les *scalaires*.

14.1 Notion de matrice

14.1.1 Définition

Définition 14.1.1 – Matrice

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$.

Une *matrice* à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} est une famille d'éléments de \mathbb{K} indexée par $\llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$.

Une telle famille $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket}$ est souvent notée sous la forme d'un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$, $a_{i,j}$ est alors le *coefficient* situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de A .

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} .

Exemple 14.1.2

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \times \llbracket 1; 2 \rrbracket$, on pose

$$a_{i,j} = \frac{i}{j}$$

Alors

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{1} \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Remarque 14.1.3

- On dit que A est une *matrice ligne* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
- On dit que A est une *matrice colonne* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des *matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K}* .
- La matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée *matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$* . Elle est notée $0_{n,p}$ ou, s'il n'y a pas de risque de confusion, 0 .
- La virgule est parfois omise et il arrive de noter a_{ij} à la place de $a_{i,j}$.

Exemple 14.1.4

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 3-2i \end{pmatrix}$ est une matrice ligne (à 3 colonnes).

La matrice $B = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ est une matrice colonne (à 2 lignes).

La matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ i & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Notation

Pour toute matrice A et tout couple d'entiers naturels non nuls (i, j) , on pourra aussi noter $[A]_{i,j}$ le coefficient de A situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (s'il existe).

14.1.2 Opérations sur les matrices

Égalité entre deux matrices

Définition 14.1.5

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On dit que A et B sont *égales*, ce que l'on note $A = B$, lorsqu'elles ont les mêmes coefficients, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, a_{i,j} = b_{i,j}$$

Somme de matrices

Définition 14.1.6 – Somme de deux matrices

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La somme (ou l'addition) de A et B est notée $A + B$ et est définie de la façon suivante :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,p} + b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & \dots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarque 14.1.7

- On ne peut additionner deux matrices que si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes !
- En reprenant les notations de la définition, on a donc :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, [A + B]_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Exemple 14.1.8

On a

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 12 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Propriété 14.1.9 – L'addition matricielle est commutative

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Alors :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, A + B = B + A$$

Démonstration. C'est immédiat par commutativité de l'addition dans \mathbb{K} . En notant $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, on

a :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (b_{i,j} + a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = B + A$$

□

Produit d'une matrice par un scalaire**Définition 14.1.10 – Produit d'une matrice et d'un scalaire**

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Le produit de A et λ est noté $\lambda \cdot A$ et est défini par^a

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \dots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$$

^a. Le point est souvent omis et on note plutôt, en pratique, λA au lieu de $\lambda \cdot A$.

Exemple 14.1.11

Par exemple :

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 10 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarque 14.1.12

- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a $0 \cdot A = 0_{n,p}$.
- En reprenant les notations de la définition, on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, [\lambda \cdot A]_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Propriété 14.1.13 – Le produit par un scalaire est pseudo-associatif et est distributif

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \times \mu) \cdot A$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

Démonstration. C'est direct par associativité du produit dans \mathbb{K} .

□

Définition 14.1.14 – Opposé d'une matrice

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice B telle que

$$A + B = 0_{n,p}$$

B est appelée l'opposée de A et on a $B = (-1) \cdot A$, que l'on note aussi $-A$.

Démonstration. $(-1) \cdot A$ convient puisque

$$A + (-1) \cdot A = (1 + (-1)) \cdot A = 0 \cdot A = A$$

De plus, pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $A + B = 0_{n,p}$, on a

$$B = \underbrace{A + (-1) \cdot A}_{=0_{n,p}} + B = \underbrace{A + B}_{=0_{n,p}} + (-1) \cdot A = (-1) \cdot A$$

□

Combinaison linéaire

Définition 14.1.15 – Combinaison linéaire

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit (A_1, A_2, \dots, A_N) une famille de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *combinaison linéaire* de (A_1, A_2, \dots, A_N) toute matrice pouvant s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k A_k$$

où $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ est une famille d'éléments de \mathbb{K} .

Exemple 14.1.16

La matrice $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ puisque

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Produit matriciel

Le produit matriciel peut sembler beaucoup moins naturel que les opérations précédentes, mais il est extrêmement important. En particulier, et sans vouloir gâcher la surprise, sachez pour le moment que les matrices sont très utilisées pour représenter des *applications linéaires* (nous étudierons cette notion dans un chapitre ultérieur). Le produit matriciel tel que nous allons le définir est alors parfaitement compatible avec la composition d'applications linéaires... ce qui sera fondamental dans les prochains chapitres d'algèbre.

Définition 14.1.17 – Produit matriciel

Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^{*3}$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Le *produit matriciel* de A et B est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ notée $A \times B$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket, [A \times B]_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarque 14.1.18

- Vous pouvez observer la figure 14.1 pour mieux retenir cette définition.
- Le symbole \times est souvent omis et on note AB à la place de $A \times B$.

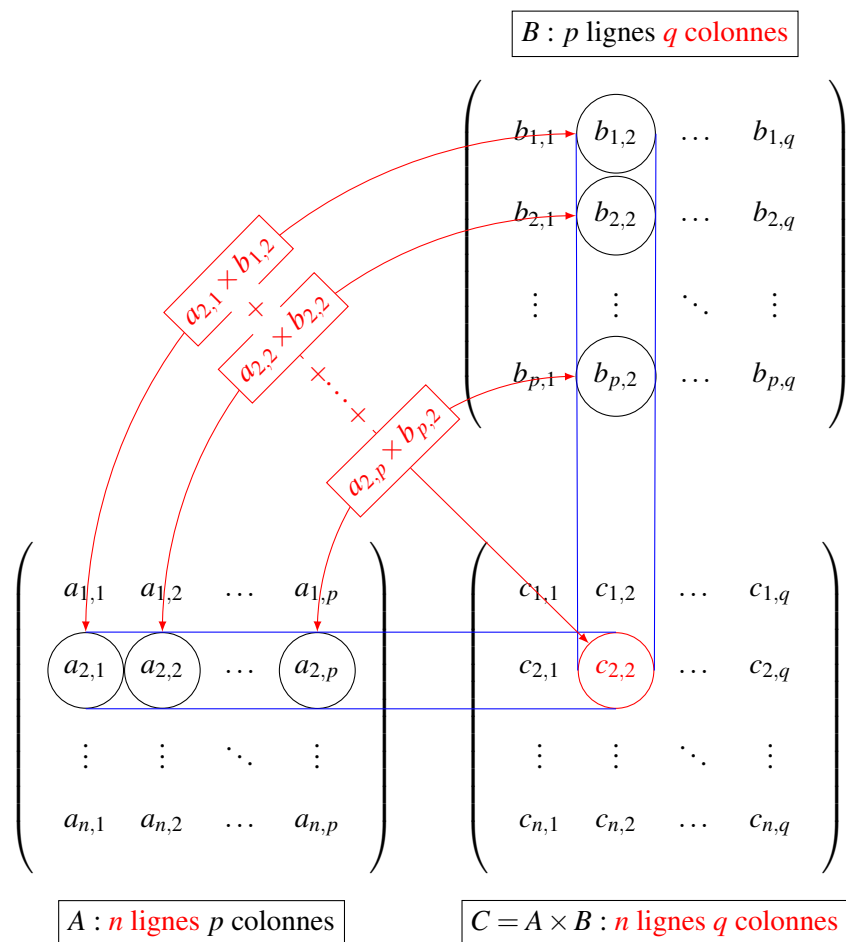


FIGURE 14.1 – Le produit matriciel - schéma créé par Alain Matthes (<https://texample.net/tikz/examples/matrix-multiplication/>)

— Notez que pour que le produit AB ait un sens, il faut et il suffit que **le nombre de colonnes de A soit le nombre de lignes de B .**

Exemple 14.1.19

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 14.1.20 : Piège gravissime !

Le produit matriciel **n'est pas commutatif** ! Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'ailleurs, comme le montre cet exemple, il est possible que le produit de deux matrices soit nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

Propriété 14.1.21 – Le produit matriciel est distributif

Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^{*3}$.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall (B, C) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2, A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

Démonstration. Montrons la première formule, la seconde est similaire. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$. Alors $B + C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ donc le produit $A \times (B + C)$ est bien défini. De plus, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$:

$$\begin{aligned} [A \times (B + C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^p a_{i,k} [B + C]_{k,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} (b_{k,j} + c_{k,j}) = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=1}^p a_{i,k} c_{k,j} \\ &= [AB]_{i,j} + [AC]_{i,j} \\ &= [AB + AC]_{i,j} \end{aligned}$$

□

Propriété 14.1.22 – Le produit matriciel est pseudo-associatif

Soit $(n, p, q, r) \in \mathbb{N}^{*4}$. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

Démonstration. Les produits mis en jeu sont bien définis. De plus, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \times C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ donc $A \times (B \times C) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. Il en est de même pour $(A \times B) \times C$.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; r \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 [A \times (B \times C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^p a_{i,k} [BC]_{k,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} \sum_{k'=1}^q b_{k,k'} c_{k',j} = \sum_{k=1}^p \sum_{k'=1}^q a_{i,k} b_{k,k'} c_{k',j} \\
 &= \sum_{k'=1}^q \left(\sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,k'} \right) c_{k',j} \\
 &= \sum_{k'=1}^q [AB]_{i,k'} c_{k',j} \\
 &= [(A \times B) \times C]_{i,j}
 \end{aligned}$$

C'est bien le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de $(A \times B) \times C$. □

Propriété 14.1.23 – Le produit matriciel est pseudo-associatif (bis)

Soit $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \times B)$$

Démonstration. Preuve similaire à la précédente. □

Exemple 14.1.24

Calculons la matrice suivante, de deux manières différentes.

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \left(-2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \left(-2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= -2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right) + 3 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= -2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \left(-2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 0 & -4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 0 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Transposition

Définition 14.1.25 – Transposée d’une matrice

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La *transposée* de A , notée A^T , est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Remarque 14.1.26

On a donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, [A^T]_{i,j} = [A]_{j,i}$$

Autrement dit, on a échangé les lignes et les colonnes de A .

Exemple 14.1.27

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

La première ligne est devenue la première colonne, la deuxième ligne est devenue la deuxième colonne.

De manière évidente, on a :

Propriété 14.1.28 – La transposition est involutive

Pour toute matrice A , on a $(A^T)^T = A$.

Propriété 14.1.29 – Transposée d’une combinaison linéaire

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Alors :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$$

Démonstration. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

$$(\lambda A + \mu B)^T = (\lambda a_{j,i} + \mu b_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}} = \lambda (a_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}} + \mu (b_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}} = \lambda A^T + \mu B^T$$

□

Propriété 14.1.30 – Transposée d'un produit

Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^{*3}$. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (A \times B)^T = B^T \times A^T$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a déjà $B^T \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ donc le produit $B^T A^T$ a un sens et est dans $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, tout comme $(A \times B)^T$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1; q \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$. Alors :

$$\begin{aligned} [AB^T]_{i,j} &= [AB]_{j,i} = \sum_{k=1}^p a_{j,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^p [A^T]_{k,j} [B^T]_{i,k} = \sum_{k=1}^p [B^T]_{i,k} [A^T]_{k,j} \\ &= [B^T A^T]_{i,j} \end{aligned}$$

□

14.1.3 Matrices élémentaires

Définition

Définition 14.1.31 – Matrice élémentaire

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$, on note $E_{i,j}^{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , qui vaut 1.

$E_{i,j}^{n,p}$ est une *matrice élémentaire*.

Remarque 14.1.32

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on note $E_{i,j}$ au lieu de $E_{i,j}^{n,p}$.

Exemple 14.1.33

Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, on a $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On peut décomposer toute matrice en une combinaison linéaire de matrices élémentaires. Par exemple, dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot E_{1,1} + 2 \cdot E_{1,2} + 3 \cdot E_{2,1} + 4 \cdot E_{2,2} \end{aligned}$$

Propriété 14.1.34 – Toute matrice est combinaison linéaire des matrices élémentaires

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Alors

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j}$$

Symbole de Kronecker**Définition 14.1.35 – Symbole de Kronecker**

Le *symbole de Kronecker* est l'application qui, à tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, associe le nombre suivant :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Remarque 14.1.36

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$. Alors, pour tout $(u, v) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$:

$$\left[E_{i,j}^{n,p} \right]_{u,v} = \delta_{u,i} \delta_{v,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } u = i \text{ et } v = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété 14.1.37 – Produit de deux matrices élémentaires

Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^{*3}$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$ et $(k, l) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$.

Alors

$$E_{i,j}^{n,p} \times E_{k,l}^{p,q} = \delta_{j,k} E_{i,l}^{n,q}$$

Démonstration. La matrice $E_{i,j}^{n,p} \times E_{k,l}^{p,q}$ est bien définie et est dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Pour tout $(u, v) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \left[E_{i,j}^{n,p} E_{k,l}^{p,q} \right]_{u,v} &= \sum_{r=1}^p \left[E_{i,j}^{n,p} \right]_{u,r} \left[E_{k,l}^{p,q} \right]_{r,v} \\ &= \sum_{r=1}^p \delta_{u,i} \delta_{r,j} \delta_{r,k} \delta_{v,l} \\ &= \delta_{u,i} \delta_{v,l} \sum_{r=1}^p \delta_{r,j} \delta_{r,k} \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{r=1}^p \delta_{r,j} \delta_{r,k} = \delta_{j,k} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^p \delta_{r,j} \delta_{r,k} = \delta_{j,k}$$

Ainsi

$$\left[E_{i,j}^{n,p} E_{k,l}^{p,q} \right]_{u,v} = \delta_{u,i} \delta_{v,l} \delta_{j,k} = \delta_{j,k} \left[E_{i,l}^{n,q} \right]_{u,v} = \left[\delta_{j,k} E_{i,l}^{n,q} \right]_{u,v}$$

□

Matrice identité

Il existe une matrice neutre pour le produit matriciel : la *matrice identité*.

Définition 14.1.38 – Matrice identité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La *matrice identité d'ordre n* est la matrice, notée I_n , de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, définie par

$$I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.1.39

Par exemple :

$$I_2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriété 14.1.40

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), I_n A = A I_p = A$$

Démonstration. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a déjà $I_n A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

De plus, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$:

$$[I_n A]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [I_n]_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,k} a_{k,j} = a_{i,j}$$

donc $I_n A = A$. L'autre égalité se montre de la même façon. □

14.2 Systèmes linéaires et opérations élémentaires**14.2.1 Lien entre les systèmes linéaires et les matrices****Écriture matricielle d'un système**

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$.

On définit les matrices suivantes, à coefficients dans \mathbb{K} :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$$

Cela nous permet de mettre en place l'écriture matricielle d'un système linéaire :

Définition 14.2.1 – Écriture matricielle d'un système linéaire

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

Alors :

$$AX = B \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On dit alors que A est la *matrice* de ce système linéaire d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

B est appelé *second membre* de ce système.

Si $B = 0$, ce système linéaire est dit *homogène*.

Le système $AX = 0$ est appelé *système linéaire homogène associé au système $AX = B$* .

Enfin, le système $AX = B$ est dit *compatible* s'il admet au moins une solution.

Notons A_1, A_2, \dots, A_p les colonnes de A . Autrement dit,

$$\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, A_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Alors $AX = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_pA_p$ et dire que le système $AX = B$ admet au moins une solution revient à dire que B est combinaison linéaire de la famille (A_1, A_2, \dots, A_p) .

Propriété 14.2.2

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Le système $AX = B$ est *compatible* si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A .

Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 14.2.3

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On suppose que le système linéaire $AX = B$ admet une solution $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Alors l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = B$ est

$$\{X_0 + X, X \in S_H\}$$

où S_H est l'ensemble du système linéaire homogène associé.

Démonstration. Supposons que le système $AX = B$ admet $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ pour solution. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors :

$$AX = B \iff AX = AX_0 \iff AX - AX_0 = 0 \iff A(X - X_0) = 0 \iff X - X_0 \in S_H$$

L'ensemble des solutions de $AX = B$ est donc

$$\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), X - X_0 \in S_H\} = \{X_0 + X', X' \in S_H\}$$

□

14.2.2 Opérations élémentaires

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On s'intéresse au système linéaire $AX = B$.

Nous avons déjà vu comment résoudre des systèmes linéaires grâce aux trois opérations élémentaires, qui sont (pour rappel) :

- La *permutation* (ou *transposition*) : il s'agissait d'échanger deux lignes L_i et L_j du système. On note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- La *transvection* : il s'agissait d'ajouter, à une ligne L_i du système, une autre ligne L_j multipliée par un scalaire λ . On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
- La *dilatation*¹ : il s'agissait de multiplier une ligne L_i du système par un scalaire μ non nul. On note $L_i \leftarrow \mu L_i$.

Appliquer l'une de ces opérations élémentaires au système revient à appliquer cette même opération à A et B . Par exemple dans le cas de la transposition, l'équivalence

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i-1,1}x_1 + a_{i-1,2}x_2 + \dots + a_{i-1,p}x_p = b_{i-1} \\ \boxed{a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \dots + a_{j,p}x_p = b_j} \\ a_{i+1,1}x_1 + a_{i+1,2}x_2 + \dots + a_{i+1,p}x_p = b_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1,1}x_1 + a_{j-1,2}x_2 + \dots + a_{j-1,p}x_p = b_{j-1} \\ \boxed{a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,p}x_p = b_i} \\ a_{j+1,1}x_1 + a_{j+1,2}x_2 + \dots + a_{j+1,p}x_p = b_{j+1} \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i-1,1}x_1 + a_{i-1,2}x_2 + \dots + a_{i-1,p}x_p = b_{i-1} \\ \boxed{a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \dots + a_{j,p}x_p = b_j} \\ a_{i+1,1}x_1 + a_{i+1,2}x_2 + \dots + a_{i+1,p}x_p = b_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1,1}x_1 + a_{j-1,2}x_2 + \dots + a_{j-1,p}x_p = b_{j-1} \\ \boxed{a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,p}x_p = b_i} \\ a_{j+1,1}x_1 + a_{j+1,2}x_2 + \dots + a_{j+1,p}x_p = b_{j+1} \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

se traduit par

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,p} \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,p} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,p} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \dots & a_{j+1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ b_j \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_{j-1} \\ b_i \\ b_{j+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

1. Changement de vocabulaire, nous avons parlé d'*homothétie*. Nous utiliserons plutôt le terme de dilatation. La dilatation n'agit que sur une ligne, alors que l'homothétie agit sur l'ensemble des coefficients.

On définit alors les *matrices d'opérations élémentaires* :

Définition 14.2.4 – Matrices d'opérations élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. La *matrice de permutation* (entre i et j) la matrice $P_{i,j}^n$ obtenue en appliquant l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ à la matrice I_n :

$$P_{i,j}^n = I_n - E_{i,i}^n - E_{j,j}^n + E_{i,j}^n + E_{j,i}^n$$

- Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La *matrice de transvection* (entre i et j , de rapport λ) est la matrice $T_{i,j,\lambda}^n$ obtenue en appliquant l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n :

$$T_{i,j,\lambda}^n = I_n + \lambda E_{i,j}^n$$

- Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\mu \in \mathbb{K}^*$. La *matrice de dilatation* (de i par μ) est la matrice $D_{i,\mu}^n$ obtenue en appliquant $L_i \leftarrow \mu L_i$ à I_n :

$$D_{i,\mu}^n = I_n + (\mu - 1) E_{i,i}^n$$

Remarque 14.2.5

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille de ces matrices, on pourra omettre le n et noter, par exemple, $T_{i,j,\lambda}$ au lieu de $T_{i,j,\lambda}^n$.

Attention !

Ce n n'est pas une puissance, juste une notation !

Exemple 14.2.6

Par exemple

$$P_{1,2}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,2,-2}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{2,3}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.2.7

Observons l'effet de la multiplication d'une matrice A , par la gauche, par une matrice d'opération élémentaire. Par exemple, pour une transvection :

$$T_{2,3,4}^3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

À la 2-ième ligne, on a bien ajouté 4 fois la 3-ième.

Propriété 14.2.8 – Produit par la gauche d’une matrice d’opération élémentaire

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. Alors $P_{i,j}^n A$ est obtenue en appliquant $L_i \leftrightarrow L_j$ à A .
- Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $T_{i,j,\lambda}^n A$ est obtenue en appliquant $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à A .
- Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\mu \in \mathbb{K}^*$. Alors $D_{i,\mu}^n A$ est obtenue en appliquant $L_i \leftarrow \mu L_i$ à A .

Démonstration. Traitons le cas d’une transvection, les autres sont laissés en exercices. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $T_{i,j,\lambda}^n A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et pour tout $(u, v) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$:

$$\begin{aligned} [T_{i,j,\lambda}^n A]_{u,v} &= \sum_{k=1}^n [T_{i,j,\lambda}^n]_{u,k} a_{k,v} = \sum_{k=1}^n (\delta_{u,k} + \lambda \delta_{u,i} \delta_{k,j}) a_{k,v} \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{u,k} a_{k,v} + \lambda \sum_{k=1}^n \delta_{u,i} \delta_{k,j} a_{k,v} \\ &= a_{u,v} + \delta_{u,i} \lambda a_{j,v} \\ &= \begin{cases} a_{u,v} & \text{si } u \neq i \\ a_{u,v} + \lambda a_{j,v} & \text{si } u = i \end{cases} \end{aligned}$$

La ligne i se voit donc bien ajoutée la ligne j , les autres lignes sont inchangées. □

Remarque 14.2.9

Un produit par la droite par une matrice d’opération élémentaire aura le même effet, mais sur les colonnes. Pour s’en convaincre, on peut passer par la transposée de A . Prenons l’exemple d’une dilatation (avec les mêmes notations que ci-dessus) : soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\mu \in \mathbb{K}^*$.

Alors

$$(AD_{i,\mu}^n)^T = (D_{i,\mu}^n)^T A^T = D_{i,\mu}^n A^T$$

donc la i -ième ligne de $(AD_{i,\mu}^n)^T$ est la i -ième ligne de A^T multipliée par μ . Par définition de la transposée, la i -ème colonne de $AD_{i,\mu}^n$ est donc la i -ième colonne de A multipliée par μ .

Exercice 14.2.10

Donner, avec un minimum de calculs, la valeur de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Correction. Multiplier A , à gauche, par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_{2,3,2}$ revient à appliquer à A l’opération $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$.

On obtient alors $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 18 & 21 & 24 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Multiplier cette matrice, toujours par la gauche, par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{1,2}$ revient à lui

appliquer l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$. Finalement :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 21 & 24 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

14.3 Matrices carrées

Définition 14.3.1 – Matrices carrées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont dites *carrées d'ordre n* . L'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 14.3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les coefficients de la famille $(a_{i,i})_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket}$ sont les *coefficients diagonaux de A* .

Par exemple, les coefficients diagonaux de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ sont 1, 5 et 9.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice carrée d'ordre n . Cela nous permet de définir la notion de *puissance d'une matrice carrée* :

Définition 14.3.3 – Puissance d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence la *puissance k -ième de A* de la façon suivante :

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, A^{k+1} = A \times A^k \end{cases}$$

Nous l'avons déjà vu (voir la remarque 14.1.20), mais le produit matriciel n'est pas commutatif. Le produit AB , s'il a un sens, n'est en général pas égal au produit BA .

Lorsque l'égalité se présente, on dit que A et B *commutent*.

Définition 14.3.4 – Matrices commutantes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B *commutent* lorsque $A \times B = B \times A$.

Exemple 14.3.5

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice identité I_n commute avec toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puisque $I_n A = A = A I_n$.

— Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ commutent. En effet :

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -7 \\ 5 & 7 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -7 \\ 5 & 7 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = AB$$

— Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne commutent pas. En effet :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq AB$$

14.3.1 Matrices symétriques, antisymétriques

Définition 14.3.6 – Matrice symétrique, antisymétrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— On dit que A est une *matrice symétrique* lorsque

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{i,j} = a_{j,i}$$

L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

— On dit que A est une *matrice antisymétrique* lorsque

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{i,j} = -a_{j,i}$$

L'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 14.3.7

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique, alors que $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

Remarque 14.3.8

En reprenant les notations ci-dessus, et si A est antisymétrique, alors pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$: $a_{i,i} = -a_{i,i}$ donc $a_{i,i} = 0$. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont donc nuls.

Propriété 14.3.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— A est symétrique si et seulement si $A^T = A$.

— A est antisymétrique si et seulement si $A^T = -A$.

Démonstration. Pour l'antisymétrie (le cas de la symétrie est laissé en exercice) :

$$\begin{aligned} A^T = -A &\iff (a_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n} = (-a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \iff \left(\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{j,i} = -a_{i,j} \right) \\ &\iff A \text{ est antisymétrique} \end{aligned}$$

□

14.3.2 Matrices triangulaires et diagonales

Définition 14.3.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est *triangulaire supérieure* lorsque ses coefficients situés strictement en dessous de sa diagonale sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i > j \implies a_{i,j} = 0$$

On dit que A est *triangulaire inférieure* lorsque ses coefficients situés strictement au dessus de sa diagonale sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i < j \implies a_{i,j} = 0$$

On dit que A est *diagonale* lorsque ses coefficients situés en dehors de sa diagonale sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \implies a_{i,j} = 0$$

Exemple 14.3.11

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, alors que sa transposée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, qui est triangulaire inférieure. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale.

Remarque 14.3.12

- Une matrice diagonale n'est autre qu'une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.
- La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure, et inversement.

Propriété 14.3.13 – Produit de matrices triangulaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures). Alors AB est triangulaire supérieure (respectivement inférieure). De plus :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, [AB]_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$$

Remarque 14.3.14

- Les coefficients diagonaux du produit est, dans ce cas, le produit des coefficients diagonaux des deux matrices.
- Le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure n'est en général pas triangulaire (voir l'exemple 14.3.5)

Démonstration. On suppose que A et B sont triangulaires supérieures (le cas des matrices triangulaires inférieures se traite de la même façon, ou en transposant des matrices triangulaires supérieures).

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i > j$. Il s'agit de montrer que $[AB]_{i,j} = 0$. Or :

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$$

Or $a_{i,k} = 0$ si $i > k$ et $b_{k,j} = 0$ si $k > j$. Puisque $i > j$, l'une de ces deux inégalités est toujours vraie (sinon, il existerait

$k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $i \leq k \leq j < i$: absurde). Les coefficients de la somme précédente sont donc tous nuls et $[AB]_{i,j} = 0$. La matrice AB est donc bien triangulaire supérieure.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$[AB]_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = a_{i,i} b_{i,i}$$

En effet, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{i,k} = 0$ si $i > k$ et $b_{k,i} = 0$ si $k > i$. Dans la somme, seul le terme de rang $k = i$ peut donc être (potentiellement) non nul. \square

Corollaire 14.3.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales. Alors AB est diagonale. De plus :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, [AB]_{i,i} = a_{i,i} b_{i,i}$$

Démonstration. Évident d'après ce qui précède puisqu'une matrice diagonale est une matrice triangulaire à la fois inférieure et supérieure. \square

Exemple 14.3.16

On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $T' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors

$$T \times T' = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } D \times D' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.3.3 Formule du binôme

Théorème 14.3.17 – Formule du binôme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ deux matrices **qui commutent**. Alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}, (A+B)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$$

Démonstration. Le fait que A et B commutent est important : il nous permet d'écrire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $BA^k B^{N-k} = A^k B^{N+1-k}$.

La preuve est la même que pour les nombres complexes ! Elle se fait par récurrence.

— On a directement $(A+B)^0 = I_n = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} A^k B^{0-k}$.

— Soit $N \in \mathbb{N}$ et supposons que

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$$

Alors, en utilisant le triangle de Pascal :

$$\begin{aligned}
 & (A+B)^{N+1} \\
 &= (A+B)(A+B)^N \\
 &= (A+B) \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k} \\
 &= A \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k} + B \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k} \\
 &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^{k+1} B^{N-k} + \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N+1-k} \\
 &= \sum_{k=1}^{N+1} \binom{N}{k-1} A^k B^{N+1-k} + \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N+1-k} \\
 &= \binom{N}{N} A^{N+1} B^0 + \sum_{k=1}^N \left(\binom{N}{k-1} + \binom{N}{k} \right) A^k B^{N+1-k} + \binom{N}{0} A^0 B^{N+1} \\
 &= A^{N+1} + \sum_{k=1}^N \left(\binom{N}{k-1} + \binom{N}{k} \right) A^k B^{N+1-k} + B^{N+1} \\
 &= A^{N+1} + \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} A^k B^{N+1-k} + B^{N+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} A^k B^{N+1-k}
 \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. □

Remarque 14.3.18

Si A et B ne commutent pas, on peut écrire en développant : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Exercice 14.3.19

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice T^k .
2. Calculer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la matrice A^N .

Correction. 1. On a $T^0 = I_3$, $T^1 = T$, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Une récurrence immédiate montre alors^a que pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$, on a $T^k = 0$.

2. Remarquons que $A = T + I_3$ et que I_3 et T commutent. On peut donc utiliser la formule du binôme. Soit $N \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$\begin{aligned} A^N &= (T + I_3)^N \\ &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} T^k I_3^{N-k} \\ &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} T^k \end{aligned}$$

Or T^k est nul pour tout entier naturel $k \geq 3$. On a donc :

$$A^0 = I_3$$

$$A^1 = A$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$:

$$\begin{aligned} A^N &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} T^k \\ &= \binom{N}{0} T^0 + \binom{N}{1} T^1 + \binom{N}{2} T^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{N(N-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & N & \frac{N(N-1)}{2} + N \\ 0 & 1 & N \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a. On dit que T est *nilpotente d'indice de nilpotence 3*.

14.3.4 Matrices inversibles

Définition

Définition 14.3.20 – Matrice inversible

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$

On dit alors que B est l'*inverse*^a de A . B est noté A^{-1} .

L'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est appelé *groupe des matrices inversibles d'ordre n* est noté $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

a. L'unicité de cet inverse est démontré juste après

Exemple 14.3.21

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 14.3.22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Démonstration. Supposons A inversible et soient B et B' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$.

Alors $BAB' = B$ puisque $AB' = I_n$. Cependant, $BA = I_n$ donc on a aussi $BAB' = B'$. Ainsi $B = B'$. □

Propriété 14.3.23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

Démonstration. Immédiat car $I_n \times I_n = I_n$. □

Exercice 14.3.24 – Technique à retenir

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A - I_3)(A - 2I_3) = 0$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Correction. 1. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Développons :

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = A^2 - 2AI_3 - I_3A + 2I_3^2 = A^2 - 3A + 2I_3$$

D'après la question précédente, on a donc

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0$$

ou encore

$$2I_3 = 3A - A^2 = A(3I_3 - A) = (3I_3 - A)A$$

ou enfin

$$I_3 = A \times \left(\frac{1}{2} (3I_3 - A) \right) = \left(\frac{1}{2} (3I_3 - A) \right) A$$

A est donc bien inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{2} (3I_3 - A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversibilité et opérations

Propriété 14.3.25 – Involutivité de l'inverse

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors A^{-1} est inversible d'inverse A , autrement dit

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Démonstration. Immédiat car $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_n$. □

Propriété 14.3.26 – Inverse et produit

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Démonstration. Supposons A et B inversibles. Alors, par associativité du produit :

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

et

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

donc AB est bien inversible, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$. □

Propriété 14.3.27 – Inverse et transposée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Démonstration. Supposons A inversible. Alors :

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$$

donc A^T est inversible d'inverse $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. □

Propriété 14.3.28

Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

— Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$: $(P_{i,j})^{-1} = P_{i,j}$.

- Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K} : (T_{i,j,\lambda})^{-1} = T_{i,j,-\lambda}$.
- Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et tout $\mu \in \mathbb{K}^* : (D_{i,\mu})^{-1} = D_{i,\frac{1}{\mu}}$.

Remarque 14.3.29

Ces inverses sont faciles à deviner : par exemple, dans le cas de la transvection, l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ peut être annulée par l'opération $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$.

Démonstration. Prouvons le cas de la transvection, les autres sont laissés en exercice. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 T_{i,j,\lambda} T_{i,j,-\lambda} &= (I_n + \lambda E_{i,j})(I_n - \lambda E_{i,j}) \\
 &= I_n^2 - \lambda E_{i,j} + \lambda E_{i,j} - \lambda^2 (E_{i,j})^2 \\
 &= I_n - \lambda^2 \underbrace{\delta_{j,i}}_{=0} E_{i,i} \\
 &= I_n
 \end{aligned}$$

car $i \neq j$ donc $\delta_{j,i} = 0$. □

Puisque les opérations sur les lignes ou les colonnes d'une matrice se traduisent par des produits, matriciels, les propriétés 14.3.26, 14.3.27 et 14.3.28 donnent alors directement :

Propriété 14.3.30

Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes transforment toute matrice inversible en une matrice inversible.

Exercice 14.3.31

Justifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Correction. On obtient A en appliquant à I_3 les deux transvections $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. Puisque I_3 est inversible, A l'est aussi.

Calcul de l'inverse d'une matrice**Théorème 14.3.32 – Un critère d'inversibilité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose qu'il existe deux matrices $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $B = PAQ^{-1}$. Alors A est inversible si et seulement si B est inversible.

Démonstration. Si A est inversible, il en est de même pour $B = PAQ^{-1}$ en tant que produit de matrices inversibles. Réciproquement, si B est inversible, il en est de même pour $A = P^{-1}PAQ^{-1}Q = P^{-1}BQ$ pour la même raison. □

Remarque 14.3.33

- P et Q peuvent parfaitement être des matrices d'opérations élémentaires (ou des produits de telles matrices). Cela veut dire que si on arrive à passer de A à B via des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A , alors A est inversible si et seulement si B l'est.
- Dans la formule, on considère Q^{-1} (et pas Q) pour préparer une autre formule, fortement liée à celle-ci, que nous verrons dans un chapitre ultérieur.

Exercice 14.3.34 – À retenir !

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Théorème 14.3.35 – Inversion par les opérations élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe une famille (E_1, E_2, \dots, E_N) de matrices d'opérations élémentaires telles que $E_1 E_2 \dots E_N A = I_n$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = E_1 E_2 \dots E_N$$

Démonstration. $E_1 E_2 \dots E_N$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles, ainsi $A = (E_1 E_2 \dots E_N)^{-1} I_n = (E_1 E_2 \dots E_N)^{-1}$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \left((E_1 E_2 \dots E_N)^{-1} \right)^{-1} = E_1 E_2 \dots E_N$$

□

Remarque 14.3.36

Rappelons que multiplier A , par la gauche, par des matrices d'opérations élémentaires revient à appliquer ces opérations élémentaires aux lignes de A . Cette propriété dit donc que si, via des opérations élémentaires sur les lignes, on arrive à transformer A en I_n , alors A est inversible et on obtient son inverse en appliquant ces mêmes opérations, dans le même ordre, aux lignes de I_n .

Quitte à passer par la transposée de A , on peut aussi choisir de manipuler les colonnes.

Attention !

Cependant, pour déterminer l'inverse de A , il ne faut pas mélanger les opérations sur les lignes et les colonnes ! Ce résultat ne fonctionne que si l'on n'effectue que des opérations élémentaires sur les lignes de A ou que des opérations élémentaires sur les colonnes de A .

Exercice 14.3.37 – À retenir !

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Correction. On trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

On peut aussi étudier l'inversibilité d'une matrice par les systèmes. Avant de voir ces résultats, le lemme suivant nous facilitera la vie.

Lemme 14.3.38

Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^{*3}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour tout $j \in [1; q]$, on note B_j la j -ième colonne de B . On note alors $B = (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_q)$ (les B_i étant des matrices colonnes). Alors

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_q)$$

Démonstration. Soit $j \in [1; q]$. En notant $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, on a :

$$\begin{aligned} AB_j &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1,k} b_{k,j} \\ \sum_{k=1}^p a_{2,k} b_{k,j} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{n,k} b_{k,j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui est bien la j -ième colonne de AB . □

Théorème 14.3.39 – Inversibilité par un système

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est inversible} \iff (\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = Y)$$

Remarque 14.3.40

Autrement dit, A est inversible si et seulement si le système $AX = Y$ admet une unique solution, et ce pour tout second membre Y .

Démonstration. Commençons par le sens direct et supposons que A soit inversible. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

donc l'équation $AX = Y$ admet bien une unique solution.

Réciproquement, supposons que

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = Y$$

Par hypothèse, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe une (unique) matrice $B_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB_j = Y_j$ où Y_j est la j -ième colonne de I_n .

En vertu du lemme, on a alors

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_n) = (Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n) = I_n$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $BA = I_n$, ou encore que $BA - I_n = 0$. Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, en notant C_j la j -ième colonne de $BA - I_n$, on a

$$A(BA - I_n) = (AC_1 \ AC_2 \ \dots \ AC_n)$$

Or :

$$A(BA - I_n) = \underbrace{AB}_{=I_n} A - A = A - A = 0$$

Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $AC_j = 0$. Cependant, par hypothèse, l'équation $AX = 0$ n'admet qu'une seule solution, et $X = 0$ en est une solution évidente. On en déduit que $C_j = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et donc que $BA - I_n = 0$.

Finalement, $AB = BA = I_n$: A est inversible, d'inverse B . □

Exemple 14.3.41

La matrice carrée nulle 0_n d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque n'est pas inversible puisque l'équation $0_n \times X = 0$ admet une infinité de solutions.

Théorème 14.3.42 – Inversion par un système

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, alors A^{-1} est l'unique matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2, AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

Démonstration. Il est évident que A^{-1} vérifie bien la propriété donnée.

Supposons qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2, AX = Y \iff X = CY$$

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X = A^{-1}Y$. On a donc $AX = Y$ donc, par hypothèse, $X = CY$. On a donc montré que :

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A^{-1}Y = CY$$

En notant, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, Y_j la j -ième colonne de I_n , on a donc

$$A^{-1}I_n = (A^{-1}Y_1 \ A^{-1}Y_2 \ \dots \ A^{-1}Y_n) = (CY_1 \ CY_2 \ \dots \ CY_n) = CI_n$$

donc $A^{-1} = C$. □

Exercice 14.3.43 – À retenir !

Montrer, en utilisant un système, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Montrer de même que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Correction. On trouve

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & 1 & 8 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 14.3.44 – Inversibilité et matrice triangulaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure). Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, et dans ce cas, A^{-1} est triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n . On montre le résultat pour les matrices triangulaires supérieure, le cas des matrices triangulaires inférieures s'en déduit par transposition.

- Supposons que $n = 1$. Soit $A = (a_{1,1}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. A est immédiatement triangulaire supérieure (et inférieure). Si $a_{1,1} = 0$, A est la matrice nulle et n'est pas inversible. Sinon, il est immédiat de vérifier que $\left(\frac{1}{a_{1,1}}\right)$ est l'inverse de A , cet inverse étant bien triangulaire supérieure (et inférieure).
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ et notons

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

et

$$A' = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n,n+1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de A . Remarquons que A' est triangulaire supérieure et est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: on pourra donc lui appliquer notre hypothèse de récurrence.

- Supposons que $a_{1,1} = 0$. Alors la première colonne de A est nulle. A n'est donc pas inversible puisque l'équa-

tion $AX = 0$ admet au moins deux solutions : la matrice colonne nulle et, par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On suppose alors que $a_{1,1} \neq 0$. Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$ et posons

le système :

$$AX = Y \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n+1}x_{n+1} = y_1 \\ a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n+1}x_{n+1} = y_2 \\ \vdots \\ a_{n+1,n+1}x_{n+1} = y_{n+1} \end{cases} \quad (S)$$

On peut déjà remarquer que le système (S) est équivalent à

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{1,1}} \left(y_1 - \sum_{k=2}^{n+1} a_{1,k} x_k \right) \\ A'X' = Y' \end{cases}$$

où $X' = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$. **Si les coefficients diagonaux de A, et donc de A', sont tous non nuls,**

alors par hypothèse de récurrence, l'équation $A'X' = Y'$ d'inconnue X' admet, pour tout Y' , une unique solution. Le système (S) admet donc lui aussi une unique solution, quel que soit son second membre : A est inversible.

De plus, dans ce cas, A'^{-1} est triangulaire supérieure : notons-la

$$A'^{-1} = \begin{pmatrix} c_{2,2} & c_{2,3} & \dots & c_{2,n+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n,n+1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

le système (S) devient

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{1,1}} \left(y_1 - \sum_{k=2}^{n+1} a_{1,k} x_k \right) \\ X' = A'^{-1}Y' \end{cases}$$

Il existe donc des coefficients constants $c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,n+1}$ tels que le système précédent soit équivalent à :

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + \dots + c_{1,n+1}y_{n+1} \\ x_2 = c_{2,2}y_2 + \dots + c_{2,n+1}y_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+1} = c_{n+1,n+1}y_{n+1} \end{cases}$$

Ceci étant valable pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$, l'inverse de A est la matrice triangulaire supérieure formée des $c_{i,j}$.

Enfin, **si un des coefficients diagonaux de A est nul**, c'est forcément l'un des coefficients diagonaux de A' puisque $a_{1,1} \neq 0$. A' n'est donc pas inversible, et il existe $Y' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'équation $A'X' = Y'$ n'admet pas une unique solution. Il existe donc (prendre y_1 quelconque) $Y \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$ tel que l'équation $AX = Y$ n'admet pas une unique solution : A n'est pas inversible. □

14.4 Exercices

Exercice 14.4.1

Calculer les matrices suivantes :

$$1. M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. M = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.4.2

Calculer les produits suivants, en précisant à l'avance les dimensions de la matrice obtenue :

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.4.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 14.4.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 puis A^n où $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, B^n (on pourra exprimer B en fonction de A)

Exercice 14.4.5

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est inversible et si c'est le cas calculer son inverse :

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14.4.6

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice 14.4.7

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que cette matrice est inversible et déterminer A^{-1} .

2. Résoudre $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}.$

Exercice 14.4.8

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})$.

2. On suppose que $A^p = 0_n$ ($0_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls). Montrer que $I_n - A$ est inversible.

3. En déduire l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 14.4.9

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A^2 = 3A - 2I_2$.

2. En déduire A^3 puis A^4 .

3. Montrer qu'il existe deux suites $(a_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on ait $A^p = a_p A + b_p I_n$.

4. Étudier les suites $(a_p + b_p)$ et $(2a_p + b_p)$ et en déduire A^p en fonction de p .

Exercice 14.4.10 – Un pas vers la réduction de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{0, 2I_2\}$ telle que $A(A - 2I_2) = 0$.

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer de même que $A - 2I_2$ n'est pas inversible.
3. Montrer l'existence de deux matrices colonnes **non nulles** $X_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX_0 = 0$ et $AX_1 = 2X_1$.

Dans toute la suite, on pose $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Vérifier que $A(A - I_2) = 0$. Déterminer $X_0, X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulles telles que $AX_0 = 0$ et $AX_1 = 2X_1$.
On note P la matrice dont les deux colonnes sont, dans cet ordre, X_0 et X_1 :

$$P = (X_0 \ X_1)$$

5. Montrer que P est inversible.
6. On note $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est diagonale.
7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice D^n et la matrice A^n .

Exercice 14.4.11

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A - I_3)(A - 3I_3) = 0$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 14.4.12

Résoudre, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le système :

$$\begin{cases} x + (1-m)y + (m-1)z = 0 \\ (2-m)y + (m-1)z = 0 \\ (2-2m)y + (2m-1)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 14.4.13

On pose $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 0$.
2. Exprimer M en fonction de A et I_2 .
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice M^n .

Exercice 14.4.14

Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles M est inversible.

2. Résoudre, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le système :

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

14.5 DM conducteur

Exercice 48

Calculer les matrices suivantes :

$$1. M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. M = 4 \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction. 1. On obtient $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

2. On obtient $M = \begin{pmatrix} 2 & 24 & 4 \\ -6 & 12 & -24 \\ 16 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. On obtient $M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 25 \\ 26 & -24 & -11 \\ 4 & 0 & 15 \end{pmatrix}$.

4. On obtient $M = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$.

Exercice 49

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 & -3 \\ 6 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & -6 \\ 3 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que

$$A^2 = 18I_4 - 3A$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$A^n = a_n I_4 + b_n A$$

et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

3. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} = 18b_n - 3b_{n+1}$$

4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n , b_n et A^n en fonction de n .

Correction. 1. Calcul direct.

2. On peut raisonner par récurrence.

— Il est clair que $A^0 = a^0 I_4 + b_0 A$ avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ (et on a également $A^1 = a_1 I_4 + b_1 A$ avec $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$).

— Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n I_4 + b_n A$. Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times (a_n I_4 + b_n A) \\ &= a_n A + b_n A^2 \\ &= a_n A + b_n (18I_4 - 3A) \\ &= a_n A + 18b_n I_4 - 3b_n A \\ &= a_{n+1} I_4 + b_{n+1} A \end{aligned}$$

en posant $a_{n+1} = 18b_n$ et $b_{n+1} = a_n - 3b_n$

Ainsi, en posant :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ b_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 18b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n - 3b_n \end{cases}$$

alors on a $A^n = a_n I_4 + b_n A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a directement, d'après la question précédente :

$$b_{n+2} = a_{n+1} - 3b_{n+1} = 18b_n - 3b_{n+1}$$

4. (b_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 = 18 - 3x$ ou encore $x^2 + 3x - 18 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$. Son discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-18) = 81 = 9^2$ et ses racines sont $r_1 = \frac{-3-9}{2} = -6$ et $r_2 = \frac{-3+9}{2} = 3$.

Il existe donc un (unique) couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Avec $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -6\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 9\mu = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = -\mu = \frac{-1}{9} \\ \mu = \frac{1}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \frac{-1}{9} \times (-6)^n + \frac{1}{9} \times 3^n = \frac{1}{9} (3^n - (-6)^n)$$

et

$$\begin{aligned}
 a_n &= b_{n+1} + 3b_n \\
 &= \frac{1}{9} (3^{n+1} - (-6)^{n+1}) + \frac{1}{3} (3^n - (-6)^n) \\
 &= \left(\frac{3}{9} + \frac{1}{3}\right) 3^n + \left(\frac{6}{9} - \frac{1}{3}\right) (-6)^n \\
 &= \frac{2}{3} \times 3^n + \frac{1}{3} \times (-6)^n
 \end{aligned}$$

et on trouve alors

$$\begin{aligned}
 A^n &= a_n I_4 + b_n A \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-6)^n + 2 \cdot 3^n & -2(-6)^n + 2 \cdot 3^n & (-6)^n - 3^n & (-6)^n - 3^n \\ -2(-6)^n + 2 \cdot 3^n & (-6)^n + 2 \cdot 3^n & (-6)^n - 3^n & (-6)^n - 3^n \\ -(-6)^n + 3^n & -(-6)^n + 3^n & 2(-6)^n + 3^n & 2(-6)^n - 2 \cdot 3^n \\ -(-6)^n + 3^n & -(-6)^n + 3^n & 2(-6)^n - 2 \cdot 3^n & 2(-6)^n + 3^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Exercice 50

Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose $M = \begin{pmatrix} m-2 & 1 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ m-3 & m+1 & m^2+1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles M est inversible.
2. Résoudre, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le système :

$$\begin{cases} (m-2)x + y + z = 0 \\ -x + my + 2z = 0 \\ (m-3)x + (m+1)y + (m^2+1)z = 0 \end{cases}$$

Correction. 1. Par opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} m-2 & 1 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ m-3 & m+1 & m^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} m-2 & 1 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ -1 & m & m^2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} m-2 & 1 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ 0 & 0 & m^2-2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_1} \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m-1 & m & 2 \\ 0 & 0 & m^2-2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & m^2-2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et on obtient donc une matrice triangulaire. M est donc inversible si et seulement si $m-1 \neq 0$ et $m^2-2 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

2. Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, M est inversible et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la seule solution du système donné.

Supposons alors que $m \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Commençons déjà par simplifier le système dans ces trois cas :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (m-2)x + y + z = 0 \\ -x + my + 2z = 0 \\ (m-3)x + (m+1)y + (m^2+1)z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (m-2)x + y + z = 0 \\ -x + my + 2z = 0 \\ (m^2-2)z = 0 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2) \end{aligned}$$

— Supposons que $m = 1$. Alors le système équivaut à :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

et l'ensemble de ses solutions est $\left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$

— Supposons que $m = \sqrt{2}$. Alors le système devient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (-2+\sqrt{2})x + y + z = 0 \\ -x + \sqrt{2}y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (-2+\sqrt{2})x + y + z = 0 \\ (3-2\sqrt{2})x - (2-\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = -(-2+\sqrt{2})x - y \\ x = \frac{2-\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}y = \frac{(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}y = (2+\sqrt{2})y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = -(-2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})y - y = 2y - y = y \\ x = (2+\sqrt{2})y \end{cases} \end{aligned}$$

et l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{pmatrix} (2+\sqrt{2})y \\ y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

— Supposons que $m = -\sqrt{2}$. Alors le système devient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (-2 - \sqrt{2})x + y + z = 0 \\ -x - \sqrt{2}y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (-2 - \sqrt{2})x + y + z = 0 \\ (2\sqrt{2} + 3)x - (\sqrt{2} + 2)y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = (2 + \sqrt{2})x - y \\ x = \frac{2 + \sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}y = \frac{(2 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}y = (2 - \sqrt{2})y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})y - y = 2y - y = y \end{cases} \end{aligned}$$

et l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{pmatrix} (2 - \sqrt{2})y \\ y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 51

On définit deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 4$ et $v_0 = -2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -12u_n + 7v_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = AU_n$$

2. Déterminer $X_0, X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulles telles que $AX_0 = 1 \cdot X_0$ et $AX_1 = 3 \cdot X_1$.
3. On pose $P = (X_0 \ X_1)$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
4. Soit $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est diagonale.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice D^n et la matrice A^n .
6. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n .

Correction. 1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$ convient.

2. Posons $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} AX_0 = X_0 &\iff (A - I_2)X_0 = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ -12x + 6y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff y = 2x \end{aligned}$$

ainsi $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient. De même, en posant $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} AX_1 = 3X_1 &\iff (A - 3I_2)X_1 = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ -12x + 4y = 0 \end{cases} \\ &\iff y = 3x \end{aligned}$$

donc $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ convient.

3. On utilise la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ \\ (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{array} \right)$$

donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. On trouve

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

qui est bien diagonale.

5. D étant diagonale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

De plus, une récurrence immédiate donne $A^n = PD^nP^{-1}$ ce qui donne

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot 3^n & 3^n - 1 \\ 6 - 6 \cdot 3^n & 3 \cdot 3^n - 2 \end{pmatrix}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence immédiate, on a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= U_n = A^n U_0 \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot 3^n & 3^n - 1 \\ 6 - 6 \cdot 3^n & 3 \cdot 3^n - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 - 10 \cdot 3^n \\ 28 - 30 \cdot 3^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} u_n = 14 - 10 \cdot 3^n \\ v_n = 28 - 30 \cdot 3^n \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 15

Limites et continuité

15.1	Limite d'une fonction en un point (fini ou non)	454
15.1.1	Notion de limite	454
15.1.2	Notion de voisinage	455
15.1.3	Caractérisation séquentielle de la limite	457
15.1.4	Opérations sur les limites	458
15.1.5	Limite à droite, limite à gauche	459
15.1.6	Limites et inégalités	461
15.2	Continuité d'une fonction	464
15.2.1	Continuité en un point	464
15.2.2	Continuité sur un intervalle	465
15.2.3	Théorèmes sur la continuité	465
15.2.4	Théorème des valeurs intermédiaires	465
15.3	Extension aux fonctions à valeurs complexes	470
15.4	Exercices	472

Dans tout ce chapitre, on considère un intervalle réel I contenant au moins deux points.

15.1 Limite d'une fonction en un point (fini ou non)

15.1.1 Notion de limite

Définition 15.1.1 – Limite finie ou infinie d'une fonction en un nombre fini

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et a un point de I ou une extrémité **finie** de I .

— Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en a lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

— On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \iff f(x) \geq M$$

— On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a lorsque :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \iff f(x) \leq m$$

Définition 15.1.2 – Limite finie ou infinie en $+\infty$ ou $-\infty$

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

— On suppose que $+\infty$ est une extrémité de I .

— Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

— On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \implies f(x) \geq M$$

— On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \implies f(x) \leq m$$

— On suppose que $-\infty$ est une extrémité de I .

— Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en $-\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

— On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \implies f(x) \geq M$$

— On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ lorsque :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \implies f(x) \leq m$$

Propriété 15.1.3 – Unicité de la limite

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un point de I ou une extrémité de I . Si f admet une limite en a , celle-ci est unique.

Démonstration. Traitons par exemple le cas où a est fini et où f admet deux limites finies en a .

Soit $(l, l') \in \mathbb{R}^2$, avec $l \neq l'$, et supposons que f admet l et l' pour limites en a . Posons $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{3}$, qui est donc strictement positif puisque $l \neq l'$. Par définition, il existe alors $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $x \in I$:

$$\begin{cases} |x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon \\ |x - a| \leq \eta_2 \implies |f(x) - l'| \leq \varepsilon \end{cases}$$

De ce fait, pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \min(\eta_1, \eta_2)$, on obtient :

$$|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2|l - l'|}{3}$$

ce qui est absurde puisque $|l - l'| > 0$. □

Définition 15.1.4

Si f admet l (fini ou non) pour limite en a (fini ou non), on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

ou encore

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

Si l est fini, on dit que f converge vers l en a .

15.1.2 Notion de voisinage

Définition 15.1.5 – Voisinage d'un point

- Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle *voisinage de a* toute partie de \mathbb{R} qui inclut un intervalle ouvert non vide centré en a (c'est-à-dire un intervalle de la forme $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$).
- On appelle *voisinage de $+\infty$* toute partie de \mathbb{R} qui inclut un intervalle de la forme $]\alpha; +\infty[$, où α est un réel quelconque.
- On appelle *voisinage de $-\infty$* toute partie de \mathbb{R} qui inclut un intervalle de la forme $]-\infty; \alpha[$, où α est un réel quelconque.

Exemple 15.1.6

$[-1; 1]$ est un voisinage de 0, puisqu'il inclut l'intervalle $\left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[$, intervalle ouvert contenant 0.

De même, $]1; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.

À retenir

Dans un voisinage de a , on peut « tendre vers a » !

Cette notion de voisinage permet de donner une définition universelle de la notion de limite.

Définition 15.1.7 – Limite d'une fonction en un point

Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

On dit que f admet l pour limite en a lorsque pour tout voisinage V_l de l , il existe un voisinage V_a de a tel que pour tout $x \in I$:

$$x \in V_a \implies f(x) \in V_l$$

Propriété 15.1.8

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un point de I . On suppose que f admet une limite en a . Alors cette limite est finie et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Démonstration. Puisque $a \in I$, f est définie en a .

Supposons que f admet $+\infty$ comme limite en a . Posons $M = f(a) + 1$: par définition, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq M = f(a) + 1$$

Or $a \in I$ et $|a - a| = 0 \leq \eta$, ainsi $f(a) \geq f(a) + 1$: c'est absurde. La limite de f en a ne peut donc pas être $+\infty$.

De même, on montre que f ne peut pas tendre vers $-\infty$ en a .

Si f admet une limite en a , celle-ci est donc finie : notons-la $l \in \mathbb{R}$.

Supposons que $f(a) \neq l$ et posons $\varepsilon = \frac{|f(a) - l|}{2} > 0$. Par définition, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon = \frac{|f(a) - l|}{2}$$

De nouveau, a est un point de I et $|a - a| = 0 \leq \varepsilon$ donc

$$0 < |f(a) - l| \leq \frac{|f(a) - l|}{2}$$

ce qui est absurde. On a donc bien $l = f(a)$. □

Propriété vraie au voisinage d'un point**Définition 15.1.9**

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit qu'une propriété est *vraie pour f au voisinage de a* lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que cette propriété soit vraie sur $I \cap V$.

Exercice 15.1.10

Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$, on a $\cos(x) > 0$. On peut donc dire que la fonction \cos est strictement positive au voisinage de 0.

Propriété 15.1.11

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Démonstration. Traitons le cas où a est $+\infty$. Notons l la limite, supposée finie, de f en a . Puisque $1 > 0$, il existe par définition un réel A tel que pour tout $x \in I$:

$$x \geq A \implies |f(x) - l| \leq 1$$

Pour un tel réel x , on a donc

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| \leq 1 + |l|$$

Ainsi :

$$\forall x \in I \cap [A; +\infty[, |f(x)| \leq \underbrace{1 + |l|}_{\text{constante}}$$

donc f est bornée au voisinage de $+\infty$. □

15.1.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 15.1.12 – Caractérisation séquentielle de la limite

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f admet l pour limite en a .
2. Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I admettant a pour limite, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$.

Démonstration. On étudie le cas où l et a sont finis.

— **Sens direct :** supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et considérons une suite (u_n) d'éléments de I convergente vers a . Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque f admet l pour limite en a , il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Or u converge vers a donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - a| \leq \eta$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on a donc $|f(u_n) - l| \leq \varepsilon$: la suite $(f(u_n))$ admet donc l pour limite.

— **Sens réciproque :** on raisonne par contraposée. Supposons que f n'admette pas l pour limite en a . Alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in I, |x - a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon$$

Montrons alors qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de I convergente vers a mais telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers l . Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons $\eta = \frac{1}{n+1} > 0$. D'après ce qui précède, il existe $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| \leq \eta = \frac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - l| > \varepsilon$.

On a ainsi construit une suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} |u_n - a| \leq \frac{1}{n+1} \\ |f(u_n) - l| > \varepsilon \end{cases}$$

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(u_n) - l| > \varepsilon$, la suite $(f(u_n))$ ne converge pas vers l . Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - a| \leq \frac{1}{n+1}$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ puisque $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On a donc bien trouvé une suite (u_n) convergente vers a mais telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers l . □

Exemple 15.1.13

On a $\lim_{x \rightarrow a} \ln(x) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$.

Exercice 15.1.14

Montrer que la fonction \cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

15.1.4 Opérations sur les limites

La caractérisation séquentielle de la limite permet de retrouver rapidement les opérations sur les limites déjà vues pour les suites.

On considère a , un point de I ou une extrémité de I , et $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que f et g admettent une limite en a , et on note l la limite de f en a et l' la limite de g en a . On a alors les résultats suivants :

Limite de $f + g$	$l' = -\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$l' = +\infty$
$l = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$l \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l + l'$	$+\infty$
$l = +\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

Limite de fg	$l' = -\infty$	$l' \in \mathbb{R}_-^*$	$l = 0$	$l' \in \mathbb{R}_+^*$	$l' = +\infty$
$l = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	ll'	0	ll'	$-\infty$
$l = 0$	F.I.	0	0	0	F.I.
$l \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	ll'	0	ll'	$+\infty$
$l = +\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

Dans le tableau suivant, on suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a .

Limite de $\frac{f}{g}$	$l' = -\infty$	$l' \in \mathbb{R}_-^*$	$l' = 0^-$	$l' = 0$	$l' = 0^+$	$l' \in \mathbb{R}_+^*$	$l' = +\infty$
$l = -\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$l \in \mathbb{R}_-^*$	0^+	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$\frac{l}{l'}$	0^-
$l = 0^-$	0^+	0^+	F.I.	F.I.	F.I.	0^-	0^-
$l = 0$	0	0	F.I.	F.I.	F.I.	0	0
$l = 0^+$	0^-	0^-	F.I.	F.I.	F.I.	0^+	0^+
$l \in \mathbb{R}_+^*$	0^-	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$\frac{l}{l'}$	0^+
$l = +\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	F.I.

Montrons, par exemple, le cas du produit pour des limites finies. Soit (u_n) une suite d'éléments de I de limite a . Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l'$, on a par caractérisation séquentielle de la limite :

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \text{ et } g(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l'$$

Les opérations vues sur les suites prouvent que $f(u_n)g(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ll'$. Puisque ce résultat est valable pour toute suite d'éléments de I de limite a , on a bien $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} ll'$ par caractérisation séquentielle de la limite.

Dans le cas du quotient, si le dénominateur admet une limite non nulle, on a la garantie que celui-ci ne s'annule pas au voisinage de a .

Propriété 15.1.15

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soit $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
 On suppose que g admet $+\infty$ ou un réel strictement positif pour limite en a .
 Alors g est strictement positive au voisinage de a .

Remarque 15.1.16

On retrouve le même résultat si g tend vers $-\infty$ ou vers un réel strictement négatif en a . Dans ce cas, g est strictement négative au voisinage de a .

Démonstration. On peut utiliser les voisinages. Notons l la limite de g , avec $l = +\infty$ ou $l \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe alors un voisinage V de l inclus dans \mathbb{R}_+^* (si $l = +\infty$, on peut prendre $V =]1; +\infty[$. Si $l \in \mathbb{R}_+^*$, on peut prendre $V = \left] \frac{l}{2}; \frac{3l}{2} \right[$).
 Par définition, il existe alors un voisinage V_a de a tel que pour tout $x \in I \cap V_a$, on ait $g(x) \in V \subset \mathbb{R}_+^*$. g est alors bien strictement positive au voisinage de a . \square

Propriété 15.1.17 – Limite et composition

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
 Soit J un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points et soit b un point de J ou une extrémité de J . Soit $g \in \mathcal{F}(J, I)$.
 On suppose que g admet a pour limite en b et que f admet $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ pour limite en a . Alors $f \circ g$ admet l pour limite en b .

Démonstration. Soit (u_n) une suite d'éléments de J de limite b . Puisque g admet a pour limite en b , on a par caractérisation séquentielle de la limite :

$$g(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$$

La suite $(g(u_n))$ est donc une suite d'éléments de I qui tend vers a . Toujours par caractérisation séquentielle, on a donc

$$f(g(u_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

et ceci pour toute suite u d'éléments de J de limite b .

Encore une fois, la caractérisation séquentielle de la limite affirme alors que $f \circ g$ admet l pour limite en b . \square

15.1.5 Limite à droite, limite à gauche**Définition 15.1.18 – Limite à droite, limite à gauche**

Soit a un point de I ou une extrémité **finie** de I . Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

— On suppose que $I \cap]a; +\infty[\neq \emptyset$. On dit que f admet l pour *limite à droite en a* lorsque $f|_{]a; +\infty[}$ admet l pour limite en a . On note alors

$$l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l \text{ ou } l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ou encore

$$f(x) \xrightarrow[x > a]{x \rightarrow a} l \text{ ou } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} l$$

— On suppose que $I \cap]-\infty; a[\neq \emptyset$. On dit que f admet l pour *limite à gauche en a* lorsque $f|_{]-\infty; a[}$ admet l pour limite en a . On note alors

$$l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l \text{ ou } l = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

ou encore

$$f(x) \xrightarrow[x < a]{x \rightarrow a} l \text{ ou } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} l$$

Définition 15.1.19 – Limite épointée

Soit a un point de I . On suppose que $I \cap]a; +\infty[\neq \emptyset$ et que $I \cap]-\infty; a[\neq \emptyset$.

Soit $f \in \mathcal{F}(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$ (en particulier, f n'est pas définie en a). Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

On dit que f admet l pour limite en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$. On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ou, s'il n'y a pas de risque de confusion, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$.

Exercice 15.1.20

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Montrer que f admet une limite à droite et une limite à gauche en 0 et les déterminer.

Propriété 15.1.21

Soit a un point de I ou une extrémité **finie** de I . Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que $I \cap]a; +\infty[\neq \emptyset$ et que $I \cap]-\infty; a[\neq \emptyset$. Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

— Si $a \in I$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = l$$

— Si $a \notin I$ (f n'est alors pas définie en a), alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

Démonstration. Supposons que $a \in I$. Le sens direct est évident, occupons-nous du sens réciproque et supposons que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = l.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$, il existe $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $i \in I \cap]a; +\infty[$:

$$|x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

De même, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ donc il existe $\eta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $i \in I \cap]-\infty; a[$:

$$|x - a| \leq \eta_2 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Soit alors $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \min(\eta_1, \eta_2)$.

— Si $x > a$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$ puisque $|x - a| \leq \eta_1$.

— Si $x < a$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$ puisque $|x - a| \leq \eta_2$.

— Si $x = a$, alors $|f(x) - l| = 0 < \varepsilon$.

Dans tous les cas, on a bien $|f(x) - l| \leq \varepsilon$, donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Si f n'est pas définie en a , la démonstration est similaire. □

Exercice 15.1.22

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x+3}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \\ 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Montrer que f admet une limite finie en 1 et la déterminer.

15.1.6 Limites et inégalités**Propriété 15.1.23 – Le passage à la limite préserve les inégalités larges**

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

On suppose que f et g admettent une limite finie en a .

On suppose qu'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in I \cap V, f(x) \leq g(x)$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Démonstration. Supposons que a soit fini. Les autres cas sont similaires.

Notons $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $l' = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Il s'agit de montrer que $l \leq l'$ ou encore que $l - l' \leq 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $l - l' > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{l - l'}{3} > 0$. Par hypothèse, il existe $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$|x - a| \leq \eta_2 \implies |g(x) - l'| \leq \varepsilon$$

Enfin, par définition du voisinage V , il existe $\eta_3 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in I \cap]a - \eta_3; a + \eta_3[, f(x) \leq g(x)$$

Posons alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, on a alors :

$$0 < l - l' = \underbrace{l - f(x)}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{f(x) - g(x)}_{\leq 0} + \underbrace{g(x) - l'}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon = 2 \frac{l - l'}{3}$$

ce qui est absurde. □

Théorème 15.1.24 – Théorème d'encadrement

Soit a un point de I ou une borne de I . Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in I \cap V, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

On suppose également que f et h admettent une même limite finie l en a . Alors g admet aussi l pour limite en a .

Démonstration. Supposons que a soit fini. Les autres cas sont similaires.

Notons $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par hypothèse, il existe $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$|x - a| \leq \eta_2 \implies |h(x) - l| \leq \varepsilon$$

Enfin, par définition du voisinage V , il existe $\eta_3 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in I \cap]a - \eta_3; a + \eta_3[, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Posons alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ (η est strictement positif car η_1, η_2 et η_3 le sont). Pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, on a alors :

$$-\varepsilon \leq f(x) - l \leq g(x) - l \leq h(x) - l \leq \varepsilon$$

donc $|g(x) - l| \leq \varepsilon$: g admet bien l pour limite en a . □

Exercice 15.1.25

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$$

On retrouve aussi les théorèmes de divergence par comparaison.

Théorème 15.1.26

Soit a un point de I ou une extrémité de I . On suppose qu'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in I \cap V, f(x) \leq g(x)$$

Alors :

- Si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.
- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

Théorème 15.1.27 – Limite monotone (fonction croissante)

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$.

Soit $f \in \mathcal{F}(]a; b[)$ une fonction croissante.

Alors f admet une limite en b^- et en a^+ . De plus :

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \begin{cases} \sup_{x \in]a; b[} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} \inf_{x \in]a; b[} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Traitons le cas de la limite en b_- où $b = +\infty$. Les autres cas sont similaires.

- Supposons que f ne soit pas majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$. Puisque f n'est pas majorée, il existe $A \in]a; b[$ tel que

$f(A) \geq M$. Pour tout $x \in]a; b[$ avec $x \geq A$, on a alors par croissance de f :

$$f(x) \geq f(A) \geq M$$

On a donc bien montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

— Supposons que f soit majorée. L'ensemble $\{f(x), x \in]a; b[\}$ est alors non vide et majoré : il admet une borne supérieure finie, notée $l = \sup_{x \in]a; b[} f(x)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $l - \varepsilon$ n'est donc pas un majorant de f , ainsi il existe $A \in]a; b[$ tel que $f(A) > l - \varepsilon$. Pour tout $x \in]a; b[$ avec $x \geq A$, on a alors

$$l - \varepsilon < f(A) \leq f(x) \leq l$$

donc

$$-\varepsilon \leq f(x) - l \leq 0 \leq \varepsilon$$

et $|f(x) - l| \leq \varepsilon$. On a donc bien montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

□

Remarque 15.1.28

On reprend les notations du théorème précédent (en particulier, f est croissante).

On a ici noté $\sup_{x \in]a; b[} f(x) = \sup(f(]a; b[)) = \sup\{f(x), x \in]a; b[\}$.

Si on prend la convention (qui est au programme !) que $\sup(A) = +\infty$ si A est une partie non vide et non majorée de \mathbb{R} , alors on peut écrire

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \sup_{]a; b[} f(x)$$

dans tous les cas.

De même, on peut écrire

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{]a; b[} f(x)$$

avec la convention que $\inf_{]a; b[} f(x) = -\infty$ si f n'est pas minorée.

Exercice 15.1.29

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$.

On a un résultat similaire pour les fonctions décroissantes.

Théorème 15.1.30 – Limite monotone (fonction décroissante)

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$.

Soit $f \in \mathcal{F}(]a; b[)$ une fonction décroissante.

Alors f admet une limite en b^- et en a^+ . De plus :

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \begin{cases} \inf_{x \in]a; b[} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} \sup_{x \in]a; b[} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

15.2 Continuité d'une fonction

15.2.1 Continuité en un point

Définition 15.2.1 – Fonction continue en un point

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- On dit que f est *continue* en a lorsque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.
- On dit que f est *continue à droite* en a lorsque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$.
- On dit que f est *continue à gauche* en a lorsque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a)$.

Les opérations sur les limites donnent directement le résultat suivant :

Propriété 15.2.2

- Soit $a \in I$. La somme, le produit, le quotient (s'il est bien défini) de deux fonctions définies sur I à valeurs dans \mathbb{R} et continues en a sont encore continues en a .
- Soit J un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $b \in J$ et $g \in \mathcal{F}(J, I)$ continue en b et telle que $g(b) = a$.
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue en a .
Alors $f \circ g$ est continue en b .

La caractérisation séquentielle de la limite donne directement :

Théorème 15.2.3 – Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en a .
2. Pour toute suite (u_n) d'éléments de I admettant a pour limite, on a $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

Exercice 15.2.4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est un rationnel} \\ 2 - x & \text{sinon} \end{cases}$$

f est-elle continue en 0 ? En 1 ?

Définition 15.2.5 – Fonction prolongeable par continuité

Soit a un point de I ou une extrémité **finie** de I et soit $f \in \mathcal{F}(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$.

Si f admet une limite finie l en a , on dit que f est *prolongeable par continuité* en a .

La fonction

$$\begin{aligned} \tilde{f} : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

est alors continue en a et est appelée *prolongement par continuité de f en a* .

Exercice 15.2.6

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

15.2.2 Continuité sur un intervalle

Définition 15.2.7 – Continuité d'une fonction sur un intervalle

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *continue sur I* si f est continue en chaque point de I .

Exemple 15.2.8

Les fonctions polynomiales, racine carrée, exponentielle, logarithme, puissances, circulaires, circulaires réciproques et hyperboliques sont continues sur leurs domaines de définition.

À nouveau, on a directement :

Propriété 15.2.9

- La somme, le produit, le quotient (s'il est bien défini) de deux fonctions définies sur I à valeurs dans \mathbb{R} et continues sur I sont encore continues sur I .
- Soit J un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $b \in J$ et $g \in \mathcal{F}(J, I)$ continue sur J . Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue sur I . Alors $f \circ g$ est continue sur J .

Exercice 15.2.10

Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ est continue sur son domaine de définition.

15.2.3 Théorèmes sur la continuité

15.2.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 15.2.11 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue.
Si $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$.

a. Cette hypothèse signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

■ *Démonstration.* On procède par la méthode de dichotomie. On construit trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) de la façon sui-

vante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = a \\ b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} c_n = \frac{a_n + b_n}{2} \\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) \leq 0 \\ c_n & \text{sinon} \end{cases} \\ b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) \leq 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Une récurrence immédiate montre que les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) sont bien définies et à valeurs dans I , car ce dernier est un intervalle.

On va montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Montrons alors, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a) \text{ et } f(a_n)f(b_n) \leq 0$$

— Pour $n = 0$, c'est évident.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a)$ et $f(a_n)f(b_n) \leq 0$.

— Supposons que $f(a_n)f(c_n) \leq 0$. Alors :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{b - a}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} (b - a)$$

$$\text{et } f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(a_n)f(c_n) \leq 0.$$

— Sinon, $f(a_n)f(c_n) > 0$. On a alors :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2^{n+1}} (b - a)$$

De plus, on a : $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(c_n)f(b_n) \leq 0$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $f(c_n)f(b_n) > 0$ puis

$$0 < f(a_n)f(c_n) \times f(c_n)f(b_n) = \underbrace{f(a_n)f(b_n)}_{\leq 0} \underbrace{f(c_n)^2}_{\geq 0} \leq 0$$

ce qui est absurde.

Dans les deux cas, on a bien le résultat voulu, ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a) \text{ et } f(a_n)f(b_n) \leq 0$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b_n - a_n \geq 0$ et de plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$$

Reste à montrer que l'une des deux suites (a_n) et (b_n) est croissante et l'autre décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, alors :

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_n = 0 \geq 0$$

$$b_{n+1} - b_n = c_n - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$$

— Sinon :

$$a_{n+1} - a_n = c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geq 0$$

$$b_{n+1} - b_n = b_n - b_n = 0$$

La suite (a_n) est donc croissante, et (b_n) est décroissante. Puisque $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a bien montré que ces deux suites sont adjacentes. Elles convergent vers un réel c . De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a = a_0 \leq a_n \text{ et } b_n \leq b_0 = b$$

donc

$$a \leq c \leq b$$

par passage à la limite. f est donc continue en c .

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(a_n)f(b_n) \leq 0$. En passant à la limite, et grâce à la continuité de f en c , on a donc $f(c)^2 \leq 0$ donc $f(c) = 0$. \square

On en déduit directement le théorème suivant :

Théorème 15.2.12 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ et $f(b)$.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - y$. En effet, φ est continue sur $[a; b]$ et $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont de signes contraires puisque y est entre a et b . Par exemple, si $f(a) \leq y \leq f(b)$, alors $\varphi(a) = f(a) - y \leq 0$ et $\varphi(b) = f(b) - y \geq 0$.

Le théorème précédent montre donc qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $\varphi(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = y$. \square

Remarque 15.2.13

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $g \in \mathcal{F}([a; b])$ continue. Soit $y \in \mathbb{R}$ entre $g(a)$ et $g(b)$ et posons $f : x \mapsto g(x) - y$.

La technique de dichotomie permet d'approcher numériquement une solution pour l'équation $g(x) = y$, c'est-à-dire $f(x) = 0$, le tout avec une précision voulue. En effet, en reprenant les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) , on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = 0$ admet toujours une solution sur $[a_n; b_n]$, et on sait contrôler l'écart entre a_n et b_n puisque $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b - a)$.

La recherche d'une telle solution peut donc être programmée ainsi :

```

1 def dichotomie(f, a, b, precision):
2     """
3     f est une fonction continue sur [a, b] telle que f(a)f(b) <= 0
4     """
5     while (b - a) > precision:
6         c = (a + b) / 2
7         if f(a)*f(c) <= 0:
8             b = c
9         else:
10            a = c
11    return (a + b) / 2

```

Puisque la stricte monotonie implique l'injectivité, on obtient directement le résultat suivant :

Corollaire 15.2.14

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue **et strictement monotone**.
 Pour tout $y \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$.

Le résultat qui suit est une conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 15.2.15

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. Notons $J = f(I)$. Soit $y_1, y_2 \in J$ avec $y_1 < y_2$. Il s'agit de montrer que $[y_1; y_2] \subset J$.
 Par définition, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. x_1 et x_2 sont distincts puisque $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$.
 Notons $a = \min(x_1, x_2)$ et $b = \max(x_1, x_2)$. On a donc $a < b$, et puisque f est continue sur I , elle l'est aussi sur $[a; b]$.
 Soit $y \in [y_1; y_2]$: y est donc entre $f(a)$ et $f(b)$. Il s'agit donc de montrer que $y \in J = f(I)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a; b] \subset I$ tel que $y = f(c)$. Puisque $c \in I$, on a donc bien $y \in f(I)$.
 On a bien montré que $y \in [y_1; y_2] \subset f(I)$, et $f(I)$ est un intervalle. \square

Attention toutefois, dans les conditions du théorème précédent, I et $f(I)$ sont des intervalles mais peuvent être de natures différentes.

Exercice 15.2.16

Que vaut $\sin\left(\left]-\pi; \pi\right]\right)$?

Que vaut $\tan\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$?

Corollaire 15.2.17 – Théorème de la bijection

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue strictement monotone. Notons $J = f(I)$. Alors :

- J est un intervalle.
- f est une bijection de I sur J .
- $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue strictement monotone sur J , de même sens de variation que f .

Démonstration non exigible. Quitte à considérer $-f$, on supposera que f est strictement croissante sur I .
 On a déjà montré que J est un intervalle. De plus, par définition de $J = f(I)$, f est surjective de I sur J (tout élément de $f(I)$ est l'image par f d'un élément de I). Enfin, f est strictement monotone donc injective. f est donc bien une bijection de I sur J .

Montrons que f^{-1} est strictement croissante. Soit $(y_1, y_2) \in J^2$. Puisque f est croissante, on a l'implication :

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \implies f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \implies y_1 \geq y_2$$

et par contraposée :

$$y_1 < y_2 \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

donc f^{-1} est strictement croissante sur J .

Il reste le plus délicat : montrer que f^{-1} est continue sur J .

Soit $c \in J$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On suppose que $f^{-1}(c)$ n'est pas une extrémité de I : il existe donc $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[f^{-1}(c) - \varepsilon'; f^{-1}(c) + \varepsilon'] \subset I$. Quitte à considérer le minimum entre ε' et ε , on peut supposer que $\varepsilon' \leq \varepsilon$.

On peut alors appliquer f et poser :

$$c_2 = f(f^{-1}(c) - \varepsilon') < f(f^{-1}(c)) = c < f(f^{-1}(c) + \varepsilon') = c_3$$

Remarquons que c_2 et c_3 sont alors des éléments de J : on peut leur appliquer f^{-1} .

Posons alors $\eta = \min(c - c_2, c_3 - c) > 0$. Soit $y \in J$ tel que $|y - c| \leq \eta$. On a alors

$$c_2 = c - (c - c_2) \leq c - \eta \leq y \leq c + \eta \leq c + c_3 - c = c_3$$

donc, par croissance de f^{-1} :

$$f^{-1}(c) - \varepsilon' = f^{-1}(c_2) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(c_3) = f^{-1}(c) + \varepsilon'$$

et donc

$$-\varepsilon \leq -\varepsilon' \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(c) \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$$

On a donc montré que :

$$\forall y \in J, |y - c| \leq \eta \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(c)| \leq \varepsilon$$

donc f^{-1} est continue en c .

Si $f^{-1}(c)$ est une extrémité de I , le raisonnement est le même, en considérant un intervalle de la forme $[f^{-1}(c) - \varepsilon'; f^{-1}(c)]$ si $f^{-1}(c)$ est la borne supérieure de I , ou $[f^{-1}(c); f^{-1}(c) + \varepsilon']$ si $f^{-1}(c)$ est la borne inférieure de I . \square

Théorème des bornes atteintes

Théorème 15.2.18 – Théorème des bornes atteintes (admis)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue. Alors f admet un maximum et un minimum sur $[a; b]$.

Remarque 15.2.19

Toute fonction continue sur un segment est donc bornée et atteint ses bornes.

Corollaire 15.2.20

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue. Alors :

$$f([a; b]) = \left[\min_{[a; b]} f(x); \max_{[a; b]} f(x) \right]$$

Démonstration. Le théorème précédent assure l'existence du maximum et du minimum de f sur $[a; b]$. Notons $m = \min_{[a; b]} f(x)$ et $M = \max_{[a; b]} f(x)$.

On raisonne par double inclusion.

— Soit $y \in f([a; b])$. Il existe donc $x \in [a; b]$ tel que $y = f(x)$. On a alors

$$m \leq y = f(x) \leq M$$

donc $y \in [m; M]$.

— Réciproquement, soit $y \in [m; M]$. Par définition d'un maximum et d'un minimum, m et M sont atteints par f sur $[a; b]$, de sorte que m et M sont dans $f([a; b])$. Or, le théorème 15.2.15 assure que $f([a; b])$ est un intervalle, donc $[m; M] \subset f([a; b])$.

Par double inclusion, on a bien

$$f([a; b]) = [m; M]$$

\square

15.3 Extension aux fonctions à valeurs complexes

On s'intéresse maintenant aux fonctions définies sur I , qui est toujours un intervalle de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C} . Sans relation d'ordre, on perd alors les notions de croissance, de décroissance, et tous les résultats utilisant des inégalités : le théorème de la limite monotone, le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème d'encadrement, de divergence par minoration/majoration, des bornes atteintes...

Définition 15.3.1 – Limite finie en un point fini

Soit a un point de I ou une extrémité **finie** de I . Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. Soit $l \in \mathbb{C}$. On dit que f admet l pour limite en a lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Définition 15.3.2 – Limite finie en $\pm\infty$

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. Soit $l \in \mathbb{C}$.

— On suppose que $+\infty$ est une extrémité de I . On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

— On suppose que $-\infty$ est une extrémité de I . On dit que f admet l pour limite en $-\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Remarque 15.3.3

Ces définitions sont donc les mêmes que dans le cas réel, à la différence que l'on parle de module plutôt que de valeur absolue.

L'unicité de la limite reste valide, ce qui permet de reprendre les notations $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

La caractérisation séquentielle de la limite reste valide :

Théorème 15.3.4 – Caractérisation séquentielle de la limite

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soit $l \in \mathbb{C}$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f admet l pour limite en a .
2. Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I admettant a pour limite, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$.

Les opérations sur les limites (somme, produit, quotient, composées) restent alors valides.

Propriété 15.3.5

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soit $l \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. Alors :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \iff \overline{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \bar{l}$$

■ *Démonstration.* Direct d'après la définition (et similaire à la démonstration faite pour les suites). □

Propriété 15.3.6 – Caractérisation à partir des parties réelles et imaginaires

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soit $l \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. Alors :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(l) \\ \operatorname{Im}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(l) \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, alors pour $x \in I$:

$$\operatorname{Re}(f(x)) = \frac{f(x) + \overline{f(x)}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{l + \bar{l}}{2} = \operatorname{Re}(l)$$

et de même :

$$\operatorname{Im}(f(x)) = \frac{f(x) - \overline{f(x)}}{2i} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{l - \bar{l}}{2i} = \operatorname{Im}(l)$$

Réciproquement, si $\begin{cases} \operatorname{Re}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(l) \\ \operatorname{Im}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(l) \end{cases}$, alors

$$f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + i\operatorname{Im}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(l) + i\operatorname{Im}(l) = l$$

□

Propriété 15.3.7

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soit $l \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$. Alors f est bornée au voisinage de a , c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x)| \leq M$$

Démonstration. On traite le cas où a est fini.

Posons $\varepsilon = 1 > 0$. Puisque f tend vers l en a , il existe $\eta \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x - a| \leq \eta$, on a

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon = 1$$

donc

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| \leq \underbrace{1 + |l|}_{\text{constant}}$$

et f est bornée au voisinage de a .

□

Définition 15.3.8 – Continuité d'une fonction à valeurs complexes

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. On dit que f est *continue en a* si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

On dit que f est continue sur I si f est continue en chaque point de I .

La propriété 15.3.6 donne directement :

Propriété 15.3.9

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. Alors f est continue en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

Exercice 15.3.10

1. Justifier que la fonction $f : x \mapsto e^{ix}$, définie sur $[0; \pi]$, est continue.
2. Que vaut $f(0)$? $f(\pi)$? Existe-t-il $x \in [0; \pi]$ tel que $f(x) = 0$?

15.4 Exercices**Exercice 15.4.1**

Montrer que les fonctions suivantes sont des bijections continues entre deux ensembles à déterminer.

1. $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;
2. $f : x \mapsto \ln(-x) + x^2$.

Exercice 15.4.2

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes. Étudier alors leur prolongement par continuité.

- | | |
|--|--|
| 1. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$ | 5. $f : x \mapsto \frac{x}{ x }$ |
| 2. $f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$ | 6. $f : x \mapsto \frac{x^2}{e^x - 1}$ |
| 3. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ | 7. $f : x \mapsto \frac{x^2}{e^{\lfloor x \rfloor} - 1}$ |
| 4. $f : x \mapsto \frac{1}{ x }$ | |

Correction. 1. f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \\
 &= \frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \\
 &= \frac{1}{1-x} \left(1 - \frac{3}{1+x+x^2} \right) \\
 &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1+x+x^2-3}{1+x+x^2} \\
 &= \frac{x+x^2-2}{(1-x)(1+x+x^2)} \\
 &= \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\
 &= \frac{-(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\
 &= \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{-3}{3} = -1
 \end{aligned}$$

donc f admet un prolongement par continuité en 1 et celui-ci est

$$\begin{aligned}
 \tilde{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Autre méthode, un peu plus lourde mais aussi moins astucieuse : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Posons $h = x - 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{-1}{h} - \frac{3}{1 - (h+1)^3} \\
 &= \frac{-1}{h} - \frac{3}{1 - (h^3 + 3h^2 + 3h + 1)} \\
 &= \frac{-1}{h} - \frac{3}{-h^3 - 3h^2 - 3h} \\
 &= \frac{-1}{h} + \frac{3}{h^3 + 3h^2 + 3h} \\
 &= \frac{1}{h} \left(-1 + \frac{3}{3h^2 + 3h + 3} \right) \\
 &= \frac{1}{h} \times \frac{-h^2 - 3h - 3 + 3}{3h^2 + 3h + 3} \\
 &= \frac{1}{h} \times \frac{-h^2 - 3h}{3h^2 + 3h + 3} \\
 &= \frac{-h - 3}{3h^2 + 3h + 3} \\
 &= \frac{-(x-1) - 3}{3(x-1)^2 + 3(x-1) + 3} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{-3}{3} = -1
 \end{aligned}$$

2. f est définie sur $\mathcal{D} =]-1; +\infty[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{(x+1)(x-3)}{\sqrt{x+1}} \\
 &= \sqrt{x+1}(x-3) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}]{} 0
 \end{aligned}$$

donc f admet un prolongement par continuité en -1 et celui-ci est

$$\begin{aligned}
 \tilde{f} : [-1; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est bien défini si et seulement si $x^2 - 1 \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$. Ce domaine étant la réunion de deux intervalles fermés, il n'y a rien à prolonger.
4. f est définie sur \mathbb{R}^* . On a $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
5. f est définie sur \mathbb{R}^* . On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{-x} = -1$ donc f n'admet pas de limite en 0 et n'est pas prolongeable par continuité en 0.
6. f est définie sur \mathbb{R}^* . \exp est dérivable en 0, ainsi (en reconnaissant un taux d'accroissement) pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp'(0) = 1$$

On a donc

$$f(x) = \frac{x}{\frac{e^x - 1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{1} = 0$$

et f est prolongeable par continuité en 0.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est bien défini si et seulement si $e^{\lfloor x \rfloor} - 1 \neq 0$. Or :

$$e^{\lfloor x \rfloor} - 1 = 0 \iff \lfloor x \rfloor = 0 \iff x \in [0; 1[$$

f est donc définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$.

Soit $x \in]-\infty; 0[$. Alors

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{-1} - 1} \xrightarrow[x < 0]{x \rightarrow 0} 0$$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$ et f est prolongeable par continuité en 0.

Soit $x \in [1; 2[$, alors

$$f(x) = \frac{x^2}{e - 1} \xrightarrow[x > 1]{x \rightarrow 0} \frac{1}{e - 1}$$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 1}} f(x) = \frac{1}{e - 1}$ et f admet un prolongement par continuité en 1.

Exercice 15.4.3

On considère, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation

$$x^\lambda + \lambda x - 1 = 0$$

1. Démontrer que cette équation a une unique solution sur \mathbb{R}^+ , que l'on notera x_λ .
2. Montrer que $x_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{} 0$.
3. Montrer que $\lambda x_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{} 1$ (on pourra calculer $x^\lambda + \lambda x - 1$ avec $x = \frac{1}{\lambda + 1}$).

Exercice 15.4.4

Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

Correction. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$ une fonction polynomiale de degré impair : n est donc un entier naturel, et $(a_k)_{k \in \llbracket 0; 2n+1 \rrbracket}$ est une famille de réels avec $a_{2n+1} \neq 0$.
 f est alors continue. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = x^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^{k-(2n+1)} = x^{2n+1} \left(\frac{a_0}{x^{2n+1}} + \frac{a_1}{x^{2n}} + \cdots + \frac{a_{2n}}{x} + a_{2n+1} \right)$$

Supposons que $a_{2n+1} > 0$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{x^{2n+1}} + \frac{a_1}{x^{2n}} + \cdots + \frac{a_{2n}}{x} + a_{2n+1} = a_{2n+1}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_0}{x^{2n+1}} + \frac{a_1}{x^{2n}} + \cdots + \frac{a_{2n}}{x} + a_{2n+1} = a_{2n+1}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ($f(\mathbb{R})$ est un intervalle puisque f est continue et \mathbb{R} est un intervalle. De plus, celui-ci n'est ni majoré, ni minoré) et f s'annule bien au moins une fois sur \mathbb{R} .

Si $a_{2n+1} < 0$, le raisonnement est le même mais cette fois $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 15.4.5

1. Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I contenant au moins deux points. Montrer que si $|f|$ est constante sur I , alors f est constante sur I .
2. Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, et $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in I, f(x)^2 = g(x)^2 \neq 0$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 15.4.6

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, et soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Montrer que, si f ne prend que des valeurs entières sur I , alors f est constante.

Exercice 15.4.7

Soit f une fonction continue sur $[a; +\infty[$. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$ alors f est bornée sur $[a; +\infty[$.

Exercice 15.4.8

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a; b]$ et telles que

$$\forall x \in [a; b], 0 < g(x) < f(x).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$$

Exercice 15.4.9

1. Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{12+x}-4}{x-4}$. Étudier son prolongement par continuité en 4.
2. Démontrer que l'application $h : x \mapsto e^{-\sqrt{x}+3} + \frac{1}{x}$ est une bijection de $[1; 5]$ dans un ensemble à préciser.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors f est constante.

Exercice 15.4.10

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ T -périodique, avec $T \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Correction. Supposons que f ne soit pas constante : il existe donc $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_0) \neq f(x_1)$.

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = x_0 + nT \text{ et } v_n = x_1 + nT$$

Puisque $T > 0$, il est clair que (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$.

Une récurrence immédiate prouve que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ sont constantes, respectivement égales à $f(x_0)$ et $f(x_1)$. Les deux suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ convergent donc vers deux limites différentes. On en déduit que f n'admet pas de limite en $+\infty$, ce qui contredit l'énoncé.

Ainsi, si f est T -périodique et admet une limite en $+\infty$, alors f est en réalité constante.

Chapitre 16

Dérivation

16.1	Dérivée d'une fonction	478
16.1.1	Nombre dérivé d'une fonction en un point	478
16.1.2	Développement limité à l'ordre 1	478
16.1.3	Relation entre la dérivabilité en un point et l'existence d'un développement limité à l'ordre 1	479
16.1.4	Dérivée d'une fonction sur un intervalle	481
16.1.5	Opérations sur les fonctions dérivables	482
16.2	Application à l'étude de fonctions	485
16.2.1	Extrema locaux	485
16.2.2	Théorème de Rolle	487
16.2.3	Égalité des accroissement finis	487
16.2.4	Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes	488
16.2.5	Lien entre dérivée et sens de variation	490
16.2.6	Théorème de la limite de la dérivée	493
16.3	Dérivées successives	494
16.4	Convexité	498
16.5	Extension au cas complexe	500
16.6	Exercices	501

Dans tout ce chapitre, on considère un intervalle réel I contenant au moins deux points.

16.1 Dérivée d'une fonction

16.1.1 Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition 16.1.1 – Nombre dérivée d'une fonction en un point

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On appelle *taux d'accroissement de f en a* la fonction

$$\begin{aligned} \tau_a : I \setminus \{a\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

On dit que f est *dérivable en a* si la taux d'accroissement de f en a admet une limite **finie** en a . Dans ce cas, on appelle *nombre dérivé de f en a* et on note $f'(a)$ cette limite :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque 16.1.2

En posant $x = a + h$ (et donc $h = x - a$), on obtient que f est dérivable en a si et seulement si la fonction

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(définie au voisinage de 0, celui-ci étant exclu) admet une limite finie en 0. $f'(a)$ vaut alors cette limite.

Exercice 16.1.3

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque 16.1.4

On note $m(t)$ la position d'un mobile à l'instant t sur un axe gradué dans un mouvement rectiligne. Alors, sous réserve que m soit dérivable, $m'(t)$ est la vitesse instantanée de ce mobile à l'instant t .

16.1.2 Développement limité à l'ordre 1

Introduisons la notion de *développement limité à l'ordre 1*.

Définition 16.1.5 – Développement limité à l'ordre 1

Soit a un point de I ou une extrémité de I . Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathcal{D}_f = I$ ou sur $\mathcal{D}_f = I \setminus \{a\}$.

On dit que f admet un *développement limité à l'ordre 1 en a* s'il existe deux réels a_0 et a_1 ainsi qu'une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que :

- $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$
- Pour tout h au voisinage de 0 tel que $a + h \in I$:

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + h\varepsilon(h)$$

Remarque 16.1.6

En posant $x = a + h$, la dernière égalité devient

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$$

et ce pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ au voisinage de a .

Remarque 16.1.7

En reprenant les notations ci-dessus, lorsque h est « proche de 0 » (c'est-à-dire lorsque « x est proche de a »), alors $h\varepsilon(h)$ est « petit » puisque $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Le développement limité précédent fournit alors une approximation de f au voisinage de a :

$$f(a + h) \simeq a_0 + a_1 h$$

ou bien

$$f(x) \simeq a_0 + a_1(x - a)$$

Il s'agit donc d'approcher la fonction f , au voisinage de a , par une fonction affine (et la notion de tangente n'est pas loin, à supposer que f soit dérivable en a).

Exercice 16.1.8

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto (1 + x)^5$$

admet un développement limité à l'ordre 1 et le déterminer.

16.1.3 Relation entre la dérivabilité en un point et l'existence d'un développement limité à l'ordre 1**Théorème 16.1.9**

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff f \text{ admet un développement limité à l'ordre 1 en } a$$

et dans ce cas, pour h au voisinage de 0 :

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 et de limite nulle en 0.

Remarque 16.1.10

Ce développement limité s'écrit donc aussi, pour x au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$$

On retrouve alors l'équation de la *tangente* à la courbe de f en a :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Démonstration. — Supposons que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Il existe donc $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ et une fonction ε de limite nulle en 0 telle que, pour h au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + h\varepsilon(h)$$

En prenant $h = 0$, on obtient déjà $f(a) = a_0$.

Si $h \neq 0$, on obtient alors

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a) + a_1 h + h\varepsilon(h) - f(a)}{h} = a_1 + \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} a_1$$

Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.

— Supposons que f soit dérivable en a et posons, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$:

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Alors, pour h au voisinage de 0, non nul et tel que $a+h \in I$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) &\iff h \times (\varepsilon(h) + f'(a)) = f(a+h) - f(a) \\ &\iff f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) = f(a+h) \end{aligned}$$

et cette égalité est clairement encore vraie pour $h = 0$.

De plus, f est dérivable en a donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ et ε admet bien 0 pour limite en 0. f admet donc bien un développement limité à l'ordre 1 en a .

□

Exercice 16.1.11

En utilisant leurs dérivées, montrer que les fonction $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ admettent un développement limité à l'ordre 1 en 0.

Déterminer alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)}$$

Corollaire 16.1.12

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration. f étant dérivable en a , il existe une fonction ε de limite nulle en a telle que pour x au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

f est donc continue en a .

□

Dérivée à droite, à gauche

Définition 16.1.13 – Nombre dérivé à droite, à gauche

Soit a un point de I et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- On suppose que $I \cap]a; +\infty[\neq \emptyset$. On dit que f est *dérivable à droite en a* si $f|_{I \cap]a; +\infty[}$ est dérivable en a , ce qui revient à dire que la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à droite en a . Dans ce cas, cette limite est appelée *dérivée à droite de f en a* et est notée $f'_d(a)$.
- On suppose que $I \cap]-\infty; a[\neq \emptyset$. On dit que f est *dérivable à gauche en a* si $f|_{I \cap]-\infty; a[}$ est dérivable en a , ce qui revient à dire que la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à gauche en a . Dans ce cas, cette limite est appelée *dérivée à gauche de f en a* et est notée $f'_g(a)$.

Le chapitre précédent donne directement le résultat suivant :

Propriété 16.1.14

Soit a un point de I et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que $I \cap]a; +\infty[$ et $I \cap]-\infty; a[$ sont non vides. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } a \\ \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

Dans ce cas, $f'(a)$ est égal à cette limite commune.

Exercice 16.1.15

La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en 0 ? Est-elle continue en 0 ?

Exercice 16.1.16

Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

16.1.4 Dérivée d'une fonction sur un intervalle**Définition 16.1.17**

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, la fonction

$$\begin{aligned} f' &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

est appelée *dérivée de f sur I* .

Exercice 16.1.18

Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . L'est-elle sur \mathbb{R}_+ ?

16.1.5 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 16.1.19

Soit $a \in I$.

Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivables en a et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
4. Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$.
5. Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Démonstration. 1. Pour $h \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} &= \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

2. Pour $h \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda f)(a+h) - (\lambda f)(a)}{h} &= \frac{\lambda f(a+h) - \lambda f(a)}{h} \\ &= \lambda \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \lambda f'(a) \end{aligned}$$

3. Pour $h \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} &= \frac{(f(a+h) - f(a) + f(a))g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a+h) + f(a) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \end{aligned}$$

puisque g et f sont dérivables (et continues) en a .

4. Pour $h \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} \\ &= -\frac{1}{g(a)g(a+h)} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{-g'(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

puisque g est continue en a .

5. On utilise les deux points précédents.

□

Du résultat précédent, on déduit immédiatement :

Corollaire 16.1.20

Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivables sur I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
2. λf est dérivable sur I et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'$.
3. fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
4. Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
5. Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Propriété 16.1.21 – Dérivation et composée

Soit J un intervalle de \mathbb{R} .

Soit $b \in J$ et $a \in I$

Soit $f \in \mathcal{F}(I, J)$ et $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$.

On suppose que :

- $f(a) = b$
- f est dérivable en a
- g est dérivable en b

Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$$

Démonstration. Nous allons utiliser les développements limités.

Puisque g est dérivable en b , il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et une fonction ε définie sur $[-r; r]$ de limite nulle en 0 telle que pour tout $y \in J$ tel que $|y - b| \leq r$:

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y - b) + (y - b)\varepsilon(y - b) \quad (*)$$

Or $f(a) = b$ et f est continue en a : il existe donc $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq r$$

Pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, on peut appliquer l'égalité (*) à $y = f(x)$ et on obtient :

$$g(f(x)) = g(b) + g'(b)(f(x) - b) + (f(x) - b)\varepsilon(f(x) - b)$$

Pour $x \neq a$, on peut passer au taux d'accroissement, en se rappelant que $f(a) = b$:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} &= \frac{g(b) + g'(b)(f(x) - b) + (f(x) - b)\varepsilon(f(x) - b) - g(b)}{x - a} \\ &= g'(b) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \varepsilon(f(x) - b) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a} g'(b) f'(a) = g'(f(a)) f'(a) \end{aligned}$$

En effet, f est dérivable en a donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$. De plus, f est continue en a donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - b = f(a) - b = 0$ et puisque $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, on a bien $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(f(x) - b) = 0$.

On a donc bien montré que $g \circ f$ est dérivable en a et que

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$$

□

On en déduit immédiatement :

Corollaire 16.1.22

Soit J un intervalle de \mathbb{R} .

Soit $f \in \mathcal{F}(I, J)$ dérivable sur I et $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ dérivable sur J . Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Propriété 16.1.23 – Dérivée de la réciproque

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue strictement monotone sur I . f est donc une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Soit $b \in J$. On suppose que f est dérivable en a .

Alors f^{-1} est dérivable en b et si seulement si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$ et dans ce cas :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Remarque 16.1.24

- Le théorème de la bijection assure que f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
- On a noté $b = f(a)$ donc $a = f^{-1}(b)$.

Démonstration. — Supposons que f^{-1} soit dérivable en $b = f(a)$. Par composition, la fonction $f^{-1} \circ f$ est donc dérivable en a et

$$(f^{-1} \circ f)'(a) = f'(a) (f^{-1})'(f(a))$$

Or, pour tout $x \in I$, on a $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ donc $(f^{-1} \circ f)'(x) = 1$. On en déduit que $f'(a) (f^{-1})'(f(a)) = 1$ et en particulier que $f'(a) \neq 0$.

Commentaire

En divisant par $f'(a)$, on obtient la formule de l'énoncé :

$$(f^{-1})'(b) = (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Cela peut constituer un bon moyen mnémotechnique pour retrouver cette formule.

- Réciproquement, supposons que $f'(a) \neq 0$. Soit $y \in J$ avec $y \neq b$. Puisque f^{-1} est injective, on a $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ et :

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} &= \frac{1}{\frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} \\ &= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} \end{aligned}$$

Or :

- f est dérivable en $a = f^{-1}(b)$ donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(f^{-1}(b))}{x - f^{-1}(b)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

— D'après le théorème de la bijection, f^{-1} est continue sur J donc en b , avec $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$
 Par composition de limites, on a donc

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = f'(a)$$

et puisque $f'(a) \neq 0$:

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

ce qui prouve que f^{-1} est dérivable en b et donne bien la formule voulue. □

16.2 Application à l'étude de fonctions

16.2.1 Extrema locaux

Définition 16.2.1

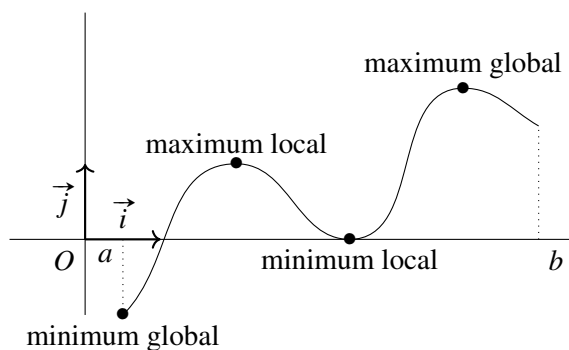
Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- On dit que f admet un *minimum global* en a lorsque pour tout $x \in I$: $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un *maximum global* en a lorsque pour tout $x \in I$: $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un *minimum local* en a lorsque pour $x \in I$ **au voisinage de a** : $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un *maximum local* en a lorsque pour $x \in I$ **au voisinage de a** : $f(x) \leq f(a)$.

Remarque 16.2.2

Un extremum (minimum ou maximum) global est donc aussi local.

Voici un exemple de fonction définie sur un intervalle $[a; b]$ admettant des extrema locaux et globaux.



On remarquera que, mis à part au point d'abscisse a , la courbe admet une tangente horizontale en chaque extremum local. Cela nous amène à la notion de point critique.

Définition 16.2.3 – Point critique

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable en a .

On dit que a est un *point critique* de f si $f'(a) = 0$.

Propriété 16.2.4 – Condition nécessaire pour un extremum local

Soit $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I . Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable en a .
Si f admet en a un extremum local, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Supposons que f présente en a un maximum local (la preuve est similaire dans le cas d'un minimum local). Il existe donc $\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [a - \eta_0; a + \eta_0], f(x) \leq f(a)$$

Puisque a n'est pas une extrémité de I , il existe $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[a - \eta_1; a + \eta_1] \subset I$.
Posons alors $\eta = \min(\eta_0, \eta_1) > 0$. On a donc

$$\emptyset \neq [a - \eta; a + \eta] \subset [a - \eta_1; a + \eta_1] \subset I$$

et

$$\forall x \in [a - \eta; a + \eta], f(x) \leq f(a)$$

— Soit $x \in [a - \eta; a[$. On a $x < a$ et, puisque $x \in [a - \eta_0; a + \eta_0]$, on a également $f(x) \leq f(a)$. Ainsi :

$$\forall x \in I \cap [a - \eta; a[, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et par passage à la limite, f étant dérivable en a :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

— De la même façon, pour tout $x \in]a; a + \eta]$, on a $x > a$ et $f(x) \leq f(a)$ donc

$$\forall x \in]a; a + \eta], \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

et par passage à la limite :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

Finalement, $f'(a)$ est négatif et positif : il est bien égal à 0. □

Remarque 16.2.5 : Attention !

- Il est primordial que a ne soit pas une extrémité de I !
- Ce théorème donne une condition nécessaire pour qu'un point situé **à l'intérieur de I** donne un extremum **local** (et non global). Rien ne dit que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

Exercice 16.2.6

Soit $f : x \mapsto x^3$, définie sur \mathbb{R} . Déterminer ses points critiques. Admet-elle un extremum local en ce point critique ?

Exercice 16.2.7

Soit $f : x \mapsto x^2$, définie sur $[0; 1]$. Montrer que f admet un maximum en 1. 1 est-il un point critique pour f ?

16.2.2 Théorème de Rolle

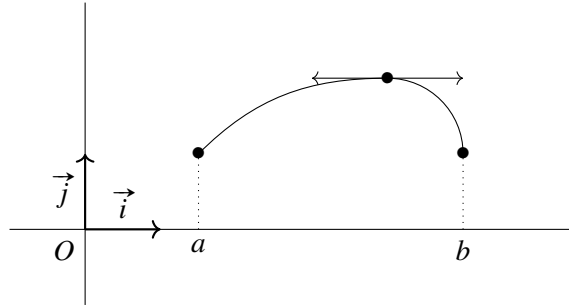
Théorème 16.2.8

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que :

- f est continue sur $[a; b]$.
- f est dérivable sur $]a; b[$.
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Autrement dit, il existe un point situé à l'intérieur de $[a; b]$ en lequel la courbe de f admet une tangente horizontale.



Démonstration. f est continue sur le segment $[a; b]$: elle y est donc bornée et atteint ses bornes.

Notons $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$.

Deux cas peuvent se présenter :

- Si $m = M$, alors pour tout $x \in [a; b]$:

$$m \leq f(x) \leq M = m$$

donc $f(x) = m = M$. f est donc constante sur $[a; b]$ et pour tout $c \in]a; b[$, on a $f'(c) = 0$.

- Supposons que $m \neq M$. Alors $f(a) = f(b) \neq m$ ou $f(a) = f(b) \neq M$. Cela veut dire qu'au moins l'un des deux extrema m et M est atteint par f ailleurs qu'en une extrémité de $[a; b]$. Il existe donc $c \in]a; b[$ tel que f admet un extremum global (et donc local) en c . La propriété 16.2.4 assure alors que $f'(c) = 0$ puisque c n'est pas une extrémité de $[a; b]$. □

16.2.3 Égalité des accroissements finis

L'égalité des accroissements finis est un théorème très important, qui est à la base des outils couramment utilisés pour étudier des fonctions. Il repose lui-même sur le théorème de Rolle.

Théorème 16.2.9 – Égalité des accroissements finis

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que :

- f est continue sur $[a; b]$.
- f est dérivable sur $]a; b[$.

Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration. On considère la fonction

$$\begin{aligned} g &: [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \end{aligned}$$

Il est clair que g est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. De plus :

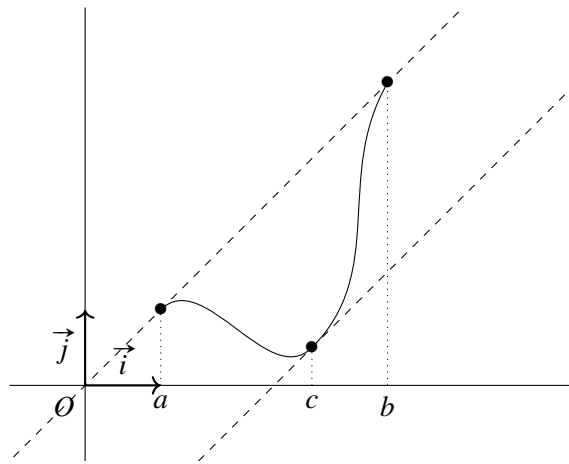
$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) & g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) \\ & & &= f(a) \end{aligned}$$

donc $g(a) = g(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

□

Autrement dit, il existe un point $c \in]a; b[$ en lequel la tangente à la courbe de f est parallèle à la corde de f entre a et b , c'est-à-dire la droite qui relie les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



16.2.4 Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes

Définition 16.2.10 – Fonction k -lipschitzienne

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est k -lipschitzienne lorsque :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Exemple 16.2.11

La fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq 1 \times |x - y|$$

Exercice 16.2.12

Montrer que \cos est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -lipschitzienne sur $[0; 1]$.

Correction. Soit $(x, y) \in [0; 1]^2$. On a :

$$\begin{aligned} |\cos(x) - \cos(y)| &= \left| -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \sin(1) \left| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left| \frac{x-y}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} |x-y| \end{aligned}$$

puisque $\frac{x+y}{2} \in [0; 1]$ donc $\sin(0) \leq \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sin(1) \leq \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ par croissance de \sin .

Propriété 16.2.13

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ k -lipschitzienne avec $k \in \mathbb{R}_+$. Alors f est continue sur I .

Démonstration. Pour tout $a \in I$ et tout $x \in I$:

$$|f(x) - f(a)| \leq k|x - a| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$. □

Théorème 16.2.14 – Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que :

- f est dérivable sur I .
- $|f'|$ est majorée par un réel $k \in \mathbb{R}_+$ sur I .

Alors f est k -lipschitzienne, autrement dit :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in I^2$. Quitte à permuter les rôles de x et y , on peut supposer que $x < y$. f est alors continue sur $[x; y]$ et dérivable sur $]x; y[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe alors $c \in]x; y[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

On a alors

$$|f(x) - f(y)| = |y - x| \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |x - y| |f'(c)| \leq |x - y| \times k$$

donc f est k -lipschitzienne. □

Exercice 16.2.15 – À retenir !

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

1. Montrer que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet exactement une solution sur \mathbb{R}_+ , que l'on notera

α .

On définit une suite u par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

3. Justifier que la suite u est bien définie et à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

4. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

5. Étudier la convergence de la suite u .

Correction. 1. f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}^2} = \frac{-1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

donc

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. f est donc $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.

2. $x \mapsto f(x) - x$ est continue, strictement décroissante (donc injective), vaut 1 en 0 et $-\frac{5}{2}$ en 3. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, couplé à l'injectivité de $x \mapsto f(x) - x$, l'équation $f(x) = x$ admet bien une unique solution α sur \mathbb{R}_+ .

3. \mathbb{R}_+ est une partie stable par f et $u_0 \in \mathbb{R}_+$. La suite u est donc bien définie et à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

puisque f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur \mathbb{R}_+ .

5. Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La suite u est donc convergente vers α .

16.2.5 Lien entre dérivée et sens de variation

Propriété 16.2.16

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable sur I . Alors :

1.

$$(\forall x \in I, f'(x) \geq 0) \iff f \text{ est croissante sur } I$$

2.

$$(\forall x \in I, f'(x) \leq 0) \iff f \text{ est décroissante sur } I$$

3.

$$(\forall x \in I, f'(x) = 0) \iff f \text{ est constante sur } I$$

Démonstration. 1. — Supposons f croissante sur I .

Soit $(x, y) \in I^2$.

Si $x < y$, alors par croissance de f sur I , on a donc $f(x) \leq f(y)$ donc $f(y) - f(x) \geq 0$ de sorte que $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$.

Si $x > y$, alors $f(x) \geq f(y)$ donc $f(y) - f(x) \leq 0$ et, puisque $y - x < 0$, on a encore $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$.

Ainsi, pour tout $(x, y) \in I^2$ avec $x \neq y$, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Soit $x \in I$. Par passage à la limite lorsque y tend vers x , on obtient donc

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

— Supposons que pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \geq 0$. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$. f est donc continue sur $[x; y]$ et dérivable sur $]x; y[$: d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x; y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$$

Ainsi

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$$

puisque $y - x > 0$ et $f'(c) \geq 0$ (car $c \in I$ et f' est positive sur cet intervalle). On a donc $f(y) \geq f(x)$.

On a donc bien montré que f est croissante sur $[a; b]$.

2. Le deuxième point se déduit directement du premier :

$$\begin{aligned} f \text{ est décroissante sur } I &\iff -f \text{ est croissante sur } I \\ &\iff \forall x \in I, (-f)'(x) \geq 0 \\ &\iff \forall x \in I, -f'(x) \geq 0 \\ &\iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0 \end{aligned}$$

3. Une fonction constante étant une fonction à la fois croissante et décroissante, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ est constante sur } I &\iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0 \text{ et } f'(x) \geq 0 \\ &\iff \forall x \in I, f'(x) = 0 \end{aligned}$$

□

Propriété 16.2.17 – Cas de la stricte croissance

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I et pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, f' n'est pas identiquement nulle^a sur $[a; b]$.

a. Autrement dit, pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f'(c) \neq 0$.

Démonstration. — Supposons f strictement croissante. La propriété 16.2.16 montre déjà que f' est positive ou nulle sur I .

Supposons alors l'existence de $(a, b) \in I^2$, avec $a < b$, tel que f' soit identiquement nulle sur $[a; b]$, de sorte que

$$\forall x \in [a; b], f'(x) = 0$$

En particulier, f est constante sur $[a; b]$ donc $f(a) = f(b)$ alors que $a < b$: cela contredit la stricte croissance de f sur I .

Ainsi, pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, f' n'est pas identiquement nulle sur $[a; b]$.

— Réciproquement, supposons que f' est positive ou nulle sur I et que pour tout $(a, b) \in I^2$, f' n'est pas identiquement nulle sur $[a; b]$.

Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.

Puisque f' est positive ou nulle sur I , f est croissante sur I d'après la propriété 16.2.16. On a donc $f(x) \leq f(y)$.

Supposons que $f(x) = f(y)$. Alors, pour tout $t \in [x; y]$, on a par croissance de f :

$$f(x) \leq f(t) \leq f(y) = f(x)$$

donc $f(t) = f(x)$ et f est constante sur $[x; y]$.

En particulier, pour tout $t \in [x; y]$, on a $f'(t) = 0$. f' est donc nulle sur $[x; y]$, ce qui contredit nos hypothèses.

On a donc nécessairement $f(x) < f(y)$ et f est strictement croissante sur I . □

Remarque 16.2.18

En particulier, si f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante. Mais la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple qui suit.

Exercice 16.2.19

Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\cos(x) + x}{2} \end{aligned}$$

est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Correction. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

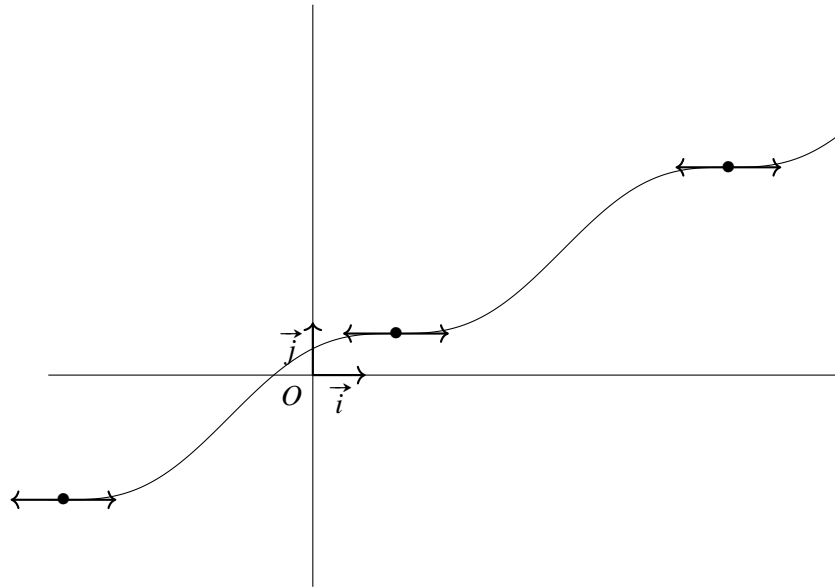
$$f'(x) = \frac{-\sin(x) + 1}{2} \geq 0$$

De plus :

$$f'(x) = 0 \iff \sin(x) = 1 \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

f' est donc à valeurs positives ou nulles, et s'annule une infinité de fois, mais il n'existe aucun intervalle de la forme $[a; b]$ avec $a < b$ sur lequel f' est identiquement nulle.

f est donc bien strictement croissante sur \mathbb{R} .



16.2.6 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 16.2.20 – Théorème de la limite de la dérivée

Soit $a \in I$.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si f' admet une limite l (finie ou non) en a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

En particulier :

- Si l est finie, alors f est dérivable en a , $f'(a) = l$ et f' est continue en a .
- Sinon, f n'est pas dérivable en a et la courbe de f présente une demi-tangente verticale en a .

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Si $x > a$, et puisque f est continue sur $[a; x]$ et dérivable sur $]a; x[$, il existe $c_x \in]a; x[$ tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

Si $x < a$, le même raisonnement mène à l'existence de $c_x \in]x; a[$ tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

Dans les deux cas, il existe $c_x \in I \setminus \{a\}$ tel que

$$|c_x - a| \leq |x - a| \quad (16.1)$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \quad (16.2)$$

En particulier, 16.1 donne $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$, puis d'après 16.2 et par composition de limites :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} f'(c_x) \\ &= \lim_{t \rightarrow a} f'(t) \\ &= l \end{aligned}$$

f est donc dérivable en a si et seulement si l est finie, auquel cas $f'(a) = l$. De plus, puisque $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l = f'(a)$, f' est continue en a . □

Exercice 16.2.21

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \ln(x) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* et est prolongeable par continuité en 0. On note \tilde{f} ce prolongement par continuité.
2. Montrer que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et déterminer $\tilde{f}'(0)$.

16.3 Dérivées successives**Définition 16.3.1 – Dérivées successives (rappel)**

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On note $f^{(0)} = f$.

On définit la notion de dérivées successives par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est n -fois dérivable sur I si :

$$\begin{cases} f \text{ est } n-1 \text{ fois dérivable sur } I \text{ ou } n=1 \\ f^{(n-1)} \text{ est dérivable sur } I \end{cases}$$

On note alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$: c'est la *dérivée n -ième de f sur I* .

Définition 16.3.2 – Fonction de classe \mathcal{C}^n

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^n sur I si f est n fois dérivable sur A et si $f^{(n)}$ est continue sur I .

On dit que f est de classe \mathcal{C}^0 sur I si f est continue sur I .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n sur I .

Définition 16.3.3 – Fonction de classe \mathcal{C}^∞

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n -fois dérivable sur I .

Propriété 16.3.4 – Combinaisons linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— Pour $n = 0$, c'est évident.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel la propriété est vraie. Soient $f, g \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

f et g sont de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I donc f et g sont de classe \mathcal{C}^n sur I . Par hypothèse de récurrence, on a

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

Or f et g sont de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I , donc $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Ainsi, $(\lambda f + \mu g)^{(n)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I . En effet, $\lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ est, par somme, dérivable sur I et sa dérivée est

$$(\lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)})' = \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)}$$

qui est continue.

Ainsi $\lambda f + \mu g$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . De plus :

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)^{(n+1)} &= ((\lambda f + \mu g)^{(n)})' \\ &= (\lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)})' \\ &= \lambda (f^{(n)})' + \mu (g^{(n)})' \\ &= \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. □

Théorème 16.3.5 – Produit - Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. Alors $fg \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et ^a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

^a. On notera la similarité avec la formule du binôme... Mais il ne s'agit pas d'une somme, et les « puissances » n'en sont pas, puisqu'il s'agit de dérivées.

Démonstration. On raisonne par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{P}_n la propriété « Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $fg \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ ».

- C'est évident pour $n = 0$, les deux termes de l'égalité valant alors fg .
- Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel \mathcal{P}_n est vraie. Soient $f, g \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. En particulier, f et g sont de classe \mathcal{C}^n sur I donc, par hypothèse de récurrence, fg est de classe \mathcal{C}^n sur I et

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur I puisque f et g sont de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . Le produit $f^{(k)} g^{(n-k)}$ est donc dérivable sur I , et

$$(f^{(k)} g^{(n-k)})' = (f^{(k)})' g^{(n-k)} + f^{(k)} (g^{(n-k)})' = f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

est continue sur I . Le produit $f^{(k)} g^{(n-k)}$ est donc bien de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Par combinaison linéaire, $(fg)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I donc fg est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . De

plus :

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
 &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
 &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
 \end{aligned}$$

On a utilisé le triangle de Pascal. Finalement, \mathcal{P}_{n+1} est vraie, ce qui achève la récurrence. □

Exemple 16.3.6

Justifier que la fonction $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa dérivée n -ième.

Correction. Comme $\varphi : x \mapsto (x^2 + 1)$ et $\psi : x \mapsto e^x$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , la fonction f l'est aussi. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } k = 0 \\ 2x & \text{si } k = 1 \\ 2 & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{si } k \geq 3 \end{cases} \text{ et } \psi^{(n)} = \psi$$

donc :

$$\begin{aligned}
 f^n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(x) \psi^{(n-k)}(x) \\
 &= \binom{n}{0} (x^2 + 1) e^x + \binom{n}{1} 2x e^x + \binom{n}{2} 2 e^x \\
 &= (x^2 + 1 + 2nx + n(n-1)) e^x
 \end{aligned}$$

Propriété 16.3.7 – Quotient

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ avec g **qui ne s'annule pas sur I** .

Alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\frac{1}{g}$ est encore de classe \mathcal{C}^n sur I . Le produit de deux fonctions de classe \mathcal{C}^n sur I étant encore de classe \mathcal{C}^n sur I , ce sera aussi le cas de $\frac{f}{g}$.

On raisonne de nouveau par récurrence.

- Le cas $n = 0$ est évident : si g est de classe \mathcal{C}^0 (c'est-à-dire continue) sur I et ne s'y annule pas, alors c'est aussi le cas de $\frac{1}{g}$.
- Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Soit $g \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas. En particulier, g est dérivable sur I et ne s'y annule pas donc $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2} = -g' \times \frac{1}{g^2}$$

Or g^2 est de classe \mathcal{C}^n sur I et ne s'y annule pas (puisque c'est le cas pour g). Par hypothèse de récurrence, $\frac{1}{g^2}$ est donc de classe \mathcal{C}^n sur I .

De plus, g' est de classe \mathcal{C}^n sur I puisque g est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . Par produit, on en déduit que $\frac{1}{g}$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I , ce qui achève la récurrence. □

Propriété 16.3.8 – Composition

Soit J un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. □

Propriété 16.3.9 – Réciproque

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ strictement monotone. On note $f^{-1} \in \mathcal{F}(J, I)$ la réciproque de f , où $J = f(I)$.

On suppose que f' ne s'annule pas sur I . Alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J, I)$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. □

Exercice 16.3.10

1. Justifier que sh est une bijection de \mathbb{R} de \mathbb{R} . On notera argsh sa réciproque.
2. Justifier que argsh est de classe \mathcal{C}^∞ et déterminer sa dérivée.

16.4 Convexité

Définition 16.4.1 – Fonction convexe

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *convexe sur I* lorsque :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

En reprenant ces notations, donnons une interprétation graphique de cette notion de convexité d'une fonction. Prenons $(x, y) \in I^2$, et supposons ici que $x < y$.

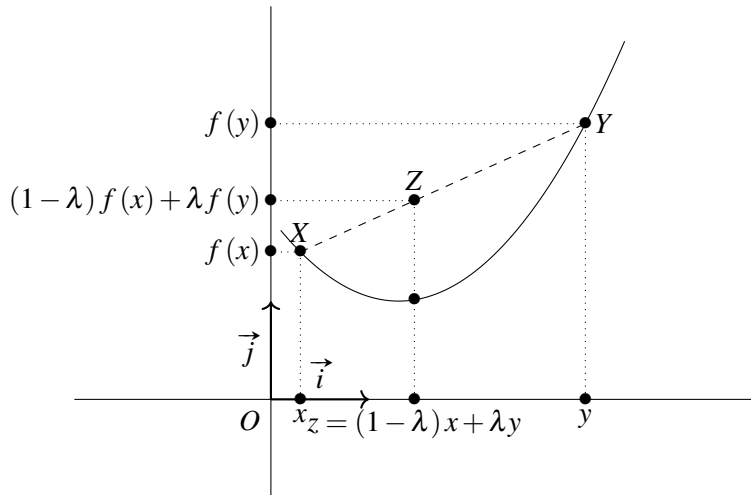
Soit $z \in [x; y]$: il existe alors un unique $\lambda \in [0; 1]$ tel que $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ (une simple résolution d'équation le montre).

Dans un repère orthonormé, les points X, Z et Y de coordonnées respectives $(x, f(x))$, $(z, (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y))$ et $(y, f(y))$ sont alors alignés. En effet, le vecteur \overrightarrow{XZ} a pour coordonnées

$$((1 - \lambda)x + \lambda y - x, (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) - f(x)) = (\lambda(y - x), \lambda(f(y) - f(x)))$$

donc $\overrightarrow{XZ} = \lambda \overrightarrow{XY}$.

Puisque $f(z) = f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$, cela veut dire que le point de coordonnées $(z, f(z))$ est en dessous de Z .



Autrement dit, entre x et y , la courbe de f est en dessous de la corde reliant les points X et Y .

Définition 16.4.2 – Fonction concave

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *concave sur I* lorsque :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Propriété 16.4.3

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Alors f est concave et seulement si $-f$ est convexe.

Démonstration. Par équivalence :

f est concave

$$\iff \forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

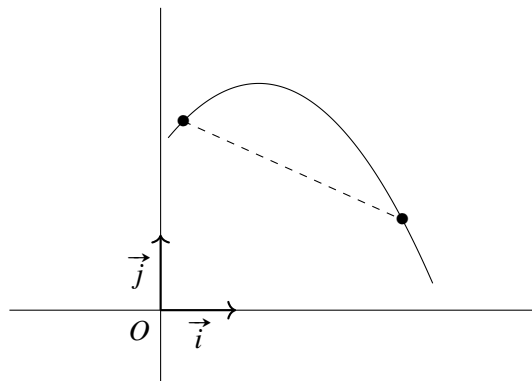
$$\iff \forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], -f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq -((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y))$$

$$\iff \forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], (-f)((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)(-f)(x) + \lambda(-f)(y)$$

$$\iff -f \text{ est convexe}$$

□

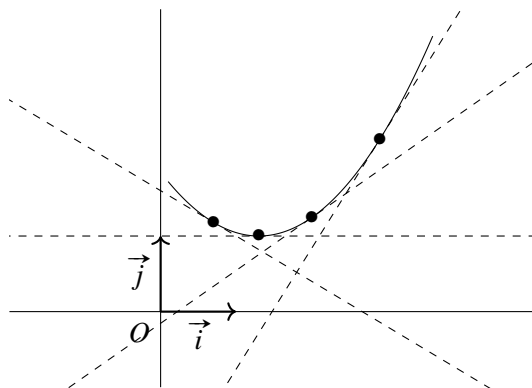
Pour une fonction concave, la courbe est au dessus de ses cordes :



Propriété 16.4.4 – Pour une fonction dérivable (admis)

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable sur I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I .
2. f' est croissante sur I .
3. La courbe de f est au dessus de chacune de ses tangentes.



On a bien sûr un résultat similaire pour les fonctions concaves :

Propriété 16.4.5 – Pour une fonction dérivable (admis)

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable sur I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est concave sur I .
2. f' est décroissante sur I .
3. La courbe de f est en dessous de chacune de ses tangentes.

Exercice 16.4.6

1. Montrer que la fonction \exp est convexe sur \mathbb{R} .
2. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$$

Exercice 16.4.7

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur \mathbb{R}_+ .
2. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Propriété 16.4.8 – Pour une fonction deux fois dérivable

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ deux fois dérivable sur I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I .
2. f' est croissante sur I .
3. f'' est positive ou nulle sur I .

Démonstration. Immédiat puisque f' est croissante si et seulement si f'' est positive. □

De même, pour la concavité :

Propriété 16.4.9 – Pour une fonction deux fois dérivable

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ deux fois dérivable sur I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est concave sur I .
2. f' est décroissante sur I .
3. f'' est négative ou nulle sur I .

16.5 Extension au cas complexe

On considère à présent les fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} contenant au moins deux points, et à valeurs dans \mathbb{C} .

La notion de dérivée reste la même :

Définition 16.5.1

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. On dit que f est dérivable en a si la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite dans \mathbb{C} en a .

Si f est dérivable en tout point de I , on dit que f est *dérivable sur I* .

Propriété 16.5.2

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. Alors f est dérivable sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont, et dans ce cas :

$$f' = \operatorname{Re}(f)' + i\operatorname{Im}(f)'$$

Le lecteur est encouragé à revoir les résultats du chapitre « Généralités sur les fonctions ».

Les résultats sur les opérations algébriques sur les fonctions dérivables (somme, produit (formule de Leibniz), quotient, composée) restent valables dans \mathbb{C} . De plus, la dérivabilité en un point implique encore la continuité.

On définit de la même manière l'ensemble $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ des fonctions de classe \mathcal{C}^n sur I à valeurs dans \mathbb{C} , pour $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Cependant, sans relation d'ordre, on perd les résultats liés à la monotonie.

On perd également le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 16.5.3

Soit $f : x \mapsto e^{ix}$ définie sur $[0; 2\pi]$. f est dérivable, donc continue, sur $[0; 2\pi]$. De plus, $f(0) = f(2\pi) = 1$ mais il n'existe aucun $c \in]0; 2\pi[$ tel que $f'(c) = 0$.

En effet, pour tout $x \in [0; 2\pi]$:

$$|f'(x)| = |ie^{ix}| = 1$$

donc $f'(x) \neq 0$.

L'inégalité des accroissements finis reste toutefois vraie, pour des fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

Théorème 16.5.4 – Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$$

Alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

■ *Démonstration.* Sera justifié dans le chapitre sur l'intégration. □

16.6 Exercices**Exercice 16.6.1**

On considère la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ définie sur \mathbb{R}_+^* .

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. On pose

$$\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = 0$$

Que peut-on en déduire ?

- (b) Tracer la courbe de \tilde{f} .

Exercice 16.6.2

Démontrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, a \leq b \implies \sqrt[3]{1+b} - \sqrt[3]{1+a} \leq \frac{1}{3}(b-a)$$

Exercice 16.6.3

Soit M un réel strictement positif et g une fonction dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, -M \leq g'(x) \leq M \text{ (c'est-à-dire } |g'(x)| \leq M)$$

On pose

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \varepsilon \times g(x) \end{aligned}$$

où ε est un réel strictement positif.

1. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \varepsilon M \leq f'(x) \leq 1 + \varepsilon M.$$

2. A quelle condition sur ε a-t-on $1 - \varepsilon M > 0$?

3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, (1 - \varepsilon M)x \leq f(x) - f(0) \leq (1 + \varepsilon M)x$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, (1 - \varepsilon M)x \geq f(x) - f(0) \geq (1 + \varepsilon M)x$$

4. On suppose que $1 - \varepsilon M > 0$. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire que f est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 16.6.4

1. Justifier que $f : x \mapsto \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 et déterminer celui-ci.

2. Montrer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

3. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - \ln(1+bx)}{x}$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$.

Exercice 16.6.5

1. Montrer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{e^{cx} - e^{dx}}$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $c \neq d$.

Exercice 16.6.6

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur \mathbb{R} . Ces fonctions sont-elles de classe \mathcal{C}_1 ?

$$1. f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

$$2. g : x \mapsto xe^{-|x|}$$

Exercice 16.6.7

Montrer que si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est convexe et si $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est convexe **croissante** alors $g \circ f$ est convexe.

Exercice 16.6.8

1. Justifier que la fonction \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* .

2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ avec $\alpha + \beta = 1$. Montrer :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \ln(\alpha x + \beta y) \geq \alpha \ln(x) + \beta \ln(y)$$

3. En déduire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

4. Montrer :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^{*3}, \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

Exercice 16.6.9

Montrer que la fonction $f : x \mapsto (x+1)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)$ est convexe sur $] -1; 1[$.

Exercice 16.6.10

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x + \sin(2x)}{4} \end{aligned}$$

1. Montrer que f est k -lipschitzienne, où k est un réel de $[0; 1[$ à préciser.

2. Montrer que f admet au moins un point fixe sur \mathbb{R} .

3. Montrer que ce point fixe est unique, en utilisant le fait que f est lipschitzienne. On notera l ce point fixe.

On définit une suite $u = (u_n)$ en posant

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

4. Montrer que u converge vers l .

Correction. 1. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right| \leq \left| \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{1}{2} \cos(2x) \right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

donc f est $\frac{3}{4}$ -lipschitzienne d'après l'inégalité des accroissements finis.

2. $f(0) = 0$ donc 0 est un point fixe de f .

3. Soient $l, l' \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(l) = l$ et $f(l') = l'$. Alors :

$$|l - l'| = |f(l) - f(l')| \leq \frac{3}{4} |l - l'|$$

ce qui n'est possible que si $l - l' = 0$ ou encore $l = l'$.

f admet donc bien un unique point fixe sur \mathbb{R} , et celui-ci est $l = 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq \frac{3}{4} |u_n - l|$$

et une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - l|$$

Puisque $\frac{3}{4} \in]-1; 1[$, on a $\left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on en déduit que u converge vers l .

Exercice 16.6.11

Déterminer la dérivée n -ième de :

1. $x \mapsto \cos(x) e^x$
2. $x \mapsto (x^2 +) e^{-x}$

Chapitre 17

Polynômes

17.1	Notion de polynôme	506
17.1.1	Définition	506
17.1.2	Opérations sur les polynômes	506
17.2	Polynômes de degré plus petit que n	515
17.3	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	516
17.3.1	Diviseur, multiple	516
17.3.2	Division euclidienne	516
17.3.3	Racines d'un polynôme	518
17.4	Dérivation de polynômes	526
17.4.1	Définitions	526
17.4.2	Formule de Taylor polynomiale	529
17.5	Polynômes irréductibles	532
17.5.1	Définition	532
17.5.2	Avec les complexes	533
17.5.3	Avec les réels	534
17.6	Notions sur les fractions rationnelles	536
17.7	Exercices	537
17.8	DM conducteur	539

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

17.1 Notion de polynôme

17.1.1 Définition

Définition 17.1.1 – Polynôme

$\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des *polynômes à coefficients dans \mathbb{K} dont l'indéterminée est notée X* , c'est-à-dire des expressions de la forme

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Si a_0, a_1, \dots, a_n ne sont pas tous nuls, le *degré* du polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est le plus grand entier $d \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $a_d \neq 0$.

a_d est alors appelé le *coefficient dominant* de ce polynôme.

Sinon, P est le *polynôme nul*, et on le note 0. Le degré du polynôme nul est, par convention, $-\infty$.

Un polynôme dont le coefficient dominant est 1 est dit *unitaire*.

Remarque 17.1.2

- Un polynôme est donc une expression, pas une fonction numérique. C'est important : on pourra en pratique remplacer X par un nombre, mais aussi une matrice ou un endomorphisme^a, par exemple.
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$, il est fréquent de noter $P(X)$ à la place de P .
- Si P et Q sont deux polynômes à coefficients dans \mathbb{K} , on peut écrire (quitte à ajouter des termes nuls) P et Q sous la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$.

^a. Une application linéaire d'un espace vectoriel vers lui-même. Nous verrons cela bientôt !

Exemple 17.1.3

Le polynôme

$$P(X) = 1 - 3X + 4X^2$$

est dans $\mathbb{R}[X]$. Son degré est 2 et son coefficient dominant est 4.

17.1.2 Opérations sur les polynômes

Somme et soustraction

Définition 17.1.4 – Somme de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $B = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. La *somme* de A et B est le polynôme noté $A + B$ défini par :

$$A + B = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k$$

Exemple 17.1.5

Posons $A = 1 - 3X + 4X^2$ et $B = 2 - 2X^2 + X^3$. Alors :

$$A + B = (1 - 3X + 4X^2 + 0 \cdot X^3) + (2 + 0 \cdot X - 2X^2 + X^3) = 3 - 3X + 4X^2 + X^3$$

L'addition sur \mathbb{K} étant commutative et associative, on a directement :

Propriété 17.1.6

L'addition est commutative :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], A + B = B + A$$

L'addition est associative :

$$\forall A, B, C \in \mathbb{K}[X], (A + B) + C = A + (B + C)$$

Définition 17.1.7 – Opposé d'un polynôme

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe un unique $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A + B = 0$.

B est appelé le *symétrique* ou l'*opposé* de A , et on note $B = -A$.

Si $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors $-A = \sum_{k=0}^n (-a_k) X^k$.

Démonstration. Notons $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Existence : Il est clair que $\sum_{k=0}^n (-a_k) X^k$ convient, puisque

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=0}^n (-a_k) X^k = \sum_{k=0}^n (a_k - a_k) X^k = 0$$

Unicité : Soient $B_1, B_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A + B_1 = A + B_2 = 0$. En ajoutant B_1 de chaque côté, et puisque l'addition est commutative, on obtient :

$$\underbrace{B_1 + A}_{=0} + B_2 = B_1 + \underbrace{A + B_2}_{=0} \text{ donc } B_1 = B_2$$

□

Définition 17.1.8 – Soustraction de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $B = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. La *soustraction* de A par B et le polynôme noté $A - B$ défini par :

$$A - B = A + (-B)$$

Propriété 17.1.9 – Degré d'une somme

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\deg(A + B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$$

De plus, si $\deg(A) \neq \deg(B)$, alors cette inégalité est une égalité.

Démonstration. Si A est nul, alors $\deg(A + B) = \deg(B)$, $\max(\deg(A), \deg(B)) = \deg(B)$ et il y a égalité. Il en est de même si B est nul.

On note n le degré de A et m le degré de B . Quitte à permuter A et B , on suppose que $n \leq m$.

Notons $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^m b_k X^k$, où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$.

Alors :

$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=0}^m b_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=0}^n b_k X^k + \sum_{k=n+1}^m b_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=n+1}^m b_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^m \alpha_k X^k \end{aligned}$$

avec, pour tout $k \in \llbracket 0; m \rrbracket$, $\alpha_k = \begin{cases} a_k + b_k & \text{si } k \leq n \\ b_k & \text{si } k > n \end{cases}$.

Le degré de $A + B$ est donc bien inférieur ou égal à $m = \max(n, m)$. De plus, si $n < m$, alors $\alpha_m = b_m \neq 0$ et le degré de $A + B$ est alors égal à m . □

Remarque 17.1.10

Si A et B ont le même degré, il n'y a aucune raison que l'inégalité soit une égalité. Par exemple :

$$\deg(X^2 - 2X + 1) = 2, \deg(-X^2 + 3X + 6) = 2$$

mais

$$\deg((X^2 - 2X + 1) + (-X^2 + 3X + 6)) = \deg(X + 7) = 1 < 2$$

Produit d'un polynôme par un scalaire**Définition 17.1.11**

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Le produit de λ par A est le polynôme noté ^a $\lambda \cdot A$ et est défini par :

$$\lambda A = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) X^k$$

^a. Le point est souvent omis, et on note λA au lieu de $\lambda \cdot A$.

Exemple 17.1.12

Par exemple :

$$3 \cdot (1 - X + 2X^2) = 3 - 3X + 6X^2$$

Propriété 17.1.13

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\deg(\lambda A) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda = 0 \\ \deg(A) & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Notons $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Si $\lambda = 0$, alors $\lambda A = \sum_{k=0}^n (0 \times a_k) X^k = 0$.

Si $A = 0$, alors $\lambda A = \sum_{k=0}^n (\lambda \times 0) X^k = 0$ donc le degré de λA est $-\infty$, tout comme A .

Si λ et A sont non nuls, et si n est le degré de A , alors

$$\lambda A = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) X^k$$

et le dernier terme de cette somme est $(\lambda a_n) X^n$, avec $\lambda a_n \neq 0$: le degré de λA est donc $n = \deg(A)$. □

Une récurrence immédiate montre alors que :

Propriété 17.1.14

Toute combinaison linéaire de polynômes est un polynôme. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}[X]$ et pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k \in \mathbb{K}[X]$$

Produit de polynômes

Définition 17.1.15

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $B = \sum_{k=0}^m b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Le produit de A et B est le polynôme noté $A \times B$ ou plus simplement AB et est défini par :

$$AB = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} a_i b_j \right) X^k$$

Exemple 17.1.16

On pose $A = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $B = b_0 + b_1 X$, avec $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1) \in \mathbb{K}^5$.

Alors :

$$AB = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + (a_1 b_1 + a_2 b_0) X^2 + a_2 b_1 X^3$$

Remarque 17.1.17

En pratique, on confond souvent le polynôme constant λ et le scalaire λ . Les deux produits précédents coïncident alors, et cette confusion est sans gravité.

Propriété 17.1.18

Dans $\mathbb{K}[X]$, le produit est commutatif et associatif :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], AB = BA$$

$$\forall A, B, C \in \mathbb{K}[X], (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Démonstration. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $B = \sum_{k=0}^m b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Alors :

$$\begin{aligned}
BA &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k}} b_i a_j \right) X^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq i \leq n \\ i+j=k}} b_j a_i \right) X^k \text{ par renommage} \\
&= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq i \leq n \\ i+j=k}} a_i b_j \right) X^k \\
&= AB
\end{aligned}$$

par commutativité du produit dans \mathbb{K} .

Soit maintenant $C = \sum_{k=0}^p c_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Notons :

$$AB = \sum_{k=0}^{n+m} \alpha_k X^k \text{ et } BC = \sum_{k=0}^{m+p} \beta_k X^k$$

avec :

$$\forall k \in \llbracket 0; n+m \rrbracket, \alpha_k = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} a_i b_j$$

$$\forall k \in \llbracket 0; m+p \rrbracket, \beta_k = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq p \\ i+j=k}} b_i c_j$$

$$\begin{aligned}
(A \times B) \times C &= \left(\sum_{k=0}^{n+m} \alpha_k X^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^p c_k X^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+m+p} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n+m \\ 0 \leq j \leq p \\ i+j=k}} \alpha_i c_j \right) X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+m+p} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n+m \\ 0 \leq j \leq p \\ i+j=k}} \left(\sum_{\substack{0 \leq u \leq n \\ 0 \leq v \leq m \\ u+v=i}} a_u b_v \right) c_j \right) X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+m+p} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n+m \\ 0 \leq j \leq p \\ i+j=k}} \left(\sum_{\substack{0 \leq u \leq n \\ 0 \leq v \leq m \\ u+v=i}} a_u b_v c_j \right) \right) X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+m+p} \left(\sum_{\substack{0 \leq u \leq n \\ 0 \leq v \leq m \\ 0 \leq j \leq p \\ u+v+j=k}} a_u b_v c_j \right) X^k
\end{aligned}$$

La dernière égalité venant d'une sommation par paquets. On montre alors que $A \times (B \times C)$ donne la même expression, d'où l'associativité du produit de polynômes. \square

Propriété 17.1.19 – Le produit est distributif

Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$(A + B)C = AC + BC$$

Démonstration. Soient $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $B = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $C = \sum_{k=0}^m c_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$\begin{aligned}
 AC + BC &= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} a_i c_j \right) X^k + \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} b_i c_j \right) X^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} a_i c_j + \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} b_i c_j \right) X^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} (a_i + b_i) c_j \right) X^k \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k \right) \sum_{k=0}^m c_k X^k \\
 &= (A + B)C
 \end{aligned}$$

□

Exercice 17.1.20

On pose $A = 1 - X + 2X^2$, $B = 3X + X^3$ et $C = 2 - X$. Développer $(A + B)C$.

Propriété 17.1.21 – Degré d'un produit

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $AB = 0$ et $\deg(AB) = -\infty$.
- Sinon, $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$.

Démonstration. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, et notons $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $B = \sum_{k=0}^m b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $A = 0$, les $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont tous nuls et :

$$\begin{aligned}
 AB &= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} 0 \times b_j \right) X^k \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Il en est de même si $B = 0$.

- Supposons que A et B soient non nuls. On garde les notations précédentes, mais on suppose que n est le degré de

A et que m est le degré de B . Alors :

$$AB = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} a_i b_j \right) X^k$$

et le dernier terme de cette somme est

$$\left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=n+m}} a_i b_j \right) X^{n+m} = a_n b_m$$

qui est non nul puisque, n étant le degré de A et m le degré de B , on sait que $a_n \neq 0$ et que $b_m \neq 0$.
Le degré de AB est donc bien $n + m = \deg(A) + \deg(B)$. □

Propriété 17.1.22

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Démonstration. Le sens réciproque a été montré dans la propriété précédente, et le sens direct est immédiat par contraposée : si A et B sont tous deux non nuls, alors le degré de AB est $\deg(A) + \deg(B)$: c'est un entier naturel et AB est donc non nul. □

Définition 17.1.23 – Puissance n -ième d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la puissance n -ième de P , notée P^n , par :

$$P^0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P^{n+1} = P \times P^n$$

Puisque le produit de polynômes est commutatif, on retrouve la formule du binôme.

Théorème 17.1.24 – Formule du binôme

Pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Démonstration. La preuve est la même que pour les réels, les complexes et les matrices, puisque le produit est commutatif sur $\mathbb{K}[X]$. □

Composition

Définition 17.1.25 – Composée de deux polynômes

Soient $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$. La composée de A par B est le polynôme noté $A \circ B$ ou $A(B)$ défini par

$$A \circ B = A(B) = \sum_{k=0}^n a_k B^k$$

Remarque 17.1.26

Le produit de deux polynômes étant encore un polynôme, une récurrence immédiate montre que B^k est un polynôme pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc que $A \circ B$ est bien un polynôme en tant que combinaison linéaire de polynômes.

Exercice 17.1.27

Soit $A = 1 - X + 2X^2$ et $B = 2 - X$. Calculer $A \circ B$ et $B \circ A$. Que constate-t-on ?

Propriété 17.1.28

Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

1. $(\lambda A + \mu B)(C) = \lambda A(C) + \mu B(C)$
2. $(AB)(C) = A(C)B(C)$
3. $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$

17.2 Polynômes de degré plus petit que n **Définition 17.2.1**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} de degré inférieur ou égal à n (y compris le polynôme nul).

Remarque 17.2.2

$\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes *constants*, c'est-à-dire de la forme a_0 où a_0 est dans \mathbb{K} .

Propriété 17.2.3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{K}_n[X]$ est *stable par combinaison linéaire*, c'est-à-dire que :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}_n[X], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda A + \mu B \in \mathbb{K}_n[X]$$

Démonstration. Soient $A, B \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. D'après la propriété 17.1.13, λA est de degré inférieur ou égal à celui de A , donc à n , ainsi $\lambda A \in \mathbb{K}_n[X]$. De même, $\mu B \in \mathbb{K}_n[X]$.

Par somme, et d'après la propriété 17.1.9, $\lambda A + \mu B$ est encore de degré inférieur ou égal à n . Ainsi, $\lambda A + \mu B \in \mathbb{K}_n[X]$. \square

Exercice 17.2.4

Soit $A = 2 + 3X + X^2$, $B = 3X - 5X^3$, $\lambda = 1$ et $\mu = 3$. A et B sont donc dans $\mathbb{R}_3[X]$, il en est donc de même pour $\lambda A + \mu B$. Que vaut ce dernier ?

17.3 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

17.3.1 Diviseur, multiple

Définition 17.3.1 – Diviseur d'un polynôme, multiple d'un polynôme

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B est un *diviseur* de A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
On dit alors que A est un *multiple* de B .

Exercice 17.3.2

Montrer que $X^2 + 1$ est un diviseur de $1 + X^2 + X + X^3$.

Propriété 17.3.3

Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.

1. Si A divise B et A divise C , alors A divise $B + C$.
2. Si A divise C , alors AB divise C .
3. Si A divise B et B divise C , alors A divise C .
4. Si A divise B et si B est non nul, alors A est non nul et $\deg(A) \leq \deg(B)$.

Démonstration. 1. On suppose que A divise B et que A divise C : il existe donc $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B = AQ_1$ et $C = AQ_2$. On a alors

$$B + C = A \times (Q_1 + Q_2)$$

donc A divise $B + C$.

2. Supposons que A divise C , alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $C = AQ$. On a alors $BC = BAQ = A \times (BQ)$ donc A divise C .
3. Supposons que A divise B et B divise C : il existe donc $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B = AQ_1$ et $C = BQ_2 = AQ_1Q_2 = A \times (Q_1Q_2)$. A divise donc bien C .
4. Supposons que A divise B : il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AQ$. Puisque B est non nul, A est aussi non nul (sinon $B = 0 \times Q = 0$), ainsi que Q . On a donc

$$\deg(B) = \deg(A) + \deg(Q) \geq \deg(A)$$

□

17.3.2 Division euclidienne

Théorème 17.3.4 – Division euclidienne

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$\begin{cases} \deg(R) < \deg(B) \\ A = BQ + R \end{cases}$$

Q (respectivement R) est appelé le *quotient* (respectivement le *reste*) dans la division euclidienne de A par B .

Démonstration. **Unicité :** Soit $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que

$$\begin{cases} \deg(R_1) < \deg(B) \\ A = BQ_1 + R_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \deg(R_2) < \deg(B) \\ A = BQ_2 + R_2 \end{cases}$$

On a donc $BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ donc $B \times (Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$.

Supposons que $Q_1 - Q_2$ ne soit pas nul. On a alors

$$\deg(R_2 - R_1) = \deg(B \times (Q_1 - Q_2)) = \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) \geq \deg(B)$$

ce qui est absurde puisque

$$\deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$$

On a donc $Q_1 - Q_2 = 0$ puis $R_2 - R_1 = 0$, de sorte que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.

Existence : Il y a déjà un cas évident : si $\deg(A) < \deg(B)$, alors $A = Q \times B + R$ où Q est le polynôme nul et $R = A$. Dans la suite, on s'intéresse donc aux polynômes de degré supérieur ou égal à celui de B .

On note $m = \deg(B)$ et $B(X) = \sum_{k=0}^m b_k X^k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq m$, on considère la propriété \mathcal{P}_n suivante :

« Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(A) < n$, il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$ »

On raisonne par récurrence.

— La propriété \mathcal{P}_m est évidente : pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(A) < m = \deg(B)$, on peut écrire $A = BQ + R$ avec $Q = 0$ et $R = A$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq m$, et supposons \mathcal{P}_n vraie. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(A) < n + 1$.

Si $\deg(A) < n$, il suffit d'appliquer notre hypothèse de récurrence pour conclure.

On suppose donc que $\deg(A) = n$. Notons $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et posons

$$A_1 = A - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B$$

Le terme de plus haut degré de $\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B$ est

$$\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} b_m X^m = a_n X^n$$

C'est le même que A : on en déduit que A_1 est de degré strictement inférieur à celui de A . Ainsi, $\deg(A_1) < n$ et par hypothèse de récurrence, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $\deg(R_1) < \deg(B)$ tel que $A_1 = BQ_1 + R_1$. On obtient alors

$$A = A_1 + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B = BQ_1 + R_1 + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B = \left(\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q_1 \right) B + R_1$$

donc $A = BQ + R$ en posant $Q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q_1$ et $R = R_1$. Puisque $\deg(R) = \deg(R_1) < \deg(B)$, cela achève cette récurrence et cette démonstration. □

Méthode 17.3.5

Cette méthode fournit aussi une méthode de construction de la division euclidienne de A par B . Si $\deg(A) < \deg(B)$, il suffit de poser $Q = 0$ et $R = A$. Sinon, on calcule $A_1 = A - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B$, qui est de degré strictement inférieur à celui

de A , puis on calcule le quotient Q_1 et le reste R_1 dans la division euclidienne de A_1 par B . On en déduit le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B , respectivement $Q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q_1$ et $R = R_1$.
Le fait que le degré diminue strictement à chaque étape nous assure que cet algorithme s'arrête.

Exercice 17.3.6

Effectuer la division euclidienne de $A = X^3 - 4X + 2$ par $B = X^2 + 2X + 2$.

17.3.3 Racines d'un polynôme**Fonction polynomiale****Définition 17.3.7 – Fonction polynomiale**

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

La *fonction polynomiale* associée à P est la fonction suivante, notée \tilde{P} :

$$\begin{aligned} \tilde{P} &: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on note $P(x) = \tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Remarque 17.3.8

Dans l'écriture $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, X n'est pas un scalaire (ni un réel, ni un complexe). Il s'agit seulement d'un symbole. Cependant, la fonction polynomiale associée à P a bien pour domaine de définition \mathbb{K} , et est à valeurs dans \mathbb{K} .

Exercice 17.3.9

Soit $P = 1 + 2X - X^3$. Calculer $P(3)$.

Méthode de Horner

Méthode 17.3.10 : Méthode de Horner

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

Pour calculer $P(\alpha)$, on peut remarquer que

$$P(\alpha) = a_0 + \alpha \times (a_1 + \alpha \times (\cdots + \alpha a_n))$$

Plus précisément, on construit une suite de scalaires $(u_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ en posant :

$$\begin{cases} u_0 = a_n \\ \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, u_{k+1} = \alpha u_k + a_{n-k-1} \end{cases}$$

Alors $u_n = P(\alpha)$.

Démonstration. Par récurrence, montrons que :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, u_k = \sum_{i=0}^k a_{i+n-k} \alpha^i$$

Une fois cette égalité établie, on aura en particulier

$$u_n = \sum_{i=0}^n a_{i+n-n} \alpha^i = \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i = P(\alpha)$$

— **Initialisation** : Posons $k = 0$. On a bien :

$$\sum_{i=0}^k a_{i+n-k} \alpha^i = \sum_{i=0}^0 a_{i+n} \alpha^i = a_n \alpha^0 = \alpha_n = u_0$$

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ pour lequel $u_k = \sum_{i=0}^k a_{i+n-k} \alpha^i$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \alpha u_k + a_{n-k-1} \\ &= \alpha \sum_{i=0}^k a_{i+n-k} \alpha^i + a_{n-k-1} \\ &= \sum_{i=0}^k a_{i+n-k} \alpha^{i+1} + a_{n-k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} a_{i-1+n-k} \alpha^i + a_{n-k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+n-(k+1)} \alpha^i + a_{n-k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} a_{i+n-(k+1)} \alpha^i \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. □

Exercice 17.3.11

On pose $P = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3$ et $\alpha = 2$. Évaluer $P(\alpha)$ avec la méthode naïve et la méthode de Horner, et comparer le nombre de produits effectués.

Racines d'un polynôme**Définition 17.3.12 – Racine d'un polynôme**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est *racine* de P si $P(\alpha) = 0$.

Propriété 17.3.13

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Alors α est racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P , c'est-à-dire si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.

Dans ce cas, si P n'est pas constant, on a $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Démonstration. Le sens réciproque est évident : s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$, alors $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$.

Réciproquement, supposons que α soit racine de P . Par division euclidienne, il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = (X - \alpha)Q + R$ et $\deg(R) < \deg(X - \alpha) = 1$. R est donc un polynôme constant. En évaluant l'égalité précédente en α , on obtient

$$0 = P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + R(\alpha) = R(\alpha)$$

Puisque R est constant, cela implique que R est le polynôme nul, donc que $P = (X - \alpha)Q$. □

Exercice 17.3.14

Soit $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 17.3.15

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ des racines **deux-à-deux distinctes** de P . Alors $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_p) = \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)$ divise P .

Démonstration. Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

— Le cas $p = 1$ est exactement la propriété précédente.

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel cette propriété est vraie. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1} \in \mathbb{K}$ des racines deux-à-deux distinctes de P . En particulier, α_{p+1} est racine de P , donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha_{p+1})Q$.

Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on obtient en évaluant :

$$0 = P(\alpha_k) = \underbrace{(\alpha_k - \alpha_{p+1})}_{\neq 0} Q(\alpha_k)$$

donc $Q(\alpha_k) = 0$ puisque $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}$ sont supposés deux-à-deux distincts. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont donc racines

de Q , et par hypothèse de récurrence, Q est alors un multiple de $\prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)$: il existe $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q =$

$$Q_1 \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k).$$

On obtient alors :

$$P = (X - \alpha_{p+1}) Q_1 \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k) = Q_1 \prod_{k=1}^{p+1} (X - \alpha_k)$$

ce qui achève la récurrence. □

Corollaire 17.3.16

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors P admet au plus n racines.

Démonstration. Supposons que P admet $n+1$ racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$. Alors $\prod_{k=1}^{n+1} (X - \alpha_k)$, qui est de degré $n+1$, divise P , qui est non. On obtient alors $n = \deg(P) \geq n+1$: absurde. □

Corollaire 17.3.17

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Si P admet au moins $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.

Démonstration. Conséquence directe de ce qui précède : si P est non nul, il ne peut pas avoir plus de n racines. □

Exercice 17.3.18

Existe-t-il un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont \sin est la fonction polynomiale ?

Correction. Supposons que ce soit le cas : il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \sin(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a alors $P(k\pi) = \sin(k\pi) = 0$. P admet donc une infinité de racines et est donc le polynôme nul. C'est absurde car \sin n'est pas la fonction nulle. Il n'existe donc aucun polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ dont \sin est la fonction polynomiale.

Propriété 17.3.19

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$P = Q \iff \tilde{P} = \tilde{Q}$$

Remarque 17.3.20

Dire que $\tilde{P} = \tilde{Q}$ revient à dire que : $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = Q(x)$.

Démonstration. Le sens direct est évident, supposons donc que $\tilde{P} = \tilde{Q}$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a donc

$$P(x) - Q(x) = \tilde{P}(x) - \tilde{Q}(x) = 0$$

donc $P - Q$ admet une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul, de sorte que $P = Q$. □

Multiplicité d'une racine

Définition 17.3.21 – Multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P . On appelle *multiplicité de α dans P* le plus grand entier naturel non nul m tel que $(X - \alpha)^m$ divise P .

Démonstration. L'ensemble $E = \{m \in \mathbb{N}^*, (X - \alpha)^m \text{ divise } P\}$ est une partie non vide de \mathbb{N} (α étant racine de A , on sait que $X - \alpha = (X - \alpha)^1$ divise P , donc 1 est dans cet ensemble).

De plus, E , est majoré par $\deg(P)$. En effet, soit $m \in E$. Il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X - \alpha)^m Q = P$. Puisque P est non nul, Q est aussi non nul donc

$$\deg(P) = \deg((X - \alpha)^m) + \deg(Q) = m + \deg(Q) \geq m$$

E étant une partie non vide majorée de \mathbb{N} , E admet bien un plus grand élément. □

Remarque 17.3.22

- En particulier, la multiplicité de α dans P est toujours inférieure ou égale au degré de P .
- Une racine de multiplicité 1 est dite *racine simple*, une racine de multiplicité 2 est dite *double*, une racine de multiplicité 3 est dite *triple*.

Propriété 17.3.23

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(X - \alpha)^k \text{ divise } P \iff k \leq m$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Supposons que $(X - \alpha)^k$ divise P . m est le plus grand entier naturel tel que $(X - \alpha)^m$ divise P , donc $k \leq m$.
- Supposons que $k \leq m$. Puisque $(X - \alpha)^m$ divise P , il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)^m Q = (X - \alpha)^k (X - \alpha)^{m-k} Q$$

donc $(X - \alpha)^k$ divise P puisque $(X - \alpha)^{m-k} Q \in \mathbb{K}[X]$ car $m - k \geq 0$. □

Propriété 17.3.24

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$m \text{ est la multiplicité de } \alpha \text{ dans } P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], \begin{cases} P = (X - \alpha)^m Q \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration. — Supposons que m est la multiplicité de α dans P . Il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$. Supposons alors que $Q(\alpha) = 0$: Q est donc un multiple de $X - \alpha$ et il existe $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = (X - \alpha) Q_1$. On obtient donc

$$P = (X - \alpha)^m (X - \alpha) Q_1 = (X - \alpha)^{m+1} Q_1$$

donc $(X - \alpha)^{m+1}$ divise P : c'est impossible car $m + 1 > m$ et m est le plus grand entier naturel non nul tel que $(X - \alpha)^m$ divise P .

On en déduit que $Q(\alpha) \neq 0$.

- Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$. Supposons que m ne soit pas la multiplicité de α dans P , que nous noterons r . On a donc $m \neq r$ et même $m < r$ puisque $(X - \alpha)^m$ divise P . En particulier, $m + 1 \leq r$ donc $(X - \alpha)^{m+1}$ divise P et il existe $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^{m+1} Q_1$. On obtient donc :

$$0 = P - P = (X - \alpha)^{m+1} Q_1 - (X - \alpha)^m Q = (X - \alpha)^m ((X - \alpha) Q_1 - Q)$$

et puisque $(X - \alpha)^m$ n'est pas le polynôme nul, on en déduit que

$$(X - \alpha) Q_1 - Q = 0$$

En évaluant en α , on obtient $Q(\alpha) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.
 m est donc nécessairement la multiplicité de α dans P .

□

Exercice 17.3.25

Montrer que 1 est racine double de $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.

Propriété 17.3.26

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des racines **deux-à-deux distinctes** de P , de multiplicités respectives m_1, m_2, \dots, m_p . Alors $(X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_p)^{m_p}$ divise P , autrement dit, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = \left(\prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k} \right) Q$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

- Le cas $p = 1$ découle de la définition : si α_1 est racine de P de multiplicité m_1 , alors $(X - \alpha_1)^{m_1}$ divise P .
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vraie au rang p . Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}$ des racines **deux-à-deux distinctes** de P , de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_p, m_{p+1}$. Par hypothèse de récurrence, il existe alors $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = \left(\prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k} \right) Q_1$$

En particulier, puisque α_{p+1} est racine de P :

$$0 = P(\alpha_{p+1}) = Q_1(\alpha_{p+1}) \prod_{k=1}^p \underbrace{(\alpha_{p+1} - \alpha_k)^{m_k}}_{\neq 0}$$

donc $Q_1(\alpha_{p+1}) = 0$ et α_{p+1} est racine de Q_1 .

Notons r la multiplicité de α_{p+1} en tant que racine de Q_1 : il existe donc $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_1 = (X - \alpha_{p+1})^r Q_2$ et $Q_2(\alpha_{p+1}) \neq 0$, et ainsi :

$$P = (X - \alpha_{p+1})^r Q_2 \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}$$

Posons alors $Q = Q_2 \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}$. On a donc $P = (X - \alpha_{p+1})^r Q$ et

$$Q(\alpha_{p+1}) = Q_2(\alpha_{p+1}) \prod_{k=1}^p (\alpha_{p+1} - \alpha_k) \neq 0$$

donc r est la multiplicité de α dans P , c'est-à-dire m_{p+1} .

On a donc

$$P = (X - \alpha_{p+1})^{m_{p+1}} Q_2 \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k} = Q_2 \prod_{k=1}^{p+1} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

et $\prod_{k=1}^{p+1} (X - \alpha_k)^{m_k}$ divise P , ce qui achève la récurrence.

□

Exercice 17.3.27

Factoriser $P = X^3 - 3X^2 + 4$, préciser ses racines et leur ordre de multiplicité.

On obtient alors le corollaire suivant.

Corollaire 17.3.28

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P , comptées avec leur multiplicité, est inférieur ou égal à n .

Démonstration. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les racines de P , de multiplicités respectives m_1, m_2, \dots, m_p . Alors $\prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}$, de degré $\sum_{k=1}^n m_k$, divise P qui est non nul. Le degré de P est donc bien supérieur à $\sum_{k=1}^n m_k$. \square

Polynômes scindés**Définition 17.3.29 – Polynôme scindé**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est *scindé* lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$$

Remarque 17.3.30

S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$$

alors le degré de P est $n \geq 1$.

Exercice 17.3.31

Montrer que $P = X^4 + 2iX^3 - 2X^2 - 2iX + 1$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 17.3.32

Le polynôme $X^2 + 1$ est-il scindé sur \mathbb{R} ?

Relations coefficients-racines

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$. Posons $P = \lambda (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$.

Un développement direct donne :

$$P = \lambda (X^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)X - \alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$

Le coefficient constant de P est donc $-\lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et le coefficient de degré 2 est $-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$. Plus généralement :

Propriété 17.3.33 – Relations coefficients-racines

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$$

Notons également $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors on peut exprimer le coefficient constant de P et les coefficients des termes de degré $n-1$ et n de la façon suivante :

$$a_0 = \lambda (-1)^n \prod_{k=1}^n \alpha_k$$

$$a_{n-1} = -\lambda \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

$$a_n = \lambda$$

Démonstration. **Pour a_0 :** D'une part,

$$P(0) = \lambda \prod_{k=1}^n (0 - \alpha_k) = \lambda \prod_{k=1}^n (-\alpha_k) = \lambda (-1)^n \prod_{k=1}^n \alpha_k$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{N}$, 0^k est nul sauf si $k = 0$ donc :

$$P(0) = \sum_{k=0}^d a_k 0^k = a_0$$

On a donc bien l'égalité voulue.

Pour a_{n-1} et a_n : on peut raisonner par récurrence sur n pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété \mathcal{P}_n : « pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, le coefficient du terme de degré $n-1$ de $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ est $-\sum_{k=1}^n \alpha_k$ et le coefficient du terme de degré n est 1 ».

— Pour $n = 1$, c'est évident.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons \mathcal{P}_n vraie. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence, le polynôme $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ s'écrit $X^n - \sum_{k=1}^n \alpha_k X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} u_k X^k$ avec $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathbb{K}$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{n+1} (X - \alpha_k) \\ &= (X - \alpha_{n+1}) \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \\ &= (X - \alpha_{n+1}) \left(X^n - \sum_{k=1}^n \alpha_k X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} u_k X^k \right) \\ &= X^{n+1} - \sum_{k=1}^n \alpha_k X^n + \sum_{k=0}^{n-2} u_k X^{k+1} - \alpha_{n+1} X^n + \alpha_{n+1} \sum_{k=1}^n \alpha_k X^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{n+1} u_k X^k \end{aligned}$$

Le coefficient de X^{n+1} est bien 1, celui de X^n est $-\sum_{k=1}^n \alpha_k - \alpha_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k$, donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

En multipliant par $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on obtient bien les formules de l'énoncé. □

Exercice 17.3.34

Déterminer les polynômes de degré 2 dont i et $i + 1$ sont les racines.

17.4 Dérivation de polynômes**17.4.1 Définitions****Définition 17.4.1 – Dérivée formelle d'un polynôme**

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Le *polynôme dérivé* de P est le polynôme

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$$

Remarque 17.4.2

- Un polynôme n'étant pas une fonction, la dérivée d'un polynôme non plus. Il s'agit encore d'une expression à une indéterminée, ici nommée X . En particulier, aucune justification n'est nécessaire pour dériver un polynôme, contrairement aux fonctions.
- La somme définissant P' commence à 1, mais on peut la faire commencer à 0 : le coefficient de rang 0 est de toute façon nul.
- Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction polynomiale associée à P' est la dérivée de la fonction polynomiale associée à P , autrement dit :

$$\tilde{P}' = \tilde{P}'$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut donc réutiliser les résultats vus en analyse pour la dérivation de fonctions.

Mais puisque nous n'avons pas vu la notion de dérivabilité d'une fonction définie sur \mathbb{C} , on ne peut pas faire de même si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exemple 17.4.3

La dérivée de $P = 1 - 2X + 5X^3$ est $P' = -2 + 15X^2$.

Tout comme pour les fonctions, on peut définir les dérivées successives d'un polynôme.

Définition 17.4.4 – Dérivées successives d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la *dérivée n -ième* de P , notée $P^{(n)}$, en posant :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall n \in \mathbb{N}, P^{(n+1)} = (P^{(n)})' \end{cases}$$

La définition donne immédiatement le résultat suivant.

Propriété 17.4.5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } P \text{ n'est pas constant} \\ -\infty & \text{si } P \text{ est constant} \end{cases}$$

Une récurrence immédiate donne le résultat suivant.

Propriété 17.4.6

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\deg(P^{(k)}) = \begin{cases} n - k & \text{si } k \leq n \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $\deg(P^{(k)}) = n - k$.

— Pour $k = 0$, c'est évident.

— Soit $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ pour lequel l'égalité précédente est vraie. Alors $\deg(P^{(k)}) = n - k > 0$ donc $P^{(k)}$ n'est pas constant et :

$$\deg(P^{(k+1)}) = \deg\left(\left(P^{(k)}\right)'\right) = \deg(P^{(k)}) - 1 = n - k - 1 = n - (k + 1)$$

ce qui achève la récurrence.

En particulier, $\deg(P^{(n)}) = n - n = 0$ donc $P^{(n)}$ est constant : ses dérivées successives sont alors nulles, et ont pour degré $-\infty$. □

Opérations sur les polynômes dérivés

Propriété 17.4.7

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned} (\lambda P + \mu Q)' &= \lambda P' + \mu Q' \\ (PQ)' &= P'Q + PQ' \end{aligned}$$

Démonstration. Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$. Alors $\lambda P + \mu Q = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$ et

$$(\lambda P + \mu Q)' = \sum_{k=1}^n k(\lambda a_k + \mu b_k) X^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} + \mu \sum_{k=1}^n k b_k X^{k-1} = \lambda P' + \mu Q'$$

De plus :

$$\begin{aligned}
 (PQ)' &= \left(\sum_{k=0}^{2n} \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k}} a_i b_j X^k \right)' \\
 &= \sum_{k=1}^{2n} k \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k}} a_i b_j X^{k-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n-1} (k+1) \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k+1}} a_i b_j X^k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k+1}} (k+1) a_i b_j X^k
 \end{aligned}$$

D'autre part, $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$ et de même, $Q' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) b_{k+1} X^k$ donc :

$$P'Q + PQ' = \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k}} (i+1) a_{i+1} b_j X^k + \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n-1 \\ i+j=k}} a_i (j+1) b_{j+1} X^k$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket$, le coefficient de X^k dans $P'Q + PQ'$ est donc :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k}} (i+1) a_{i+1} b_j + \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n-1 \\ i+j=k}} a_i (j+1) b_{j+1} \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i-1+j=k}} i a_i b_j + \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i+j-1=k}} a_i j b_j \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k+1}} \underbrace{i a_i b_j}_{\text{nul si } i=0} + \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k+1}} \underbrace{a_i j b_j}_{\text{nul si } j=0} \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k+1}} (i a_i b_j + j a_i b_j) \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k+1}} (i+j) a_i b_j \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k+1}} (k+1) a_i b_j
 \end{aligned}$$

Il s'agit également du coefficient du terme de degré k dans $(PQ)'$, d'où l'égalité

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

□

Par récurrence, on obtient alors :

Propriété 17.4.8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(P^n)' = nP'P^{n-1}$$

Démonstration. Pour $n = 1$, c'est évident.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vraie au rang n . Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$(P^{n+1})' = (P \times P^n)' = P'P^n + P \times (nP'P^{n-1}) = P'P^n + nP'P^n = (n+1)P'P^n$$

ce qui achève la récurrence. □

Les mêmes calculs que ceux effectués pour les fonctions donnent alors la formule de Leibniz :

Théorème 17.4.9 – Formule de Leibniz

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

17.4.2 Formule de Taylor polynomiale

Propriété 17.4.10

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$((X-a)^n)' = \begin{cases} n(X-a)^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la propriété 17.4.8. □

Par récurrence, on obtient le résultat suivant :

Propriété 17.4.11

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$((X-a)^n)^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} (X-a)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On raisonne de nouveau par récurrence.

— Pour $k = 0$, c'est évident.

— Soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ pour lequel l'égalité est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} ((X-a)^n)^{(k+1)} &= \left(((X-a)^n)^{(k)} \right)' \\ &= \left(\frac{n!}{(n-k)!} (X-a)^{n-k} \right)' \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \left((X-a)^{n-k} \right)' \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) (X-a)^{n-k-1} \\ &= \frac{n!}{(n-(k+1))!} (X-a)^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

En particulier, $((X-a)^n)^{(n)} = n!$ est constant : ses dérivées successives sont donc nulles. \square

Théorème 17.4.12 – Formule de Taylor polynomiale

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal au degré de P :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Démonstration. Si $P = 0$, la formule est évidente (les deux membres de l'égalité sont nuls). On supposera donc $P \neq 0$. Montrons par récurrence que pour tout $d \in \mathbb{N}$, la propriété \mathcal{P}_d : « Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré d , pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq d$, on a $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$ ».

- Pour $d = 0$, c'est évident, les deux membres de l'égalité étant alors constants.
- Soit $d \in \mathbb{N}$ pour lequel la propriété \mathcal{P}_d est vraie. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $d+1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq d+1$. P' est alors de degré d et on peut lui appliquer notre hypothèse de récurrence. Puisque $n \geq d+1$, on a $n-1 \geq d$ donc :

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(P')^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (X-a)^k \end{aligned}$$

De l'autre côté, considérons le polynôme

$$Q = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Il s'agit donc de montrer que $P = Q$. Par combinaison linéaire, la dérivée de Q est alors :

$$\begin{aligned} Q' &= \sum_{k=1}^n k \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!} (X-a)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (X-a)^k \\ &= P' \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(Q - P)' = Q' - P' = 0$$

donc le polynôme $Q - P$ est constant. En évaluant en a , on obtient :

$$\begin{aligned} Q(a) - P(a) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (a-a)^k - P(a) \\ &= P(a) - P(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $Q - P = 0$ et $P = Q$, ce qui achève la récurrence. □

Exercice 17.4.13

Appliquer la formule de Taylor au polynôme $P = 2 - 3X + 5X^2$ en 1.

Théorème 17.4.14 – Multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P . Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors α est racine de P de multiplicité m si et seulement si :

$$(\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0) \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Démonstration. Notons $n = \deg(P)$. La multiplicité de α en tant que racine de P est nécessairement inférieure ou égale à n : si $m > n$, alors les deux assertions « α est racine de multiplicité m de P » et « $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ » sont fausses, et on a l'équivalence. Dans la suite, on supposera donc que $m \leq n$.

D'après la formule de Taylor, on a :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k + (X - \alpha)^m \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^{k-m} \\ &= R + (X - \alpha)^m Q \end{aligned}$$

avec

$$R = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

et

$$Q = \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^{k-m} = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!} (X - \alpha)^k$$

Par unicité, R est donc le reste dans la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^m$ puisque $\deg(R) \leq \deg((X - \alpha)^{m-1}) = m - 1 < \deg((X - \alpha)^m)$.

— Supposons que m soit la multiplicité de α en tant que racine de P . Alors $(X - \alpha)^m$ divise P donc $R = 0$: R est donc le polynôme nul. En particulier, par composition :

$$0 = R(X + \alpha) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} X^k$$

donc, par identification, les coefficients $P^{(k)}(\alpha)$ sont nuls pour tout $k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket$.

De plus, $P^{(m)}(\alpha)$ est non nul. Dans le cas contraire, on aurait :

$$P = (X - \alpha)^m \sum_{k=1}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!} (X - \alpha)^k = (X - \alpha)^{m+1} \sum_{k=1}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!} (X - \alpha)^{k-1}$$

- donc $(X - \alpha)^{m+1}$ diviserait P , ce qui contredit la définition de m .
 — Réciproquement, supposons que :

$$\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Alors R est le polynôme nul donc $P = (X - \alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) = \frac{P^{(m)}(\alpha)}{m!} \neq 0$: m est bien l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de P . □

Exercice 17.4.15

Montrer que 2 est racine triple de $P = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$.

17.5 Polynômes irréductibles

17.5.1 Définition

Définition 17.5.1

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est dit *irréductible* lorsqu'il vérifie :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], P = AB \implies \deg(A) = 0 \text{ ou } \deg(B) = 0$$

Remarque 17.5.2

- Autrement dit, un polynôme P non constant est irréductible lorsque ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

Exemple 17.5.3

$X^2 + 1$ est irréductible sur \mathbb{R} mais pas sur \mathbb{C} puisque $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

Exercice 17.5.4

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3. Montrer que P n'est pas irréductible.

Correction. Soit λ le coefficient dominant de P , de sorte que $P = \lambda Q$ avec Q unitaire de degré 3. Q s'écrit donc sous la forme $Q = X^3 + aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. En particulier :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Q(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = +\infty$$

et la fonction polynomiale associée à Q est continue.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, Q admet au moins une racine, notée α . Ainsi, $X - \alpha$ divise Q donc P , qui n'est pas irréductible.

17.5.2 Avec les complexes

Théorème 17.5.5 – Théorème de D'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors P admet au moins une racine.

■ *Démonstration.* Admis. □

Théorème 17.5.6

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le degré. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit \mathcal{P}_n la propriété « Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n est scindé ».

Initialisation : Soit P un polynôme de degré 1, de la forme $P = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On a alors $P = a \left(X - \frac{-b}{a} \right)$ donc P est scindé et \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons \mathcal{P}_n vraie. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$. P n'est pas constant, donc d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet au moins une racine α . En particulier, $X - \alpha$ divise P et il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$, avec $\deg(Q) = n$.

Par hypothèse de récurrence, Q est scindé : il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ tels que $Q = \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)$.

On a alors :

$$P = (X - \alpha)Q = \lambda (X - \alpha) \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k) = \lambda \prod_{k=1}^{p+1} (X - \alpha_k)$$

en notant $\alpha_{p+1} = \alpha$. P est donc scindé, ce qui achève la récurrence. □

Théorème 17.5.7 – Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

1. Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
2. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, des complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ deux-à-deux distincts et des entiers naturels non nuls m_1, m_2, \dots, m_p tels que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}$$

Cette écriture est de plus unique, à l'ordre près des facteurs.

Remarque 17.5.8

En reprenant les notations ci-dessus, p est alors le degré de P , les α_k en sont les racines, et pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, m_k est la multiplicité de α_k dans P .

Démonstration. 1. Immédiat d'après le théorème précédent.

2. Découle également du théorème précédent. L'unicité vient du fait que les α_k sont les racines de P , et les m_k sont leurs ordres de multiplicité. □

Exercice 17.5.9

Factoriser, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^n - 1$ dans \mathbb{C} .

Correction. Les racines complexes de P sont les racines n -ièmes de l'unité, c'est-à-dire les complexes de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$X^n - 1 = Q \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

et puisque $X^n - 1$ est unitaire de degré n , on a en réalité $Q = 1$. Finalement :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

17.5.3 Avec les réels**Propriété 17.5.10**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P (vu comme un polynôme à coefficients complexes). Alors \bar{z} est racine de P , de même multiplicité que z .

Démonstration. Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$P(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0$$

puisque les coefficients de P sont des réels.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ est encore à coefficients réels. En notons m la multiplicité de z comme racine de P , on sait que $P^{(m-1)}(z) = 0$ et $P^{(m)}(z) \neq 0$. Puisque $P^{(m-1)}$ et $P^{(m)}$ sont à coefficients réels, on en déduit (comme pour P) que $P^{(m-1)}(\bar{z}) = 0$ et $P^{(m)}(\bar{z}) \neq 0$. \bar{z} est donc bien de multiplicité m en tant que racine de P . \square

Théorème 17.5.11 – Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

Alors P peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 n'ayant pas de racines réelles.

Démonstration. Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les racines **réelles** de P , de multiplicités respectives r_1, r_2, \dots, r_p , et $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ ses racines complexes de parties imaginaires strictement positives, de multiplicités respectives s_1, s_2, \dots, s_q . Les autres racines de P sont donc les $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \dots, \overline{\omega_q}$, de mêmes multiplicités respectives que $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$.

Par factorisation dans \mathbb{C} , il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\begin{aligned} P &= \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^q (X - \omega_k)^{s_k} \prod_{k=1}^q (X - \overline{\omega_k})^{s_k} \\ &= \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^q ((X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}))^{s_k} \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1; q \rrbracket$:

$$\begin{aligned}(X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) &= X^2 - (\omega_k + \overline{\omega_k})X + \omega_k \overline{\omega_k} \\ &= X^2 - 2\operatorname{Re}(\omega_k) + |\omega_k|^2\end{aligned}$$

donc $(X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k})$ est un polynôme de degré 2 à coefficients dans \mathbb{R} dont les deux racines sont non réelles. \square

Corollaire 17.5.12

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racines réelles.

Exercice 17.5.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en facteurs irréductibles dans \mathbb{R} , le polynôme $P = X^n - 1$.

Correction. On a vu que

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = (X - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

Deux cas peuvent se présenter.

— Si n est pair, alors $n = 2k$ avec $k = \frac{n}{2} \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Si $k = \frac{n}{2}$, on a $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{i\pi} = -1$. On peut donc écrire, en sortant le terme de rang $\frac{n}{2}$, que

$$P = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \prod_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

En effectuant le changement d'indice $j = n - k$ dans le dernier produit, on obtient alors

$$\begin{aligned}P &= (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - e^{\frac{2i(n-j)\pi}{n}} \right) \\ &= (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - e^{2i\pi - \frac{2ij\pi}{n}} \right) \\ &= (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - e^{-\frac{2ij\pi}{n}} \right) \\ &= (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \left(X - e^{-\frac{2ik\pi}{n}} \right) \\ &= (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X^2 - 2\operatorname{Re} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) + \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right|^2 \right) \\ &= (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X^2 - 2\cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) X + 1 \right)\end{aligned}$$

— Si n est impair, alors $\frac{n-1}{2}$ est un entier et on peut écrire (même si $n = 1$, auquel cas les deux produits qui suivent

valent 1) :

$$\begin{aligned} P &= (X-1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \prod_{k=\frac{n-1}{2}+1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \\ &= (X-1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - e^{\frac{2i(n-j)\pi}{n}} \right) \end{aligned}$$

en posant $j = n - k$ dans le deuxième produit. On poursuit comme pour le cas précédent :

$$\begin{aligned} P &= (X-1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - e^{2i\pi - \frac{2ij\pi}{n}} \right) \\ &= (X-1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \left(X - e^{-\frac{2ik\pi}{n}} \right) \\ &= (X-1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1 \right) \end{aligned}$$

17.6 Notions sur les fractions rationnelles

Définition 17.6.1

Une *fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{K}* est un quotient de la forme $\frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$.

Propriété 17.6.2

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que Q est **scindé à racines simples**, notées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$. Alors il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique famille $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ telle que

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{X - \alpha_k}$$

Remarque 17.6.3

E peut être obtenu par division euclidienne de P par Q .

Exercice 17.6.4

Déterminer les primitives de la fonction numérique

$$x \mapsto \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 3}$$

17.7 Exercices

Exercice 17.7.1

Faire les divisions euclidiennes de A par B lorsque :

1. $A = 1 + 3X - X^3$ et $B = 1 + X + X^2$
2. $A = X^5 + 7X^4 + 15X^3 + 13X^2 + 10X + 5$ et $B = 2 + 3X + X^2$
3. $A = X^4$ et $B = 1 + X^2$
4. $A = 2 + 4X + 9X^2 + 12X^3 + 11X^4 + 4X^5$ et $B = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3$

Exercice 17.7.2

Factoriser le plus possible :

1. $A = -2 - 2X + X^2 + 2X^3 + X^4$
2. $B = -6 + 11X - 6X^2 + X^3$

Exercice 17.7.3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(a+h) - 2P(a) + P(a-h)}{h^2}$$

On pourra utiliser la formule de Taylor.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $n \geq \deg(P)$. D'après la formule de Taylor, on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

En particulier, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} P(a+h) &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} h^k \\ &= P(a) + P'(a)h + \frac{P''(a)}{2}h^2 + \sum_{k=3}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} h^k \\ &= P(a) + P'(a)h + \frac{P''(a)}{2}h^2 + h^2 \sum_{k=3}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} h^{k-2} \\ &= P(a) + P'(a)h + \frac{P''(a)}{2}h^2 + h^2 Q(h) \end{aligned}$$

$$\text{où } Q(h) = \sum_{k=3}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} h^{k-2} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{P^{(k+2)}(a)}{(k+2)!} h^k.$$

De même, on montre que

$$\begin{aligned} P(a-h) &= P(a) + P'(a)(-h) + \frac{P''(a)}{2}(-h)^2 + (-h)^2 Q(-h) \\ &= P(a) - P'(a)h + \frac{P''(a)}{2}h^2 + h^2 Q(-h) \end{aligned}$$

Remarquons que $Q(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} h^k = 0$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} & \frac{P(a+h) - 2P(a) + P(a-h)}{h^2} \\ &= \frac{P(a) + P'(a)h + \frac{P''(a)}{2}h^2 + h^2Q(h) - 2P(a) + P(a) - P'(a)h + \frac{P''(a)}{2}h^2 + h^2Q(-h)}{h^2} \\ &= \frac{P''(a)h^2 + h^2(Q(h) + Q(-h))}{h^2} \\ &= P''(a) + Q(h) + Q(-h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} P''(a) \end{aligned}$$

La limite cherchée est donc $P''(a)$.

Exercice 17.7.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 17.7.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X + 1$.

Exercice 17.7.6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. Montrer que P n'admet aucune racine multiple.

Exercice 17.7.7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, le polynôme $P_n = X^n \sin(\alpha) - X \sin(n\alpha) + \sin((n-1)\alpha)$ est divisible par $A = X^2 - 2X \cos(\alpha) + 1$.

Exercice 17.7.8

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = \cos(3a) + X \sin(3a) - (\cos(a) + X \sin(a))^3$$

où a est un réel quelconque.

Correction. Remarquons que, d'après la formule de Moivre :

$$P(i) = \cos(3a) + i \sin(3a) - (\cos(a) + i \sin(a))^3 = e^{3ia} - (e^{ia})^3 = e^{3ia} - e^{3ia} = 0$$

donc i est racine de P .

De la même façon :

$$P(-i) = e^{-3ia} - e^{-3ia} = 0$$

donc $-i$ est aussi racine de P .

On en déduit que $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$ divise P : il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X^2 + 1)Q$ avec $\deg(Q) \leq 1$ puisque $\deg(P) \leq 3$. Q est donc de la forme $\alpha X + \beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. P s'écrit donc

$$P = (X^2 + 1)(\alpha X + \beta) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \alpha X + \beta$$

Cependant, le coefficient devant X^3 dans P est $-\sin(a)^3$, et le coefficient constant de P est $\cos(3a) - \cos(a)^3$. On en

déduit par identification que $\alpha = -\sin(a)^3$ et que $\beta = \cos(3a) - \cos(a)^3$. Finalement :

$$P = (X^2 + 1) \left(-\sin(a)^3 X + \cos(3a) - \cos(a)^3 \right)$$

Exercice 17.7.9

Déterminer une primitive de

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

Exercice 17.7.10

Déterminer une primitive de

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 4x + 4}$$

On pourra se ramener à une fonction de la forme $x \mapsto cx + d + \frac{ax+b}{(x-2)^2}$ et chercher $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : \frac{ax+b}{(x-2)^2} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{(x-2)^2}.$$

Exercice 17.7.11

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième de

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Exercice 17.7.12

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X^2 + X + 1)^2$ divise $Q_n = (X + 1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$.

Exercice 17.7.13

Factoriser, dans \mathbb{C} , le polynôme $P_n = X^n - i$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

17.8 DM conducteur

Exercice 52

Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = 3X^4 - X^3 + 4X^2 - 1$ par $B = X^2 + 1$.
2. $A = X^6 + X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 4X + 2$ par $B = X^3 + 2X + 1$.
3. X^q par $X - 1$, q étant un entier naturel fixé.

Correction. 1. On obtient $A = BQ + R$ avec $Q = 3X^2 - X + 1$ et $R = X - 2$.

2. On obtient $A = BQ + R$ avec $Q = X^3 + X^2 + X + 1$ et $R = X + 1$.

3. Si $q = 0$, on a

$$X^q = 1 = (X - 1) \times 0 + 1$$

Si $q > 0$, on sait que

$$X^q - 1 = X^q - 1^q = (X - 1)(1 + X + \cdots + X^{q-1}) = (X - 1) \sum_{k=0}^{q-1} X^k$$

donc

$$X^q = (X - 1) \sum_{k=0}^{q-1} X^k + 1$$

qui est bien la division euclidienne voulue puisque $\deg(1) < \deg(X - 1)$.

Commentaire

Cette formule est aussi vraie pour $q = 0$ en considérant alors que $\sum_{k=0}^{q-1} X^k = 0$.

Exercice 53

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $P_n = X^n \sin(\alpha) - X \sin(n\alpha) + \sin((n-1)\alpha)$ est divisible par $A = X^2 - 2X \cos(\alpha) + 1$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

$X^2 - 2X \cos(\alpha) + 1$ a pour discriminant

$$\Delta = (-2 \cos(\alpha))^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4(\cos^2(\alpha) - 1) = -4 \sin^2(\alpha) = (2i \sin(\alpha))^2$$

et pour racines

$$z_1 = \frac{2 \cos(\alpha) + 2i \sin(\alpha)}{2}$$

$$= \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

$$z_1 = e^{i\alpha}$$

$$z_2 = \frac{2 \cos(\alpha) - 2i \sin(\alpha)}{2}$$

$$= \cos(\alpha) - i \sin(\alpha)$$

$$z_2 = e^{-i\alpha}$$

Si $z_1 = z_2$, alors $\sin(\alpha) = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = k\pi$. P_n est alors le polynôme nul, évidemment divisible par A .

Supposons alors que $z_1 \neq z_2$ c'est-à-dire que $e^{i\alpha} \neq e^{-i\alpha}$. Alors $X^2 - 2X \cos(\alpha) + 1 = (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha})$ divise P_n si et seulement si $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$ sont racines de P_n . P_n étant à coefficients réels, et puisque $e^{-i\alpha}$ est le conjugué de $e^{i\alpha}$, il suffit dès lors de montrer que $e^{i\alpha}$ est racine de P_n . Or :

$$\begin{aligned} P_n(e^{i\alpha}) &= (e^{i\alpha})^n \sin(\alpha) - e^{i\alpha} \sin(n\alpha) + \sin((n-1)\alpha) \\ &= e^{in\alpha} \sin(\alpha) - e^{i\alpha} \sin(n\alpha) + \sin((n-1)\alpha) \\ &= (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) \sin(\alpha) - (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \sin(n\alpha) + \sin((n-1)\alpha) \\ &= \cos(n\alpha) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \sin(n\alpha) + \sin((n-1)\alpha) \\ &\quad + \underbrace{i(\sin(n\alpha) \sin(\alpha) - \sin(\alpha) \sin(n\alpha))}_{=0} \\ &= \sin(\alpha - n\alpha) + \sin((n-1)\alpha) \\ &= \sin((1-n)\alpha) + \sin((n-1)\alpha) \\ &= -\sin((n-1)\alpha) + \sin((n-1)\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, $e^{i\alpha}$ est bien racine de P_n , et comme expliqué ci-dessus, on en déduit que $X^2 - 2X \cos(\alpha) + 1$ divise P_n . Dans tous les cas, A divise P_n .

Exercice 54

Déterminer les primitives de

$$f : x \mapsto \frac{11x^4 - 58x^3 + 82x^2 - 19x - 5}{x^2 - 5x + 6}$$

Correction. $X^2 - 5X + 6$ a pour racines 2 et 3. f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. De plus, par division euclidienne, on trouve (le faire) :

$$11X^4 - 58X^3 + 82X^2 - 19X - 5 = (X^2 - 5X + 6) \times (11X^2 - 3X + 1) + 4X - 11$$

donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(x) = 11x^2 - 3x + 1 + \frac{4x - 11}{x^2 - 5x + 6} = 11x^2 - 3x + 1 + \frac{4x - 11}{(x - 2)(x - 3)}$$

$X^2 - 5X + 6$ étant scindé à racines simples, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \frac{4x - 11}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{\lambda}{x - 2} + \frac{\mu}{x - 3}$$

En multipliant par $x - 2$, on obtient

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \frac{4x - 11}{x - 3} = \lambda + \frac{\mu(x - 2)}{x - 3}$$

et en faisant tendre x vers 2, on obtient

$$\lambda = \frac{4 \times 2 - 11}{2 - 3} = 3$$

μ s'obtient de la même façon et $\mu = 1$.

Finalement :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = 11x^2 - 3x + 1 + \frac{3}{x - 2} + \frac{1}{x - 3}$$

et sur chacun des intervalles $]-\infty; 2[,]2; 3[$ et $]3; +\infty[$, les primitives de f sont les de la forme

$$x \mapsto \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 3 \ln|x - 2| + \ln|x - 3| + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

Exercice 55

1. Effectuer la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$.
2. Montrer qu'il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, et les déterminer, tels que

$$X^6 - i = (X^2 + i)(X^2 - r_1)(X^2 - r_2)$$

3. Résoudre l'équation $z^6 - i = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction. 1. On obtient

$$X^6 - i = (X^2 + i) \times (X^4 - iX^2 - 1) + 0 = (X^2 + i) \times (X^4 - iX^2 - 1)$$

En particulier, $X^2 + i$ divise $X^6 - i$.

2. Le polynôme $X^2 - iX - 1$ a pour discriminant

$$\Delta = (-i)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = -1 + 4 = 3$$

et pour racines

$$r_1 = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \qquad r_2 = \frac{i - \sqrt{3}}{2}$$

Ce polynôme étant unitaire, on a donc $X^2 - iX - 1 = (X - r_1)(X - r_2)$ et en composant avec X^2 , on obtient $X^4 - iX^2 - 1 = (X^2 - r_1)(X^2 - r_2)$.

Finalement :

$$X^6 - i = (X^2 + i)(X^2 - r_1)(X^2 - r_2)$$

$$\text{où } r_1 = \frac{i + \sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{6}} \text{ et } r_2 = \frac{i - \sqrt{3}}{2} = e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} z^2 + i = 0 &\iff z^2 = -i \\ &\iff z^2 = e^{\frac{-i\pi}{2}} \\ &\iff z = e^{\frac{-i\pi}{4}} \text{ ou } z = -e^{\frac{-i\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = r_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} &\iff \begin{cases} |a+ib|^2 = \left| \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right|^2 \\ a^2 + 2iab - b^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2ab = \frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b^2 = a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ b^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} \\ b = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} \end{cases} \\
&\text{ou} \begin{cases} a = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} \\ b = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} \end{cases}
\end{aligned}$$

Commentaire

Cela permet déjà de conclure à propos de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$: $e^{\frac{i\pi}{12}}$ est l'une des deux racines carrées de $r_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}$, mais puisque $\frac{\pi}{12} \in \left[0; \frac{\pi}{12}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$ donc $e^{\frac{i\pi}{12}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} + i\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$. En particulier

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = r_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} &\iff \begin{cases} |a+ib|^2 = \left| \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right|^2 \\ a^2 + 2iab - b^2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 2ab = \frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2a^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b^2 = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ b^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} \\ b = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} \end{cases} \\
&\quad \text{ou} \begin{cases} a = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} \\ b = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} \end{cases}
\end{aligned}$$

Les 6 racines de P_n sont donc $e^{\frac{-i\pi}{4}}$, $-e^{\frac{-i\pi}{4}}$, $z_0 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} + i\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$ et $-z_0$, ainsi que $z_1 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} +$

$i\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$ et $-z_1$.

Cependant, on peut aussi écrire que

$$\begin{aligned}
z^6 - i = 0 &\iff z^6 = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\
&\iff \exists k \in \llbracket 0; 5 \rrbracket, z = e^{\frac{i\pi + 2ik\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Les 6 racines de $X^6 - i$ sont donc aussi les $e^{\frac{i\pi + 2ik\pi}{12}}$, avec $k \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$.

La racine de $X^6 - 1$ de partie imaginaire positive et de partie réelle la plus grande est alors

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = z_0 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} + i\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$\text{donc } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

Chapitre 18

Comparaisons de fonctions

18.1	Relations de comparaison	546
18.1.1	Relation de négligeabilité	546
18.1.2	Relation de domination	552
18.1.3	Relation d'équivalence	554
18.2	Cas des suites	561
18.3	Développements limités	561
18.3.1	Définition	562
18.3.2	Opérations sur les développements limités.	565
18.3.3	Lien avec la dérivation	571
18.3.4	Développements limités de référence	572
18.4	Exemples d'applications	575
18.4.1	Extrema locaux	575
18.4.2	Détermination d'un développement limité	576
18.4.3	Calculer une dérivée et une dérivée seconde	576
18.4.4	Étude locale d'une fonction	577
18.4.5	Prolongement d'une fonction	577
18.4.6	Recherche d'une asymptote	577
18.4.7	Un développement asymptotique	577
18.5	Exercices	577
18.6	DM conducteur	583

Dans tout ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, a est un point de I ou une extrémité (finie ou non) de I , et les fonctions considérées seront généralement définies sur $\mathcal{D} = I$ ou $\mathcal{D} = I \setminus \{a\}$, à valeurs dans \mathbb{K} . En particulier, ces fonctions seront définies au voisinage de a , mais pas forcément en a .

18.1 Relations de comparaison

18.1.1 Relation de négligeabilité

Définition et exemples

Définition 18.1.1 – Fonction négligeable devant une autre en un point fini ou non

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même. On dit que f est négligeable devant g en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

avec, comme condition supplémentaire, que $f(a) = 0$ si f et g sont définies en a et si $g(a) = 0$.

On note alors $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ ou encore $f = o_a(g)$.

Remarque 18.1.2

On reprend les notations précédentes.

- Dire que $f = o_a(g)$ revient à dire qu'au voisinage de a , on peut écrire que $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ où ε est une fonction définie au voisinage de a et de limite nulle en a .
Autrement dit, au voisinage de a , f est égale à g multipliée par une quantité « très petite », c'est-à-dire de limite nulle en a .
- Si f et g sont définies en a et si $f = o_a(g)$, on a nécessairement $f(a) = 0$: c'est vrai par définition si $g(a) = 0$, et dans le cas contraire, on peut écrire que

$$f(a) = g(a) \left(\frac{f}{g} \right)(a) = g(a) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = g(a) \times 0 = 0$$

puisque la fonction $\frac{f}{g}$ est alors définie en a , et est de limite nulle en a .

- La notation $f = o_a(g)$, ou encore $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$, est l'une des *notations de Landau*. Elle se lit f est un « petit o » de g en a .

L'« égalité » $f = o_a(g)$ n'en est pas vraiment une : si h est une autre fonction définie au voisinage de a , et si $f = o_a(g)$ et $h = o_a(g)$, cela n'implique pas que $f = h$ (voir l'exemple 18.1.3).

Exemple 18.1.3

- On a $x^3 = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. En effet, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ sont définies au voisinage de 0, et valent toutes les deux 0 en 0. De plus, pour x au voisinage de 0 :

$$\frac{x^3}{x^2} = x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

On a donc bien $x^3 = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

De la même façon, $x^4 = o_{x \rightarrow a}(x^2)$ (et pourtant $x \mapsto x^4$ et $x \mapsto x^2$ ne sont pas la même fonction).

— A l'inverse, on a $x^2 = o_{x \rightarrow 0}(x^3)$: ces deux fonctions sont définies au voisinage de $+\infty$ (mais bien évidemment, pas en $+\infty$), et pour x au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

— Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x+1} = 2$, on n'a ni $x+1 = o_{x \rightarrow 0}(x+2)$, ni $x+2 = o_{x \rightarrow 0}(x+1)$.

Exercice 18.1.4

Montrer que $\sin(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$.

Correction. \sin et $x \mapsto x$ sont définies au voisinage de $+\infty$ (mais pas en $+\infty$). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x)| \leq 1$ donc pour x au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| = \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ et $\sin(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$.

Propriété 18.1.5

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$.

On a l'équivalence

$$f = o_a(1) \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Démonstration. C'est direct ! la fonction $x \mapsto 1$ ne s'annule pas en 0, et :

$$f = o_a(1) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1} = 0$$

□

Propriété 18.1.6 – Comparaison de monômes

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x^\alpha = o_{x \rightarrow 0}(x^\beta) \iff \alpha > \beta$$

$$x^\alpha = o_{x \rightarrow \pm\infty}(x^\beta) \iff \alpha < \beta$$

Démonstration. Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^\beta$ sont, dans tous les cas, définies au voisinage de 0 (sauf éventuellement en 0 si $\alpha < 0$ ou $\beta < 0$, et quitte à se limiter à \mathbb{R}_+ si α et β ne sont pas des entiers).

Pour x au voisinage de 0, on a

$$\left(\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \right) \iff \alpha - \beta > 0 \iff \alpha > \beta$$

Si $x^\alpha = o_{x \rightarrow 0}(x^\beta)$, on a donc bien $\alpha > \beta$.

Réciproquement, supposons que $\alpha > \beta$. On a donc bien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0$. Le seul cas problématique est alors celui où $x \mapsto x^\beta$ est définie et nulle en 0 (quitte à la prolonger par continuité), c'est-à-dire si $\beta > 0$. Mais puisque $\alpha > \beta > 0$, on a bien $0^\alpha = 0$.

Finalement,

$$x^\alpha = o_{x \rightarrow 0}(x^\beta) \iff \alpha > \beta$$

La preuve est la même en $\pm\infty$ (et est même plus simple puisque les fonctions ne sont pas « définies en $\pm\infty$ »). \square

Propriété 18.1.7 – Croissances comparées

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$(\ln(x))^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\beta)$$

$$|\ln(x)|^\alpha = o_{x \rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

$$x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\alpha x})$$

$$e^{\alpha x} = o_{x \rightarrow -\infty}\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$$

Démonstration. C'est une reformulation des croissances comparées déjà rencontrées. Par exemple, on sait que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\frac{1}{|x|^\beta}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$$

\square

Opérations sur la relation de négligeabilité

Propriété 18.1.8 – Transitivité

Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$, g et h ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

On suppose que $f = o_a(g)$ et que $g = o_a(h)$.

Alors $f = o_a(h)$.

Démonstration. Pour $x \in I$ au voisinage de a (quitte à exclure a), on a

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \times 0 = 0$$

puisque $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$.

De plus, si f, g et h sont définies en a , et si $h(a) = 0$, alors $g(a) = 0$ puisque $g = o_a(h)$, donc $f(a) = 0$ puisque $f = o_a(g)$.

On a donc bien $f = o_a(h)$. \square

Propriété 18.1.9 – Négligeabilité et produit

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$, g ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

On suppose que $f = o_a(g)$.

Alors $h \times f = o_a(h \times g)$ pour toute fonction $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$.

Démonstration. Pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a :

$$\frac{h(x)f(x)}{h(x)g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

puisque $f = o_a(g)$.

De plus, si f, g et h sont définies en a et si $h(a)g(a) = 0$, alors ou bien $g(a) = 0$ (et dans ce cas $h(a)f(a) = 0$ car $f(a) = 0$ puisque $f = o_a(g)$), ou bien $h(a) = 0$ (et dans ce cas, on a aussi $h(a)f(a) = 0$).

On a donc bien $hf = o_a(hg)$. □

Exercice 18.1.10

Montrer :

1. $x = o_{x \rightarrow -\infty}(e^{-x})$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, x^n = o_{x \rightarrow -\infty}(x^{n-1}e^{-x})$

Corollaire 18.1.11

Soient $f, g, h, i \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$, h et i ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

On suppose que $f = o_a(h)$ et $g = o_a(i)$.

Alors

$$fg = o_a(hi)$$

Démonstration. Puisque $g = o_a(i)$, on a d'après la propriété 18.1.9 :

$$fg = o_a(fi)$$

Or $f = o_a(h)$ donc d'après la même propriété :

$$fi = o_a(hi)$$

Par transitivité, on a bien

$$fg = o_a(hi)$$

□

Propriété 18.1.12 – Somme de fonctions négligeables devant une fonction

Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$, h ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même. On suppose que $f = o_a(h)$ et $g = o_a(h)$. Alors $f + g = o_a(h)$.

Démonstration. Pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a , on a

$$\frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

puisque $f = o_a(h)$ et $g = o_a(h)$.

De plus, si ces fonctions sont définies en a avec $h(a) = 0$, alors $f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0$ puisque $f = o_a(h)$ et $g = o_a(h)$.

On a donc bien $f + g = o_a(h)$. □

Corollaire 18.1.13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, f_2, \dots, f_n, h \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$, h ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

On suppose que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f_i = o_a(h)$$

Alors

$$\sum_{i=1}^n f_i = o_a(h)$$

■ *Démonstration.* Récurrence immédiate. □

Exercice 18.1.14

Montrer que

$$x^5 + x^3 + x^{12} = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Propriété 18.1.15

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$, g ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Si $f = o_a(\lambda g)$ alors $f = o_a(g)$.
- Soit $\mu \in \mathbb{K}^*$. Si $f = o_a(g)$ alors $f = o_a(\mu g)$.

Démonstration. — Pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a , on a :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \frac{f(x)}{\lambda g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

puisque λ est une constante et $f = o_a(g)$.

De plus, si f et g sont définies en a avec $g(a) = 0$, alors $\lambda g(a) = 0$ puis $f(a) = 0$ car $f = o_a(\lambda g)$.

On a donc bien $f = o_a(\lambda g)$.

- Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$. Si $f = o_a(g)$ alors $f = o_a\left(\frac{1}{\mu} \times \mu g\right)$ et on applique le point précédent avec $\lambda = \frac{1}{\mu}$.

□

Exercice 18.1.16

Simplifier

$$o_{+\infty}(x^2) + o_{+\infty}(-12x^2) + o_{+\infty}(13x)$$

Propriété 18.1.17 – Composition et négligeabilité

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit a un point de I (respectivement J), ou une extrémité (finie ou non) de I (respectivement J).

Soit $\mathcal{D} = I$ ou $I \setminus \{a\}$ et $\mathcal{D}' = J$ ou $J \setminus \{b\}$.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$.

Soient $g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{D}', \mathbb{K})$, h ne s'annulant pas au voisinage de b , sauf éventuellement en b lui-même.

On suppose alors que :

- $g = o_b(h)$

— $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$
 Alors $g \circ f = o_a(h \circ f)$.

Démonstration. Pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a :

$$\frac{g(f(x))}{h(f(x))} = \left(\frac{g}{h}\right)(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

puisque $\frac{g}{h} \xrightarrow{b} 0$ et $f \xrightarrow{a} b$.

De plus, si $h \circ f$ et $g \circ f$ sont définies en a avec $(h \circ f)(a) = 0$, alors f est définie en a donc $f(a) = b$ puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

On a alors $(h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(b) = 0$ et $g(f(a)) = g(b) = 0$ puisque $g = o_b(h)$. \square

Exercice 18.1.18

Montrer :

$$1. \ln(u) = o_{u \rightarrow +\infty}(u)$$

$$2. \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = o_{x \rightarrow 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Propriété 18.1.19 – Compatibilité avec les puissances entières positives

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$, g ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que $f = o_a(g)$.

Alors $f^n = o_a(g^n)$.

Démonstration. On suppose que $f = o_a(g)$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f^n = o_a(g^n)$.

— Pour $n = 0$, c'est évident, puisque $f^1 = o_a(g) = o_a(g^1)$ par hypothèse.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = o_a(g^n)$. Alors

$$f^{n+1} = f^n \times f = o_a(g^{n+1})$$

d'après la propriété 18.1.11 puisque $f = o_a(g)$ et $f^n = o_a(g^n)$.

Par récurrence, la propriété est bien prouvée. \square

Exercice 18.1.20

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^n = o_{x \rightarrow +\infty}\left(x^{-\frac{n}{2}}\right)$$

Correction. Pour $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de $+\infty$, on a $x^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}^n}$ et :

$$\sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{\sqrt{x}}{x} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\sqrt{1+x^2}-x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et en passant à la puissance $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}^n}\right)$$

ou encore

$$\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n = o\left(x^{-\frac{n}{2}}\right)$$

Propriété 18.1.21 – Compatibilité avec les puissances strictement positives

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

On suppose que $f = o_a(g)$. On suppose également que f et g sont strictement positives au voisinage de a .

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$.

Alors $f^\alpha = o_a(g^\alpha)$.

Démonstration. On a simplement

$$\frac{(f(x))^\alpha}{(g(x))^\alpha} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

car $\alpha > 0$

□

18.1.2 Relation de domination

Il existe une relation de comparaison plus faible que la négligeabilité, mais parfois suffisante : il s'agit de la relation de *domination*.

Définition 18.1.22 – Fonction dominée par une autre en un point fini ou non

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

On dit que f est dominée par g en a si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a , avec, comme condition supplémentaire, $f(a) = 0$ si f et g sont définies en a et si $g(a) = 0$.

On note alors $f = O_a(g)$ ou encore $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$.

Remarque 18.1.23

- Avec les notations précédentes, dire que $f = O_a(g)$ revient à dire qu'au voisinage de a , on peut écrire que $f(x) = g(x)w(x)$ où w est une fonction définie et bornée au voisinage de a . Autrement dit, f est égale à g multipliée par une fonction bornée au voisinage de a .
- La relation $f = O_a(g)$ se lit « f est un grand O de g ».
- Il s'agit d'une autre notation de Landau, qui présente les mêmes limitations que la relation de négligeabilité.

Exemple 18.1.24

- Par exemple, on a $x^2 = O_{x \rightarrow 0}(x)$. En effet, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ sont nulles en 0, et le rapport $x \mapsto \frac{x^2}{x} = x$ converge (vers 0) en 0 : il est donc borné.

- De la même façon, on a $x^2 = O_{x \rightarrow 0}(x^2)$.
- On a aussi $\sin(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(2 + \cos(x))$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de $+\infty$, on a $1 \leq 2 + \cos(x) \leq 3$ et $|\sin(x)| \leq 1$ donc

$$\left| \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} \right| \leq \frac{1}{1} = 1$$

Propriété 18.1.25 – Un petit o est un grand O

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$, g ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

Si $f = o_a(g)$, alors $f = O_a(g)$.

Démonstration. Supposons que $f = o_a(g)$. Le rapport $\frac{f}{g}$ converge donc vers 0 en a : il est donc borné au voisinage de a . De plus, si f et g sont définies en a avec $g(a) = 0$, on a bien $f(a) = 0$ puisque $f = o_a(g)$.

Conclusion : $f = O_a(g)$. □

Remarque 18.1.26

La réciproque est fausse ! On a $x^2 = O_{x \rightarrow 0}(x^2)$ mais pas $x^2 = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Propriété 18.1.27

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$.

On a l'équivalence

$$f = O_a(1) \iff f \text{ est bornée au voisinage de } a$$

Démonstration. La fonction $x \mapsto 1$ ne s'annule pas en 0.

C'est direct :

$$f = o_a(1) \iff \frac{f(x)}{1} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

□

Propriété 18.1.28 – Comparaison de monômes

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x^\alpha = O_{x \rightarrow 0}(x^\beta) \iff \alpha \geq \beta$$

$$x^\alpha = O_{x \rightarrow \pm\infty}(x^\beta) \iff \alpha \leq \beta$$

Démonstration. Preuve similaire à la propriété 18.1.7, en remplaçant la convergence vers 0 en a par le fait d'être bornée au voisinage de a . □

Remarque 18.1.29

Les propriétés 18.1.9, 18.1.11, 18.1.12, 18.1.13, 18.1.17 (qui concernent la somme, le produit et la composition) s'adaptent sans difficulté à la relation de domination.

18.1.3 Relation d'équivalence

Définition 18.1.30 – Fonctions équivalentes en un point

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.
On dit que f et g sont *équivalentes en a* si

$$f = g + o_a(g)$$

On note alors $f \sim_a g$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Remarque 18.1.31

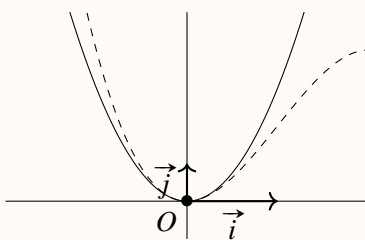
- Si f et g sont définies en a , alors $f \sim_a g$ implique que $f(a) = g(a)$. En effet, si $f \sim_a g$ alors $f - g = o_a(g)$ donc $(f - g)(a) = 0$ ou encore $f(a) = g(a)$.
- Remarquons que, si $l \in \mathbb{K}^*$, alors dire que $f \sim_a l$ revient à dire que $f = l + o_a(l)$ ou encore que $f = l + o_a(1)$, c'est-à-dire que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Exemple 18.1.32

Puisque $x^3 = o_{x \rightarrow 0}(x)$, alors $-x^3 = o_{x \rightarrow 0}(3x^2)$ donc

$$-x^3 + 3x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x^2$$

Voici l'allure des courbes des fonctions $x \mapsto -x^3 + 3x^2$ et $x \mapsto 3x^2$ au voisinage de 0 :



On remarque que les courbes sont presque confondues au voisinage de 0 : cette ressemblance est validée par l'équivalence précédente.

Exercice 18.1.33

Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f : x \mapsto 3e^x + x^2$.

Propriété 18.1.34 – Fonctions équivalentes en un point (deuxième version)

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est équivalente à g en a .
2. $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ (et $f(a) = 0$ si f et g sont définies en a , avec $g(a) = 0$).

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
 f \underset{a}{\sim} g &\iff f = g + o_a(g) \\
 &\iff f - g = o_a(g) \\
 &\iff \frac{f - g}{g} \underset{a}{\rightarrow} 0 \text{ et } ((f - g)(a) = 0 \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont définies en } a \text{ avec } g(a) = 0) \\
 &\iff \frac{f}{g} - 1 \underset{a}{\rightarrow} 0 \text{ et } (f(a) = g(a) \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont définies en } a \text{ avec } g(a) = 0) \\
 &\iff \frac{f}{g} \underset{a}{\rightarrow} 1 \text{ et } (f(a) = 0 \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont définies en } a \text{ avec } g(a) = 0)
 \end{aligned}$$

□

Propriété 18.1.35 – Des équivalences classiques

On a :

$$\begin{aligned}
 e^x - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\
 \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \cos(x) - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2 \\
 \tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & (1+x)^\alpha - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \\
 \operatorname{sh}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \operatorname{ch}(x) - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2 \\
 \arctan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x
 \end{aligned}$$

Démonstration. La fonction $x \mapsto x$ ne s'annule qu'en 0. De plus, $e^0 - 1 = 0$ donc les fonctions $x \mapsto e^x - 1$ et $x \mapsto 0$ ont même valeur en 0. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
 \frac{e^x - 1}{x} &= \frac{e^x - e^0}{x - 0} \text{ (taux d'accroissement de exp en 0)} \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp'(0) = e^0 = 1
 \end{aligned}$$

On a donc bien : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

De même $\ln(1+0) = 0$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0}$$

or la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $] -1; +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. En particulier, $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable

en 0 et sa dérivée en 0 vaut $\frac{1}{1+0} = 1$.

Finalement

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

et $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Les équivalents pour \sin , $(1+x)^\alpha$, sh , et \arctan se démontrent de la même manière.

Pour $\cos - 1$ et $\operatorname{ch} - 1$, la preuve est faite un peu plus loin (après avoir vu la compatibilité avec le produit, le quotient et les puissances). □

Corollaire 18.1.36

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$. Alors :

- f et g sont de mêmes signes stricts au voisinage de a .
- Si g admet une limite l (pas nécessairement finie) en a , alors f admet aussi l pour limite en a .

Démonstration. — Puisque $f \underset{a}{\sim} g$, on peut écrire que $f = g + o_a(g) = g + g \times o_a(1) = g \times (1 + o_a(1))$, où $1 + o_a(1)$ est une fonction définie au voisinage de a convergente vers 1 en a . Cette fonction est donc, au voisinage de a , strictement positive : f et g ont bien même signe strict au voisinage de a .

— Supposons que $g \xrightarrow{a} l$, avec $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors, comme ci-dessus :

$$f = \underbrace{g}_{\xrightarrow{a} l} \times \underbrace{(1 + o_a(1))}_{\xrightarrow{a} 1} \xrightarrow{a} l$$

□

Propriété 18.1.37

Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

On suppose que :

- $f = o_a(g)$
- $g \underset{a}{\sim} h$

Alors $f = o_a(h)$.

Démonstration. Si f, g et h sont définies en a , et si $h(a) = 0$, on a $g(a) = 0$ puisque $g \underset{a}{\sim} h$ et $f(a) = 0$ puisque $f = o_a(g)$. De plus, pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \times 1 = 0$$

On a donc bien $f = o_a(h)$.

□

Propriété 18.1.38

Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

- La relation $\underset{a}{\sim}$ est **réflexive** : $f \underset{a}{\sim} f$.
- La relation $\underset{a}{\sim}$ est **symétrique** : si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$.
- La relation $\underset{a}{\sim}$ est **transitive** : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Démonstration. — On a $f = f + 0$ et $0 = o_a(f)$ donc $f \underset{a}{\sim} f$.

— Direct d'après 18.1.34.

— Supposons que $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$. Alors $f = g + o_a(g)$ et $g = h + o_a(h)$ donc

$$\begin{aligned} f &= g + o_a(h) \text{ car } g \underset{a}{\sim} h \\ &= h + o_a(h) + o_a(h) \\ &= h + o_a(h) \end{aligned}$$

□

Exemple 18.1.39

On sait que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc, par symétrie : $x \underset{0}{\sim} \ln(1+x)$.

Or $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc par transitivité :

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} \ln(1+x)$$

Propriété 18.1.40 – Compatibilité avec le produit

Soient $f, g, h, i \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} i$.

Alors

$$f \times h \underset{a}{\sim} g \times i$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} f \times h &= \left(g + o_a(g)\right) \left(i + o_a(i)\right) \\ &= gi + \underbrace{g \times o_a(i)}_{=o_a(gi)} + \underbrace{i \times o_a(g)}_{=o_a(gi)} + \underbrace{o_a(g) \times o_a(i)}_{=o_a(gi)} \\ &= gi + o_a(gi) \end{aligned}$$

donc $fh \underset{a}{\sim} gi$.

□

Exercice 18.1.41

Déterminer un équivalent simple de $x \mapsto (x^2 + x^5 - 12x^3)(e^x + 1)$ en $+\infty$.

Propriété 18.1.42 – Compatibilité avec le quotient

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

Alors

$$\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{i}$$

Démonstration. On a $f \underset{a}{\sim} g$ et $i \underset{a}{\sim} h$ donc, par compatibilité par produit :

$$f \times i \underset{a}{\sim} g \times h$$

En multipliant par $\frac{1}{i}$ (c'est possible puisque i ne s'annule pas au voisinage de a , quitte à exclure a), et toujours grâce à la

compatibilité par produit, on obtient

$$f \underset{a}{\sim} \frac{g \times h}{i}$$

De la même façon, en multipliant par $\frac{1}{h}$ on obtient finalement

$$\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{i}$$

□

Exercice 18.1.43

Trouver un équivalent simple en 0 de

$$x \mapsto \frac{x^2 + 5x^5 - 12x}{\ln(1+x)}$$

Attention !

La relation d'équivalence est compatible avec le produit et le quotient, mais pas avec l'addition ! Par exemple, $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$, $-x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x$ mais il est faux de dire que $2 = (x+1) + (-x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x + (-x) = 0$.

Propriété 18.1.44 – Compatibilité avec les puissances entières positives

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$.

Alors $f^n \underset{a}{\sim} g^n$.

Démonstration. On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^n \underset{a}{\sim} g^n$.

— Pour $n = 0$, c'est évident, puisque $f^0 = 1 = g^0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n \underset{a}{\sim} g^n$. Alors

$$f^{n+1} = f^n \times f \underset{a}{\sim} g^n \times g = g^{n+1}$$

d'après la propriété 18.1.40 puisque $f \underset{a}{\sim} g$ et $f^n \underset{a}{\sim} g^n$.

Par récurrence, la propriété est bien prouvée.

□

Propriété 18.1.45

On a :

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{2} x^2$$

$$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} x^2$$

Démonstration. Pour $\cos - 1$, prenons $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0 et remarquons que

$$\cos(x) - 1 = \frac{\cos^2(x) - 1}{\cos(x) + 1} = \frac{-\sin^2(x)}{\cos(x) + 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$$

puisque $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\cos(x) + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 \neq 0$. Le principe est le même pour $\operatorname{ch} - 1$.

□

Exercice 18.1.46

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{((1+x)^3 - 1)^2}$$

Corollaire 18.1.47 – Compatibilité avec les puissances entières relativesSoient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$ et que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a .Soit $n \in \mathbb{Z}$.Alors $f^n \underset{a}{\sim} g^n$.*Démonstration.* Si $n \geq 0$, le résultat a été prouvé dans la propriété précédente.Supposons que $n < 0$.Puisque $f \underset{a}{\sim} g$ on a par compatibilité par quotient : $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$. D'après la propriété précédente, et puisque $-n > 0$:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{-n} \underset{a}{\sim} \left(\frac{1}{g}\right)^{-n}$$

ou encore

$$f^n \underset{a}{\sim} g^n$$

□

Exercice 18.1.48Trouver un équivalent simple en 0 de $x \mapsto \frac{(e^x - 1)^n}{(3x + 12\sqrt{x})^n}$, où $n \in \mathbb{Z}$.**Propriété 18.1.49 – Compatibilité avec les puissances (non entières)**Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$. On suppose également que f et g sont strictement positives au voisinage de a .Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.Alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.*Démonstration.* On a simplement

$$\frac{(f(x))^\alpha}{(g(x))^\alpha} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow a} 1^\alpha = 1$$

□

Propriété 18.1.50 – Composition et équivalenceSoient I et J deux intervalles de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit a un point de I (respectivement J), ou une extrémité (finie ou non) de I (respectivement J).Soit $\mathcal{D} = I$ ou $I \setminus \{a\}$ et $\mathcal{D}' = J$ ou $J \setminus \{b\}$.Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.Soient $g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{D}', \mathbb{K})$ ne s'annulant pas au voisinage de b , sauf éventuellement en b lui-même.

On suppose alors que :

$$— g \underset{b}{\sim} h$$

$$— \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Alors $g \circ f \underset{a}{\sim} h \circ f$.

Démonstration. Puisque $g \underset{b}{\sim} h$, on a $g = h + o_b(h)$ donc $g - h = o_b(h)$. On utilise alors la propriété 18.1.17 qui nous donne $(g - h) \circ f = o_a(h \circ f)$ ou encore $g \circ f - h \circ f = o_a(h \circ f)$ ou enfin $g \circ f = h \circ f + o_a(h \circ f)$. Ainsi $g \circ f \underset{a}{\sim} h \circ f$. \square

Exercice 18.1.51

Déterminer un équivalent simple en 0 de $x \mapsto \ln(1 + \sin^2(x))$.

Propriété 18.1.52 – Obtention d'un équivalent par encadrement

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a lui-même.

On suppose que :

$$— \text{Pour } x \in \mathcal{D} \text{ au voisinage de } a, \text{ on a } f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

$$— h \underset{a}{\sim} f$$

Alors $f \underset{a}{\sim} g \underset{a}{\sim} h$.

Démonstration. Par transitivité, il suffit de montrer que $g \underset{a}{\sim} f$.

Remarquons déjà que, dans le cas où ces fonctions sont définies en a avec $f(a) = 0$, on a $h(a) = 0$ (puisque $h \underset{a}{\sim} f$) et

l'encadrement donne $g(a) = 0$. Il reste donc à montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a , l'inégalité de l'énoncé devient

$$0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x)$$

ou encore

$$|g(x) - f(x)| \leq |h(x) - f(x)|$$

donc, en divisant par $|f(x)|$ (qui est strictement positif par hypothèse, quitte à exclure a) :

$$\left| \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \right| \leq \left| \frac{h(x) - f(x)}{f(x)} \right|$$

c'est-à-dire

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right| \leq \left| \frac{h(x)}{f(x)} - 1 \right|$$

Or $h \underset{a}{\sim} f$ donc $\frac{h(x)}{f(x)} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et par encadrement

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$$

ce qui achève cette démonstration. \square

Exercice 18.1.53

Montrer

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

18.2 Cas des suites

Une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'étant finalement qu'un cas particulier de fonction, les définitions et résultats précédents s'étendent sans difficulté à celles-ci (et sont même plus simples, puisque le seul « point » intéressant est alors $+\infty$, en lequel une suite ne peut pas être définie).

Définition 18.2.1

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. On note alors $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$.
- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel qu'à partir d'un certain rang, on a $\left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq M$. On note alors $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n)$.
- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Remarque 18.2.2

S'il n'y a pas de risque de confusion, on peut écrire $u_n = o(v_n)$ (sans préciser que n tend vers $+\infty$), puisque $+\infty$ est ici le seul point intéressant.

Exercice 18.2.3

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Exercice 18.2.4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

- Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie et est positive.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
- Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
- Montrer que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}$$

18.3 Développements limités

On reprend les notations précédentes : I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, a est un élément de I ou une extrémité de I , et $\mathscr{D} = I$ ou $I \setminus \{a\}$.

18.3.1 Définition

L'objectif des développements limités est le suivant : on aimerait approcher, *au voisinage d'un point a* , une fonction f (potentiellement compliquée) par une fonction polynomiale, de façon à pouvoir étudier le comportement de f au voisinage de a . Bien sûr, on souhaite aussi garder un certain contrôle sur l'erreur d'approximation commise.

Intuitivement, on a déjà utilisé cette idée lorsque nous avons approché la courbe d'une fonction dérivable en un point a par sa tangente (qui n'est autre que la courbe d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1).

Définition 18.3.1 – Développement limité d'une fonction en un point

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n en a* s'il existe une famille $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$ telle que, pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

ou encore

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^n a_k (X-a)^k$ est appelée *partie régulière* de ce développement limité.

Remarque 18.3.2

— Le $o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$ représente l'erreur d'approximation lorsque l'on approche, au voisinage de a , f par la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$.

Plus n est grand, plus précise est cette approximation (au prix de calculs plus lourds) !

— Dire que f admet un développement limité à l'ordre n en a revient donc à dire qu'il existe $P_f \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a :

$$f(x) = P_f(x-a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

La partie régulière de ce développement limité est alors $P_f(X-a)$, qui est encore de degré inférieur ou égal à n .

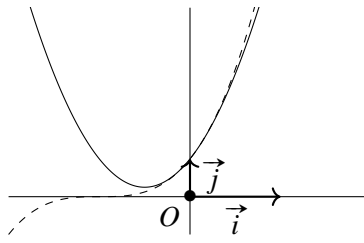
Exercice 18.3.3

Montrer que $f : x \mapsto (1+x)^3$ admet, en 0, un développement limité à l'ordre 2.

Correction. f est définie sur \mathbb{R} , et pour $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = 1 + 3x + 3x^2 + \underbrace{x^3}_{o_{x \rightarrow 0}(x^2)} = 1 + 3x + 3x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

f admet donc bien un développement limité à l'ordre 2 en 0.



En traits plein, la fonction $x \mapsto (1+x)^3$. En pointillés, la fonction $x \mapsto 1 + 3x + 3x^2$.

Exemple 18.3.4

On a vu que

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$$

Cela s'écrit encore $\cos(x) - 1 = \frac{-1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$, ainsi

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Voici donc le développement limité à l'ordre 2 de \cos en 0 !

Exercice 18.3.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in]-1; 1[$, on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$. En déduire que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et préciser celui-ci.

Propriété 18.3.6 – Développement limité en un point autre que 0

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$
2. Pour $h \in \{x-a, x \in \mathcal{D}\}$ au voisinage de 0 : $f(a+h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$

Démonstration. Le sens $1 \implies 2$ s'obtient par composition avec la fonction $x \mapsto x-a$ (qui a bien pour limite 0 en a). Le sens $2 \implies 1$ s'obtient par composition avec $h \mapsto a+h$. \square

Exercice 18.3.7

Montrer que $f : x \mapsto (1+x)^3$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 3, et déterminer ce dernier.

Correction. Pour $h \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0 :

$$f(3+h) = (1+h+3)^3 = (4+h)^3 = 4^3 + 3 \times 4^2 h + 3 \times 4h^2 + h^3$$

donc

$$f(3+h) = 64 + 48h + 12h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$$

ou encore

$$f(x) = 64 + 48(x-3) + 12(x-3)^2 + o_{x \rightarrow 3}((x-3)^2)$$

Propriété 18.3.8 – Unicité d'un développement limité

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$.

On suppose qu'il existe deux familles $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$ et $(b_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$ telles que, pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Alors :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = b_k$$

Remarque 18.3.9

Autrement dit, si f admet un développement limité à l'ordre n en a , celui-ci est unique.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble

$$A = \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k \neq b_k\}$$

ne soit pas vide. Étant une partie non vide de \mathbb{N} , il admet un plus petit élément, que nous noterons k_0 . En particulier, pour tout $k \in \llbracket 0; k_0 - 1 \rrbracket$, on a $a_k = b_k$.

Pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a , l'égalité

$$\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

se traduit alors par

$$\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k - \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) - o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^n (a_k - b_k) (x-a)^k = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{k_0-1} \underbrace{(a_k - b_k)}_{=0} (x-a)^k + \sum_{k=k_0}^n (a_k - b_k) (x-a)^k = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

ou enfin

$$\sum_{k=k_0}^n (a_k - b_k) (x-a)^k = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \quad (\star)$$

Pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus \{a\}$ au voisinage de a , et en divisant (\star) par $(x-a)^{k_0}$, on obtient

$$\sum_{k=k_0}^n (a_k - b_k) (x-a)^{k-k_0} = o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n-k_0})$$

ou encore

$$\underbrace{a_{k_0} - b_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^n (a_k - b_k) (x-a)^{\overbrace{k-k_0}^{>0}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0} = \underbrace{o_{x \rightarrow a} \left((x-a)^{\overbrace{n-k_0}^{>0}} \right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0}$$

ce qui donne, en passant à la limite lorsque x tend vers a :

$$a_{k_0} - b_{k_0} = 0$$

C'est absurde : cela contredit la définition de k_0 . L'ensemble $A = \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k \neq b_k\}$ est donc vide, de sorte que

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = b_k$$

□

Propriété 18.3.10 – Développement limité et parité

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ ou $\mathcal{F}(I \setminus \{0\}, \mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0, de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

- Si f est paire, alors pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ **impair**, on a $a_k = 0$.
- Si f est impaire, alors pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ **pair**, on a $a_k = 0$.

Démonstration. — Supposons que f est paire. D'une part, pour $x \in I$ au voisinage de 0, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

D'autre part, f est paire et $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$ donc par composition :

$$f(x) = f(-x) = \sum_{k=0}^n a_k (-x)^k + o_{x \rightarrow 0}((-x)^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Par unicité du développement limité à l'ordre n de f en 0, on a donc pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$a_k = (-1)^k a_k$$

En particulier, si k est impair, alors on obtient $a_k = -a_k$ donc $a_k = 0$.

— Similaire, laissé en exercice.

□

18.3.2 Opérations sur les développements limités.

Troncature

Qui peut le plus peut le moins : un développement limité à un ordre « élevé » permet aussi un développement limité à un ordre plus faible (mais parfois suffisant !).

Propriété 18.3.11 – Troncature d'un développement limité

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$.

On suppose que f est définie au voisinage de a , et que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Alors pour tout $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^m a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^m)$$

Démonstration. Soit $m \in \llbracket 0; m \rrbracket$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \\ &= \sum_{k=0}^m a_k (x-a)^k + \sum_{k=m+1}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \\ &= \sum_{k=0}^m a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^m) \end{aligned}$$

puisque pour tout $k \in \llbracket m+1; n \rrbracket$, on a $(x-a)^k = o_{x \rightarrow a}((x-a)^m)$. □

Combinaison linéaire

Contrairement aux équivalents, les développements limités peuvent s'ajouter.

Propriété 18.3.12 – Combinaison linéaire de développements limités

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a , dont les parties régulières sont respectivement $P_f(X-a)$ et $P_g(X-a)$, où P_f et P_g sont deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$.

Alors $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre n en a , dont la partie régulière est $\lambda P_f(X-a) + \mu P_g(X-a)$.

Démonstration. Pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + \mu g(x) &= \lambda \left(P_f(x-a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \right) + \mu \left(P_g(x-a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \right) \\ &= \lambda P_f(x-a) + \mu P_g(x-a) + \underbrace{\lambda o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) + \mu o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)}_{= o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)} \\ &= \lambda P_f(x-a) + \mu P_g(x-a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \end{aligned}$$

Puisque $\lambda P_f(X-a) + \mu P_g(X-a)$ est bien dans $\mathbb{K}_n[X]$ (ce dernier étant stable par combinaison linéaire), on a bien montré que $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre n en a , dont la partie régulière est $\lambda P_f(X-a) + \mu P_g(X-a)$. □

Exercice 18.3.13

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \cos(x) - \frac{1}{1-x}$$

Correction. Pour $x \in]-1; 1[$, on peut écrire (en réutilisant les résultats prouvés dans les précédents exercices) :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - \left(1 + x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\ &= -x - \frac{3}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

qui est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .

Produit

Propriété 18.3.14 – Produit de développements limités

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a , dont les parties régulières sont $P_f(X-a)$ et $P_g(X-a)$ où P_f et P_g sont dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Alors fg admet un développement limité à l'ordre n en a , dont la partie régulière est $R(X-a)$, où R est obtenu en calculant le produit $P_f P_g$ et en n'en gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n .

Démonstration. Pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a , on peut écrire :

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x) \\ &= \left(P_f(x-a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)\right) \left(P_g(x-a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)\right) \\ &= (P_f P_g)(x-a) + P_f(x-a) o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \\ &\quad + P_g(x-a) o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) + \left(o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)\right)^2\end{aligned}$$

Or :

— $P_f P_g$ n'est pas forcément de degré inférieur ou égal à n , mais on peut l'écrire sous la forme $P_f P_g = \sum_{k=0}^d r_k X^k$, avec $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq n$. On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned}(P_f P_g)(x-a) &= \sum_{k=0}^d r_k (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^n r_k (x-a)^k + \sum_{k=n+1}^d r_k \underbrace{(x-a)^k}_{= o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)} \\ &= R(x-a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)\end{aligned}$$

avec $R = \sum_{k=0}^n r_k X^k$, polynôme obtenu en ne gardant, dans le produit $P_f P_g$, que les termes de degré inférieur ou égal à n .

— Notons $P_f = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors :

$$\begin{aligned}P_f(x-a) o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) &= \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+k})}_{= o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)} \\ &= o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)\end{aligned}$$

par transitivité.

— De même :

$$P_g(x-a) o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

— Enfin,

$$\left(o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \right)^2 = o_{x \rightarrow a}((x-a)^{2n}) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Commentaire

On rappelle qu'il s'agit ici des notations de Landau : ces « égalités » se lisent donc de gauche à droite uniquement.

Conclusion : pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a , on a bien

$$(fg)(x) = R(x) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

où R est obtenu en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit $P_f P_g$. □

Exercice 18.3.15

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{1-x}$$

Quotient

Propriété 18.3.16

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a .

On suppose que g admet une limite finie non nulle en a . Alors $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en a .

Idée de la preuve. Notons $l = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Par hypothèse, $l \in \mathbb{R}^*$.

Pour $x \in \mathcal{D}$ au voisinage de a , on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)}{l + (g(x) - l)} \\ &= \frac{1}{l} f(x) \frac{1}{1 - \frac{l-g(x)}{l}} \end{aligned}$$

On obtient alors par composition le développement limité à l'ordre n en a de $x \mapsto \frac{1}{1 - \frac{l-g(x)}{l}}$. En effet, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{l-g(x)}{l} = 0$

et on connaît (voir exercice 18.3.5) le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

On conclut en effectuant le produit avec le développement limité de f . □

Exercice 18.3.17

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \frac{1+x+x^3}{\cos(x)}$.

Correction. Pour $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x+o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{1-\frac{1}{2}x^2+o_{x \rightarrow 0}(x^2)} \\ &= \left(1+x+o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \times \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}x^2+o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)} \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}x^2+o_{x \rightarrow 0}(x^2) = 0$ donc par composition :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+x+o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \times \left(1+\left(\frac{1}{2}x^2+o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)+\left(\frac{1}{2}x^2+o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)^2\right. \\ &\quad \left.+o_{x \rightarrow 0}\left(\left(\frac{1}{2}x^2+o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)^2\right)\right) \\ &= \left(1+x+o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \left(1+\frac{1}{2}x^2+o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}x^2+x+o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

Primitivation

Propriété 18.3.18 – Primitivation d'un développement limité

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, et soit $a \in I$.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ une fonction dérivable sur I .

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f' admet un développement limité à l'ordre n en a , c'est-à-dire que pour $x \in I$ au voisinage de a :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a , et pour $x \in I$ au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$$

Démonstration. On suppose pour le moment que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour $x \in I$, posons

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1}$$

Il s'agit de montrer que, pour $x \in I$ au voisinage de a , on a $\varphi(x) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$.

Remarquons déjà que les fonctions φ et $x \mapsto (x-a)^{n+1}$ s'annulent en a .

De plus, φ est par hypothèse dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$\varphi'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \quad (\star)$$

Soit alors $x \in I \setminus \{a\}$. Par hypothèse, φ est continue et dérivable sur $[a; x]$ (ou $[x; a]$ si $x < a$) : d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in I$ tel que :

$$|c_x - a| < |x - a| \text{ et } \varphi'(c_x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \frac{\varphi(x)}{x - a}$$

car $\varphi(a) = 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| &= \left| \frac{\varphi(x)}{x-a} \times \frac{1}{(x-a)^n} \right| \\ &= \left| \varphi'(c_x) \frac{1}{(x-a)^n} \right| \\ &= \left| \frac{\varphi'(c_x)}{(c_x-a)^n} \right| \times \left| \frac{c_x-a}{x-a} \right|^n \\ &\leq \left| \frac{\varphi'(c_x)}{(c_x-a)^n} \right| \text{ car } |c_x-a| < |x-a| \text{ donc } \left| \frac{c_x-a}{x-a} \right| < 1 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{— } \varphi'(x) &= o((x-a)^n) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{(x-a)^n} = 0. \\ \text{— } |c_x-a| &< |x-a| \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} |x-a| = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow a} c_x = a. \end{aligned}$$

Par composition de limites, on a bien $\left| \frac{\varphi'(c_x)}{(c_x-a)^n} \right| = 0$ et par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$$

Conclusion : pour $x \in I$ au voisinage de a , on a bien

$$\varphi(x) = o((x-a)^{n+1})$$

ce qui achève la démonstration dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il suffit d'appliquer le résultat précédent aux fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. □

Exercice 18.3.19

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n de la fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$.

Correction. La fonction f est dérivable sur $I =]-1; 1[$ et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\left(\sum_{k=0}^n x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \right) = \sum_{k=0}^n -x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Par primitivation, on obtient pour $x \in I$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = \ln(1-x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{-1}{k+1} x^{k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) = -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$$

Remarque 18.3.20

Cette propriété est assez pratique : elle permet de gagner un ordre et de passer d'un développement limité à l'ordre n à un développement limité à l'ordre $n + 1$.

Par exemple, on sait que

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Par primitivation (sin étant dérivable sur \mathbb{R}), on a

$$\sin(x) = \sin(0) + x - \frac{1}{6}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

En primitivant de nouveau, on obtient

$$-\cos(x) = -\cos(0) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

ou encore

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

et on pourrait continuer ainsi pour obtenir un développement limité de cos et sin à un ordre arbitrairement grand. Ceci dit, en général, on utilise plutôt la formule de Taylor-Young ci-après.

18.3.3 Lien avec la dérivation**Dérivée d'ordre 1**

On a déjà vu le résultat suivant, dans le chapitre sur la dérivation.

Propriété 18.3.21

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Alors f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a .

Dans ce cas, on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_{x \rightarrow a}(x-a)$$

Formule de Taylor-Young**Théorème 18.3.22 – Formule de Taylor-Young**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a , et celui-ci est donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Démonstration. Cette formule se montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— Posons $n = 0$ et supposons que $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. f est donc continue en a : on a donc $f(x) - f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ ou encore

$$f(x) - f(a) = o_{x \rightarrow a}(1), \text{ c'est-à-dire que}$$

$$f(x) = f(a) + o_{x \rightarrow a}(1)$$

La formule est bien vraie au rang $n = 0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la formule vraie au rang n .

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. En particulier, f est dérivable sur I et $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Par hypothèse de récurrence, on peut donc écrire que pour $x \in I$ au voisinage de a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \end{aligned}$$

En primitivant, on obtient alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}}{k+1} (x-a)^{k+1} + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1}) \\ &= f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1}) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1}) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. □

18.3.4 Développement limité de référence

Propriété 18.3.23

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\left(\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)\right)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

Exemple 18.3.24

Par exemple :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Démonstration. — Le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ a été montré dans l'exercice 18.3.5. Celui

de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est alors obtenu en composant avec la fonction $x \mapsto -x$, qui tend bien vers 0 en 0.

— \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , donc d'après la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\exp(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \end{aligned}$$

— Le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \ln(1-x)$ a été montré dans l'exercice 18.3.19. Celui de $x \mapsto \ln(1+x)$ est alors obtenu par composition avec la fonction $x \mapsto -x$, qui tend bien vers 0 en 0.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k -ième de $x \mapsto e^{ix}$ est $x \mapsto i^k e^{ix} = e^{ix+ki\frac{\pi}{2}}$. On en déduit que la dérivée k -ième de \cos et \sin sont

$$\cos^{(k)} : x \mapsto \operatorname{Re} \left(e^{ix+ki\frac{\pi}{2}} \right) = \cos \left(x + k\frac{\pi}{2} \right) \text{ et } \sin^{(k)} : x \mapsto \sin \left(x + k\frac{\pi}{2} \right)$$

Puisque \cos et \sin sont de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur \mathbb{R} , la formule de Taylor-Young s'applique et donne :

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{\cos(j\pi)}{(2j)!} x^{2j} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})\end{aligned}$$

et on procède de même pour \sin .

— Pour \arctan , rappelons que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ donc en composant avec la fonction $x \mapsto x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k x^{2k} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2(n+1)})$$

Or \arctan est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Par primitivation, on obtient alors

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \arctan(0) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+3}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+3}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) \text{ en tronquant à l'ordre } 2n+2\end{aligned}$$

— Pour ch et sh , on remarque que :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x) &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!} (-1)^k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \right) \\ &\quad \quad \quad = 0 \text{ si } k \text{ est impair} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1 + (-1)^k}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{2}{(2j)!} x^{2j} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})\end{aligned}$$

Le raisonnement est le même pour sh .

— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi : x \mapsto (1+x)^\alpha$. φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $I =]-1; +\infty[$ et on montre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \varphi^{(k)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) \right) (1+x)^{\alpha-k}$$

et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi^{(k)}(0) = \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de Taylor-Young pour conclure.

— Pour \tan , on pourrait utiliser la formule de Taylor-Young, mais on peut aussi remarquer que

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{1} = x$$

et donc que $\tan(x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$. Or, \tan est dérivable sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \tan^2(x) \\ &= 1 + \left(x + o_{x \rightarrow 0}(x) \right)^2 \\ &= 1 + x^2 + 2x o_{x \rightarrow 0}(x) + \left(o_{x \rightarrow 0}(x) \right)^2 \\ &= 1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

En primitivant, on obtient :

$$\tan(x) = \tan(0) + x + \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

□

18.4 Exemples d'applications

18.4.1 Extrema locaux

Propriété 18.4.1 – Condition suffisante pour un extrema local

Soit I un intervalle ouvert non vide et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^2 sur I .

Soit $a \in I$ un point critique de f . Alors :

- Si $f''(a) > 0$, f présente un minimum local en a .
- Si $f''(a) < 0$, f présente un maximum local en a .

Démonstration. Puisque a est un point critique de f , on a $f'(a) = 0$. Supposons que $f''(a) \neq 0$.

f étant de classe \mathcal{C}^2 sur I , on peut utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a et écrire pour $x \in I$ au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o_{x \rightarrow a}((x-a)^2)$$

donc

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o_{x \rightarrow a}((x-a)^2)$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + o_{x \rightarrow a}((x-a)^2) \\ &= \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + o_{x \rightarrow a}\left(\frac{f''(a)}{2} (x-a)^2\right) \text{ car } f''(a) \neq 0 \\ &\underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto f(x) - f(a)$ est du signe de $x \mapsto \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2$ au voisinage de a .

- Si $f''(a) > 0$, alors $f(x) - f(a)$ est positif au voisinage de a , ainsi $f(x) \geq f(a)$ au voisinage de a : f présente un minimum local en a .
- Si $f''(a) < 0$, alors $f(x) - f(a)$ est négatif au voisinage de a et f présente un maximum local en a .

□

Remarque 18.4.2

En reprenant les hypothèses de la propriété précédente, si $f''(a) = 0$, on ne peut rien dire.

Par exemple, considérons $f : x \mapsto x^3$.

- f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
- $f'(0) = 0$ donc 0 est un point critique pour f .
- $f''(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0 (elle est strictement croissante).

Considérons maintenant la fonction $g : x \mapsto x^4$: elle est aussi de classe \mathcal{C}^2 , admet 0 pour point critique, et sa dérivée seconde est nulle en 0. Cette fois, cependant, elle admet bien un extremum local en 0 (c'est un minimum, qui est d'ailleurs global).

Exercice 18.4.3

Montrer que la fonction $f : x \mapsto 4(1+x)^3 - 3(1+x)^4$ présente un extremum local, dont on précisera la nature, en 0.

18.4.2 Détermination d'un développement limité

Exemple 18.4.4

Déterminer un développement limité à l'ordre 2 des fonctions suivantes aux points indiqués.

1. $f : x \mapsto e^x$ en 1
2. $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en 1
3. $f : x \mapsto \sqrt{1+xe^x}$ en 0
4. $f : x \mapsto \frac{1}{3+x}$ en 2.

18.4.3 Calculer une dérivée et une dérivée seconde

Exemple 18.4.5

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(4-x)}{\sqrt{5-x}}$. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en 3. En déduire $f(3)$, $f'(3)$ et $f''(3)$.

18.4.4 Étude locale d'une fonction

Exemple 18.4.6

Soit $f : x \mapsto \frac{(2-x)^3}{x}$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en $x_0 = -1$, et préciser la position de la courbe de f par rapport à cette tangente au voisinage de x_0 .

18.4.5 Prolongement d'une fonction

Exemple 18.4.7

Soit $f : x \mapsto \frac{3 \ln(1+x)}{x} - x^2$. Montrer que f est prolongeable en 0 en une fonction dérivable en 0.

18.4.6 Recherche d'une asymptote

Exemple 18.4.8

Soit $f : x \mapsto x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$. Déterminer la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

18.4.7 Un développement asymptotique

Exemple 18.4.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$$

Montrer que

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

18.5 Exercices

Exercice 18.5.1

Pour les fonctions suivantes, aux points considérés, comparer si possible f et g par des relations de négligeabilité ou de domination.

1. $f : x \mapsto x^2 + x$, $g : x \mapsto x^3$ en 0.
2. $f : x \mapsto x^2 + x$, $g : x \mapsto x^3$ en $+\infty$.
3. $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto \sin(x)$ en 0.
4. $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto \sin(x)$ en $+\infty$.
5. $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto 1 + \sin(x)$ en 0.
6. $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$, $g : x \mapsto \ln(x)$ en $+\infty$.

Exercice 18.5.2

Comparer les suites suivantes :

$$(u_n) = n!, (v_n) = n^n, (w_n) = e^n, (z_n) = n^e$$

Exercice 18.5.3

Déterminer un équivalent des fonctions suivantes aux points indiqués :

$$1. f : x \mapsto \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^2 - 4} \text{ en } 1$$

$$2. f : x \mapsto \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^2 - 4} \text{ en } 0$$

$$3. g : x \mapsto \frac{e^{x-1} - 1}{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^2 - 4} \text{ en } 1$$

$$4. g : x \mapsto \frac{e^{x-1} - 1}{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^2 - 4} \text{ en } 0$$

Exercice 18.5.4

Étudier les limites des fonctions suivantes aux bords de leur ensemble de définition :

$$1. f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$2. g : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3}$$

$$3. h : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}$$

Exercice 18.5.5

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer :

$$(1+x)^n - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} nx$$

2. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - 1}{(1+x)^3 - 1}$$

Exercice 18.5.6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$$

2. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt[5]{1+x} - 1}$$

Exercice 18.5.7

Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de f au point indiqué dans les cas suivants :

1. $f(x) = (x^2 - 1)e^x$ en 0

2. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ en 0

3. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ en 2

4. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x} + 1\right)$ en 1

5. $f(x) = \frac{4+x}{1+x}$ en 0

6. $f(x) = \frac{4+x}{1+x}$ en 2

7. $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ en 0

8. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-\ln(1+x)}}$ en 0

Exercice 18.5.8

Déterminer les développements limités suivants :

1. $f : x \mapsto \sin(x) \operatorname{sh}(x)$ à l'ordre 4 en 0.

2. \sin à l'ordre 5 en $\frac{\pi}{4}$.

3. $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)}$ à l'ordre 3 en 0.

4. $f : x \mapsto (\sin(x))^3$ à l'ordre 6 en 0.

5. $f : x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}$ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 18.5.9

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{1+x} - 1} - \frac{a}{x} + b = 0$$

Exercice 18.5.10

Sans dériver, déterminer l'allure (tangente et position de la courbe par rapport à celle-ci) de la courbe de $f : x \mapsto \cos(x) + \frac{x}{2} \sin(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 18.5.11

Déterminer l'allure de la courbe de $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x}) e^x$ au voisinage de 0.

Exercice 18.5.12

Déterminer l'allure de la courbe de $f : x \mapsto \cos(\sqrt{|x|}) e^x$ au voisinage de 0.

Exercice 18.5.13

Déterminer les points critiques de $f : x \mapsto (x+2)e^x$ et préciser s'il s'agit d'extrema locaux.

Exercice 18.5.14

Décrire l'allure (tangente et position de la courbe) de $f : x \mapsto x(e^x + e^{-x}) + 1$ en 0.

Exercice 18.5.15

Décrire l'allure de $f : x \mapsto (x^2 - 4x + 5)e^x$ en 1 et en -1 .

Exercice 18.5.16 – EDHEC 2004

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul. On note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = xe^{-n/x}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$. On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Montrer que f_n est continue à droite et dérivable à droite en 0. Donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n .
2. Montrer que f_n est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $f_n'(x)$ et déterminer son signe.
3. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^- . Dresser le tableau de variation de f_n .
4. Rappeler le DL à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
5. En déduire que lorsque x est au voisinage de $+\infty$ on a

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

6. Etudier les asymptotes de f_n ainsi que la position de \mathcal{C}_n par rapport à ces asymptotes.
7. Donner l'allure de la courbe \mathcal{C}_1 .

Exercice 18.5.17

Déterminer un équivalent en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

Exercice 18.5.18

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 18.5.19

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \right)^n$$

Exercice 18.5.20

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$. Déterminer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Exercice 18.5.21

On définit une suite (u_n) en posant

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n} \end{cases}$$

1. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n}$$

2. Montrer : $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$.

3. Montrer : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

4. Montrer : $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

Exercice 18.5.22

Comparer les fonctions suivantes au voisinage de 0 :

1. $x \mapsto x^3 \ln(x)$ et $x \mapsto \ln(1 + 2x)$;

2. $x \mapsto x^4 \ln(x)$ et $x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x} \sin(x)$.

Exercice 18.5.23

Déterminer, à l'aide d'équivalents, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}$;

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)(1 - \cos(x))}{3x^3 + 2x^4}$;

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 18.5.24

Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour :

1. $(\ln(1 + e^{-n^2}))^{\frac{1}{n}}$;

2. $\left(\frac{e^n}{1 + e^{-n}} \right)^n$.

Exercice 18.5.25

1. Calculer le $DL_3(2)$ de $x \mapsto \sqrt{x}$.

2. La fonction racine carrée admet-elle un DL d'ordre $n \geq 1$ en 0 ?

Exercice 18.5.26

Calculer les DL suivants :

1. $x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0 ;

2. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0 ;

3. $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 2}$ à l'ordre 3 en 0 ;

4. $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$ à l'ordre 4 en 0 ;
5. $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 18.5.27

On considère l'application f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}.$$

1. Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Interpréter ce résultat.

Exercice 18.5.28

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f donnée par $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x(e^x - 1)}$.
2. En déduire que f se prolonge en une fonction dérivable en 0. Donner la valeur du prolongement et de sa dérivée en 0.
3. Déterminer la limite de la suite $n \frac{\frac{1}{n} - 1}{e^{1/n} - 1} - \frac{1}{2}$.

Exercice 18.5.29

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre indiqué au point indiqué :

1. $f : x \mapsto \cos(x) \ln(1+x)$, $f : x \mapsto e^x \ln(1+x)$, $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4 en 0 ;
2. $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$, $f : x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$, $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $f : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{(e^x - 1)^2}$ à l'ordre 4 en 0 ;
3. $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$;
4. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$;
5. $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ à l'ordre 4 en 0 (calculer d'abord le développement limité de f').

Exercice 18.5.30

Déterminer la limite de $\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}$ quand $x \rightarrow 1$.

Exercice 18.5.31

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^n + x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution, que l'on notera x_n .
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante et convergente vers 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = 1 - x_n$.
3. Montrer que $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\ln(y_n)}{n}$.
4. Montrer que $\ln(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(n)$.
5. En déduire un développement asymptotique de (x_n) .

18.6 DM conducteur**Exercice 56 –** PTS 6

Déterminer le développement limité de la fonction donnée, au point donné, à l'ordre indiqué dans les cas suivants :

1. $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$ à l'ordre 5 en 0. PTS 1.5
2. $f : x \mapsto \sqrt{1 + \cos(x)}$ à l'ordre 5 en 0. PTS 1.5
3. $f : x \mapsto \cos(x) \sin(x)$ à l'ordre 5 en $\frac{\pi}{4}$. PTS 1.5
4. $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ à l'ordre 2 en 0. PTS 1.5

Correction. 1. Notons que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ donc \cos est positive au voisinage de 0. f est donc bien définie au voisinage de 0. Pour $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)} \end{aligned}$$

Cependant :

$$— \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o_{u \rightarrow 0}(u^3)$$

$$— \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) = 0$$

On peut donc procéder par composition. De plus :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)\right)^2 &= \frac{1}{4}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \\ \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)\right)^3 &= \left(\frac{1}{4}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)\right) \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)\right) \\ &= o_{x \rightarrow 0}(x^5) \end{aligned}$$

En effet, pour ce dernier terme et en développant, on n'obtient que des termes négligeables devant x^5 en 0.

Commentaire

On part quand même avec un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $u \mapsto \sqrt{1+u}$. Si on s'arrêtait à l'ordre 2, on obtiendrait un $o_{u \rightarrow 0}(u^2)$ ou encore, après composition, un $o_{x \rightarrow 0}\left(\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)\right)^2\right)$ c'est-à-dire un $o_{x \rightarrow 0}(x^4)$. On n'obtiendrait donc pas un développement limité à l'ordre 5.

Finalement :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \right) + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \end{aligned}$$

2. On a $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \cos(x) = 2$ donc $x \rightarrow 1 + \cos(x)$ est positive au voisinage de 0 et f est bien définie au voisinage de 0.

Pour $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0, on a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 + 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)} \\ &= \sqrt{2 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)} \end{aligned}$$

Cependant :

$$- \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o_{u \rightarrow 0}(u^3)$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) = 0$$

De plus :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \right)^2 &= \frac{1}{16}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \\ \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \right)^3 &= o_{x \rightarrow 0}(x^5) \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{16}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \right) + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \right) \\ &= \sqrt{2} \times \left(1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{384}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \right) \\ &= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{384}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \end{aligned}$$

3. f est définie sur \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0, posons $h = x - \frac{\pi}{4}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos(x) \sin(x) \\
 &= \frac{1}{2} \sin(2x) \\
 &= \frac{1}{2} \sin\left(2 \times \left(h + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sin\left(2h + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cos(2h) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2!} \times (2h)^2 + \frac{1}{4!} \times (2h)^4 + o_{h \rightarrow 0}(h^5)\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - 2h^2 + \frac{2}{3}h^4 + o_{h \rightarrow 0}(h^5)\right) \\
 &= \frac{1}{2} - h^2 + \frac{1}{3}h^4 + o_{h \rightarrow 0}(h^5)
 \end{aligned}$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + o_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5\right)$$

4. f est définie sur \mathbb{R} et pour $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} &= (1+e^x)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \left(1 + 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 2^{-\frac{1}{2}} \times \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Or :

$$— (1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o_{u \rightarrow 0}(u^2)$$

$$— \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) = 0$$

et

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

donc

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \\
 &\quad + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{4}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\
 &= 1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)
 \end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à développer (ne pas oublier le $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$) :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \times (1 + e^x)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \left(1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{3}{4}x + \frac{7}{32}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}}x + \frac{7}{32\sqrt{2}}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)
 \end{aligned}$$

Exercice 57 – PTS 3

Déterminer l'allure de la courbe de

$$f : x \mapsto 3 + 2 \frac{\ln(x)}{3-x}$$

au voisinage de 1 (tangente et position de la courbe par rapport à celle-ci). PTS 3

Correction. f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{3\}$ donc est bien définie au voisinage de 1. Pour $x \in \mathcal{D}_f$ au voisinage de 1, posons $h = x - 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(1+h) \\
 &= 3 + 2 \frac{\ln(1+h)}{3-(1+h)} \\
 &= 3 + 2 \ln(1+h) \times \frac{1}{2-h} \\
 &= 3 + 2 \ln(1+h) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{h}{2}} \\
 &= 3 + \ln(1+h) \times \frac{1}{1-\frac{h}{2}}
 \end{aligned}$$

Or :

$$— \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 o_{u \rightarrow 0}(u^2)$$

$$— \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2} = 0$$

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-\frac{h}{2}} &= 1 + \frac{h}{2} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\
 &= 1 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)
 \end{aligned}$$

De plus

$$\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o_{h \rightarrow 0}(h^3)$$

On peut reprendre le calcul :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \left(h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o_{h \rightarrow 0}(h^3) \right) \left(1 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \right) \\ &= 3 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{4}h^3 - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{4}h^3 + \frac{1}{3}h^3 + o_{h \rightarrow 0}(h^3) \\ &= 3 + h + \frac{1}{3}h^3 + o_{h \rightarrow 0}(h^3) \end{aligned}$$

donc

$$f(x) = 3 + (x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^3)$$

En particulier, f admet un développement limité à l'ordre 3 (et donc à l'ordre 1) en 1. f étant définie en 1, la tangente à la courbe de f en 1 a pour équation $y = 3 + (x-1)$ ou encore $y = 2 + x$. De plus :

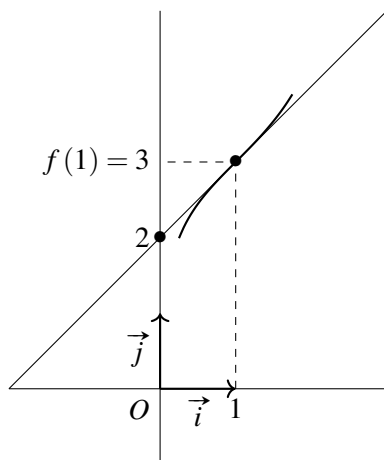
$$\begin{aligned} f(x) - (3 + (x-1)) &= \frac{1}{3}(x-1)^3 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^3) \\ &\underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

et on a donc le tableau de signes suivant, au voisinage de 1 :

x	1		
$f(x) - (3 + (x-1))$	-	0	+

À gauche de 1, la courbe de f est donc en dessous de sa tangente en 1. À droite de 1, la courbe de f est au-dessus de sa tangente en 1.

On obtient finalement le tracé suivant :



Exercice 58 – 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^{n-1})$. PTS 1
2. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} . PTS 0.5
3. f admet-elle un développement limité à l'ordre n en 0 ? PTS 1.5

Correction. 1. f et $x \mapsto x^{n-1}$ s'annulent toutes les deux au voisinage de 0 qu'en 0 lui-même. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$ non nul :

$$\left| \frac{f(x)}{x^{n-1}} \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{n-1}} = 0.$$

$$\text{On a donc bien } f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^{n-1}).$$

2. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* à valeurs dans \mathbb{R} et \sin est dérivable sur \mathbb{R} . Par produit, il est donc clair que f est dérivable sur \mathbb{R}^* . De plus, $n \geq 2$ et $f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^{n-1})$ donc f admet un développement limité à l'ordre au moins 1 en 0. Étant définie en 0, on en déduit que f est aussi dérivable en 0 (et que $f'(0) = 0$).
 f est donc bien dérivable sur \mathbb{R} .

3. Supposons que f admet un développement limité à l'ordre n en 0. Puisque $f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^{n-1})$, ce développement limité est nécessairement de la forme

$$f(x) = ax^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Mais alors, pour $x \in \mathbb{R}$ non nul :

$$\frac{f(x)}{x^n} = a + o_{x \rightarrow 0}(1)$$

ou encore

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = a + o_{x \rightarrow 0}(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a$$

et donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sin(X) = a$ (en posant $X = \frac{1}{x}$ et en faisant tendre x vers 0^+) : c'est absurde puisque \sin n'admet pas de limite en $+\infty$ (les deux suites $(\sin(2\pi n))$ et $(\sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}))$ n'ayant pas la même limite, alors que $2\pi n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $2\pi n + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$).

f n'admet donc pas de développement limité à l'ordre n en 0.

Exercice 59 – PTS 8

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x + e^x = n$$

admet une unique solution sur \mathbb{R} , que l'on notera x_n . PTS 1

2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et non majorée. Que peut-on en déduire ? PTS 1+1

3. Montrer que :

(a) $e^{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ PTS 1

(b) $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ PTS 1

Dans la suite, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = x_n - \ln(n)$.

4. Montrer que $e^{u_n} = 1 - \frac{u_n}{n} - \frac{\ln(n)}{n}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? PTS 1

5. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}$. Indication : puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a $e^{u_n} = 1 + u_n + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)$. PTS 1

6. En déduire que

$$x_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

PTS 1

Correction. 1. La fonction $f \mapsto x + e^x$ est continue strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. f est donc une bijection (strictement croissante) de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , et en particulier, tout entier naturel (ici non nul) n admet un unique antécédent par f dans \mathbb{R} .
Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + e^x = n$ admet bien une unique solution réelle, notée x_n .

Commentaire

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(x_n) = x_n + e^{x_n} = n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$f(x_{n+1}) = n+1 = f(x_n) + 1 > f(x_n)$$

donc, puisque f est strictement croissante, on a bien $x_{n+1} > x_n$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bien (strictement) croissante.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ était majorée, il existerait $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq M$$

et puisque f est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n = f(x_n) \leq f(M)$$

ce qui est absurde.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est donc pas majorée. Étant croissante, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

3. (a) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(x_n) = x_n + e^{x_n} = n$. De plus, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $t = o_{t \rightarrow +\infty}(e^t)$ donc $x_n = o_{n \rightarrow +\infty}(e^{x_n})$. On a donc

$$n = \underbrace{x_n}_{o_{n \rightarrow +\infty}(e^{x_n})} + e^{x_n} = e^{x_n} + o_{n \rightarrow +\infty}(e^{x_n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x_n}$$

donc $e^{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{\ln(n)} &= \frac{\ln(e^{x_n})}{\ln(n)} \\ &= \frac{\ln\left(n \times \frac{e^{x_n}}{n}\right)}{\ln(n)} \\ &= \frac{\ln(n) + \ln\left(\frac{e^{x_n}}{n}\right)}{\ln(n)} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(\frac{e^{x_n}}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1\end{aligned}$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{x_n}}{n} = 1$. On a donc bien $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}e^{u_n} &= e^{x_n - \ln(n)} \\ &= \frac{1}{n} (e^{x_n}) \\ &= \frac{1}{n} (n - x_n) \\ &= \frac{1}{n} (n - (u_n + \ln(n))) \\ &= 1 - \frac{u_n}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{u_n}{n} = \frac{x_n - \ln(n)}{n} = \frac{x_n}{n} - \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $\frac{x_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

On a donc $e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et en passant au logarithme népérien, continue en 1, on obtient $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$.

Commentaire

On aurait aussi raisonner de façon plus directe : puisque $e^{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{x_n}}{n} = 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^{x_n}}{n}\right) = \ln(1) \text{ ou encore } \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{x_n - \ln(n)}_{u_n} = 0.$$

5. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a $e^{u_n} = 1 + u_n + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)$. L'égalité dans la question précédente donne alors

$$1 - \frac{u_n}{n} - \frac{\ln(n)}{n} = e^{u_n} = 1 + u_n + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)$$

ou encore

$$\begin{aligned}-\frac{\ln(n)}{n} &= u_n + \underbrace{\frac{u_n}{n}}_{= o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n) = u_n + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)\end{aligned}$$

donc $\frac{-\ln(n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ ou encore

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\ln(n)}{n}$$

6. Puisque $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\ln(n)}{n}$, on a

$$u_n = -\frac{\ln(n)}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n} \right)$$

ou encore

$$x_n - \ln(n) = -\frac{\ln(n)}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n} \right)$$

et finalement

$$x_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n} \right)$$

Exercice 60 – Exercice sur la continuité PTS 3

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$. Montrer que (u_n) converge vers 1. PTS 1.5
2. Montrer que f est constante. PTS 1.5

Correction. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - 1| = \left| \frac{u_n + 1}{2} - 1 \right| = \left| \frac{u_n - 1}{2} \right| = \frac{1}{2} |u_n - 1|$$

Une récurrence immédiate prouve alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| = \frac{1}{2^n} |u_0 - 1| = \frac{1}{2^n} |x - 1|$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} |x - 1| = 0$, on en déduit que (u_n) converge vers 1.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On reprend la suite (u_n) définie comme dans la question précédente. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f(u_n)$$

- C'est trivial pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) = f(u_n)$. Alors

$$f(u_{n+1}) = f\left(\frac{u_n + 1}{2}\right) = f(u_n) = f(x)$$

par définition de f , ce qui achève la récurrence.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f(u_n)$$

Or (u_n) converge vers 1 et f est continue en 1 donc

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(1)$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(1)$: f est donc constante.

Chapitre 19

Espaces vectoriels

19.1	Introduction	594
19.1.1	Première approche	594
19.2	Espaces vectoriels	595
19.2.1	Définition	595
19.2.2	Familles de vecteurs et combinaisons linéaires	599
19.2.3	Sous-espaces vectoriels	600
19.3	Familles génératrices, familles libres, bases	605
19.3.1	Familles génératrices	605
19.3.2	Opérations sur les familles génératrices	605
19.3.3	Familles liées, familles libres	607
19.3.4	Bases	611
19.3.5	Bases canoniques des espaces vectoriels de référence	612
19.3.6	Famille échelonnée de polynômes	613
19.4	Somme de deux sous-espaces vectoriels	614
19.5	Exercices	617
19.6	DM conducteur	621

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

19.1 Introduction

En mathématiques, nous manipulons toutes sortes d'objets différents : des nombres, bien sûr, mais aussi des applications, des suites, des polynômes, des matrices...

Hors, ces objets présentent des similarités. Par exemple, une somme de deux polynômes est encore un polynôme, de même que la somme de deux matrices est encore une matrice. De plus, le produit d'un polynôme par un réel est toujours un polynôme, et il en est encore de même pour le produit d'une matrice par un réel.

L'ensemble des polynômes et l'ensemble des matrices semblent donc avoir une structure commune : ce sont des *espaces vectoriels*¹.

Cette structure ne concerne pas que les polynômes et les matrices : un ensemble de suites ou de fonctions peut aussi être un espace vectoriel.

On peut ainsi établir des liens entre des ensembles bien différents mais présentant une structure proche. Par exemple, comme nous pourrions le montrer ultérieurement, l'ensemble

$$A = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} - n^2 u_n\}$$

assez complexe de prime abord, a une structure semblable à \mathbb{R}^2 , qui est bien plus simple.

Nous allons, dans ce chapitre, définir la notion d'espace vectoriel, que nous approfondirons et exploiterons dans les chapitres ultérieurs.

19.1.1 Première approche

Exercice 19.1.1

Considérons un système linéaire homogène de la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Ici, n et p sont des entiers naturels non nuls et x_1, x_2, \dots, x_p sont les inconnues réelles.

Notons alors :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

Matriciellement, le système (S) se note alors plus simplement

$$AX = 0_{n,1} \quad (S')$$

où $0_{n,1}$ représente la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

L'ensemble de ses solutions sera noté F , ainsi

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = 0_{n,1}\}$$

1. Montrer que $0_{p,1} \in F$.

1. La première définition formelle de la notion d'espace vectoriel a été donnée en 1888 par Giuseppe Peano.

2. Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in F, \lambda X \in F$.
3. Montrer que : $\forall X, Y \in F, X + Y \in F$.
4. Montrer que : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in F, \lambda X + \mu Y \in F$.

Exercice 19.1.2

On considère l'ensemble H des polynômes à coefficients réels s'annulant en un certain réel a fixé. Ainsi :

$$H = \{P \in \mathbb{R}[X], P(a) = 0\}$$

1. Montrer que le polynôme nul, noté $\tilde{0}$, est un élément de H .
2. Montrer que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in H, \lambda P + \mu Q \in H$

On remarquera donc que F et H , bien que comportant des objets de natures différentes, présente une propriété en commun (celle de la dernière question des exercices précédents) : la *stabilité par combinaison linéaire*.

Cette stabilité est la caractéristique centrale de la notion d'espace vectoriel, et est un point commun entre de nombreux ensembles de natures différentes.

19.2 Espaces vectoriels

19.2.1 Définition

Définition 19.2.1 – Espace vectoriel

On appelle \mathbb{K} -espace vectoriel tout triplet $(E, +, \cdot)$ tel que :

- E est un ensemble.
- $+$ est une opération de $E \times E$ dans $E : \forall (x, y) \in E^2, x + y \in E$.
- \cdot est une opération de $\mathbb{K} \times E$ dans $E : \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \lambda \cdot x \in E$.
- La loi $+$ vérifie les points suivants :

- Commutativité :

$$\forall x, y \in E, x + y = y + x$$

- Associativité :

$$\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$$

- Existence d'un élément neutre : il existe un élément e de E tel que

$$\forall x \in E, x + e = e + x = x$$

- Tout élément est symétrisable dans E :

$$\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = e$$

- La loi \cdot vérifie les points suivants :

- Pseudo-associativité :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$$

- Distributivité à droite :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

- Distributivité à gauche :

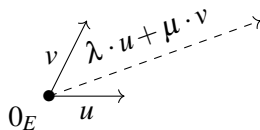
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

- Neutralité de 1 :

$$\forall x \in E, 1 \cdot x = x$$

Remarque 19.2.2

- En pratique, il est fréquent de noter λx à la place de $\lambda \cdot x$.
- L'associativité de la loi $+$ permet d'écrire, sans ambiguïté, des expressions comme $x + y + z$ (où $x, y, z \in E$). En effet, cette expression pourrait être comprise comme $(x + y) + z$ ou bien $x + (y + z)$, mais l'associativité garantit que ces deux expressions sont égales.
- Même remarque pour la pseudo-associativité de \cdot qui permet d'écrire sans ambiguïté des expressions comme $\lambda \mu x$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
- La loi $+$ est souvent appelée *addition* et la loi \cdot *multiplication*.



La somme et le produit par un scalaire de deux vecteurs est encore un vecteur.

Propriété 19.2.3

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors :

1. E est non vide.
2. E admet un **unique** élément neutre pour la loi $+$. Cet élément neutre sera noté e .

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$, on a

$$\lambda .x = e \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = e$$

4. Soit $x \in E$. x admet un **unique** symétrique dans E , c'est-à-dire qu'il existe un unique élément x' de E tel que $x + x' = x' + x = e$. De plus, ce symétrique est égal à $(-1).x$.

Démonstration. 1. E contient par définition un élément neutre pour la loi $+$ et n'est donc pas vide.

2. Soient e et e' deux éléments de E , neutres pour l'addition. Alors :

— D'une part, $e + e' = e$ puisque e' est neutre pour l'addition.

— D'autre part, $e + e' = e'$ puisque e est neutre pour l'addition.

Ainsi $e = e + e' = e'$, donc $e = e'$ et cet élément neutre est donc unique.

3. — Commençons par le sens réciproque. Supposons que $\lambda = 0$ ou $x = e$.

— Si $\lambda = 0$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned}\lambda .x &= (\lambda + \lambda) .x \\ &= \lambda .x + \lambda .x\end{aligned}$$

donc, en ajoutant de chaque côté le symétrique de $\lambda .x$, on trouve $e = \lambda .x$.

— Si $x = e$, alors on a

$$\begin{aligned}\lambda .e &= \lambda .(e + e) \\ &= \lambda .e + \lambda .e\end{aligned}$$

et on raisonne comme précédemment.

Dans tous les cas, on a bien $\lambda .x = e$.

— Supposons maintenant que $\lambda .x = 0$.

— Si $\lambda = 0$, il n'y a rien à prouver.

— Si $\lambda \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\lambda .x = e &\implies \frac{1}{\lambda} .(\lambda .x) = \frac{1}{\lambda} .e \\ &\implies \frac{\lambda}{\lambda} .x = \frac{1}{\lambda} .e \\ &\implies 1.x = \frac{1}{\lambda} .e \\ &\implies x = \frac{1}{\lambda} .e\end{aligned}$$

or $\frac{1}{\lambda} .e = e$ d'après le sens réciproque, ainsi on a bien $x = e$.

4. Soient x' et x'' deux éléments de E tels que $x + x' = x' + x = e$ et $x + x'' = x'' + x = e$. Alors en particulier, $x + x' = x + x''$, et en ajoutant x' de chaque côté, on obtient

$$\underbrace{x' + x}_{=e} + x' = \underbrace{x' + x}_{=e} + x''$$

ou encore $x' = x''$. Ainsi, x admet un unique symétrique dans E . De plus,

$$x + (-1).x = 1.x + (-1).x = (1 - 1) .x = 0.x = e$$

donc $(-1).x$ est bien le symétrique de x .

□

Remarque 19.2.4

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel.

1. L'élément neutre pour l'addition est souvent appelé **vecteur nul** de E , et sera noté 0_E dans ce cours.
2. Soit x un élément de E . Son symétrique, c'est-à-dire l'élément x' de E tel que $x + x' = x' + x = 0_E$, sera noté $-x$. Ainsi,

$$\forall x \in E, x + (-x) = (-x) + x = 0_E$$

Cela nous permet de définir une soustraction dans E , représentée par une loi notée $-$, en posant :

$$\forall x, y \in E, x - y = x + (-y)$$

Cette loi $-$ est encore une loi de composition interne sur E , et on peut montrer que

$$\forall x, y \in E, x - y = 0_E \iff x = y$$

(en ajoutant y de chaque côté).

Propriété 19.2.5 – Espaces vectoriels de référence

1. \mathbb{K} , \mathbb{K}^2 , \mathbb{K}^3 et de manière plus générale, \mathbb{K}^n où $n \in \mathbb{N}^*$ sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels, dont le vecteur nul est $(0, 0, \dots, 0)$.
2. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, dont le vecteur nul est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
3. Soit D un ensemble de \mathbb{K} . Alors l'ensemble $\mathcal{F}(D, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^D$ des fonctions définie sur D à valeurs dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel, dont le vecteur nul est la fonction nulle sur D .
4. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, dont le vecteur nul est le polynôme nul.
5. Si $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est un \mathbb{K} -espace vectoriel, dont le vecteur nul est le polynôme nul.
6. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un \mathbb{K} -espace vectoriel, dont le vecteur nul est la suite nulle.

Remarque 19.2.6

Notez que les lois ne sont pas précisées : cela signifie que l'on considère les lois usuelles pour ces espaces. Par exemple, dans le cas de \mathbb{K}^n , on définit les lois $+$ et \cdot en posant, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Pour s'entraîner**Niveau 1**

Exercice 19.5.1, questions 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 et 11.

Niveau 2

Exercice 19.5.1, questions 3, 10 et 13.

Niveau 3

Exercice 19.5.1, question 14.

19.2.2 Familles de vecteurs et combinaisons linéaires

Définition 19.2.7 – Famille

Soit J un ensemble. En associant, à chaque élément j de J , un objet mathématique x_j , on obtient une *famille* notée $(x_j)_{j \in J}$, et on dit que cette famille est *indexée par J* .

Pour tout $k \in J$, x_k est un *élément* de la famille $(x_j)_{j \in J}$ appelé *terme d'indice k* de la famille $(x_j)_{j \in J}$.

Si J est un ensemble fini, alors la famille $(x_j)_{j \in J}$ est elle-même dite *finie*.

Si A et J sont deux ensembles, l'ensemble des familles d'éléments de A indexées par J est noté A^J .

Enfin, si I est une partie de J , on dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une *sous-famille* de $(e_j)_{j \in J}$.

Remarque 19.2.8

- On ne s'intéressera ici qu'aux familles finies.
- Attention à l'ordre ! La famille $((0, 1), (3, 2), (5, -4))$ n'est pas égale à la famille $((5, -4), (0, 1), (3, 2))$.
- Si $J = \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, et si $(a_j)_{j \in J}$ est une famille indexée par J , on note aussi

$$(a_j)_{j \in J} = (a_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

On identifie alors $A^{\llbracket 1; n \rrbracket}$ à A^n .

Définition 19.2.9 – Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit J un ensemble fini et $(e_j)_{j \in J}$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **combinaison linéaire de $(e_j)_{j \in J}$** tout vecteur de la forme

$$\sum_{j \in J} \lambda_j e_j$$

où $(\lambda_j)_{j \in J}$ est une famille d'éléments de \mathbb{K} .

L'ensemble des combinaisons linéaires de $(e_j)_{j \in J}$ est noté $\text{Vect}(e_j)_{j \in J}$ et est appelé *sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_j)_{j \in J}$* .

Remarque 19.2.10

Si J est vide, la somme $\sum_{j \in J} \lambda_j e_j$ est nulle.

Exercice 19.2.11

1. Dans \mathbb{R}^3 , le triplet $(4, -3, 2)$ est combinaison linéaire de $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$: en effet, $(4, -3, 2) = 2(1, 1, 1) - 5(1, 1, 0) + 7(1, 0, 0)$.
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, posons $P = X$, $Q = 1 + X^2$ et $R = X^3 - X$. Alors les combinaisons linéaires de P , Q et R sont les polynômes de la forme

$$\lambda_1 X + \lambda_2(1 + X^2) + \lambda_3(X^3 - X) = \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_3)X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$$

Ainsi

$$\text{Vect}(P, Q, R) = \text{Vect}(X, 1 + X^2, X^3 - X) = \{ \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_3)X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \}$$

3. Soit $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$. f et g sont définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , et sont donc des éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Une combinaison linéaire de f et g est alors une fonction de la forme $\lambda f + \mu g$ où λ et μ sont des

réels. Ainsi,

$$\text{Vect}(f, g) = \{\lambda f + \mu g, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu \ln(x^2 + 1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{2}e^x - \ln(x^2 + 1)$ est dans $\text{Vect}(f, g)$.

4. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \text{Vect}(A, B, C) &= \{a.A + b.B + c.C, a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

On reconnaît alors l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 2.

Exercice 19.2.12

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, $P = 1 + 3X + X^2$ et $Q = 1 - X$. Montrer que le polynôme $R = 1 + 11X + 3X^2$ appartient à $\text{Vect}(P, Q)$.

Propriété 19.2.13 – Stabilité par combinaison linéaire

Tout \mathbb{K} -espace vectoriel réel est stable par combinaison linéaire : autrement dit, si $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, toute combinaison linéaire d'éléments de E est encore un élément de E .

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de la famille considérée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété \mathcal{P}_n : « Toute combinaison linéaire de toute famille formée de n éléments de E est encore un élément de E ».

- Considérons une famille (e_1) composée d'un seul vecteur de E . Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a bien $\lambda \cdot e_1 \in E$ car, par définition d'un espace vectoriel, \cdot est une opération de $\mathbb{K} \times E$ dans E . \mathcal{P}_1 est donc vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons \mathcal{P}_n vraie. Soit J un ensemble formé de $n + 1$ éléments, $(e_j)_{j \in J} \in E^J$ et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$. Soit j_0 un élément quelconque de J . Alors :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j e_j = \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} \lambda_j e_j + \lambda_{j_0} e_{j_0}$$

Cependant, $J \setminus \{j_0\}$ est composée de n éléments : par hypothèse de récurrence, on a donc $\sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} \lambda_j e_j \in E$. De plus,

$\lambda_{j_0} e_{j_0} \in E$ par définition de la loi \cdot . Puisque $+$ est une opération de $E \times E$ dans E , on en déduit que $\sum_{j \in J} \lambda_j e_j \in E$.

\mathcal{P}_{n+1} est donc vraie, ce qui achève la récurrence. □

19.2.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 19.2.14 – Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E . on dit que F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ lorsque :

1. $0_E \in F$
2. Pour tout $x, y \in F$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + \mu y \in F$.

Remarque 19.2.15

- En pratique, on dit souvent (par abus de langage) que F est un sous-espace vectoriel de E (sans préciser les lois utilisées).
- Pour que F soit un sous-espace vectoriel de E , il faut déjà que E soit un espace vectoriel et que F soit une partie de E .
- Remarquez que nous avons commencé à écrire λx au lieu de $\lambda \cdot x$.
- Si E est un espace vectoriel, alors E est un sous-espace vectoriel de lui-même (c'est le plus grand sous-espace vectoriel de E).
- Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E (c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E), appelé *sous-espace nul*.

Définition 19.2.16 – Droite vectorielle

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et $e \in E$ un vecteur non nul. Alors $\text{Vect}(e)$ est appelé *droite vectorielle de E engendrée par e* .

Remarque 19.2.17

Une droite vectorielle de E est donc un sous-espace vectoriel de E pouvant être engendré par une famille d'un seul vecteur.

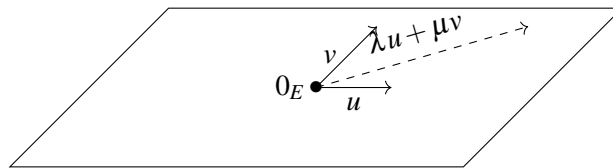
Définition 19.2.18 – Vecteurs colinéaires et plan vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et u, v deux vecteurs de E . On dit que u et v sont *colinéaires* si $v = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$.

Si u et v ne sont pas colinéaires, alors $\text{Vect}(u, v)$ est le *plan vectoriel engendré par la famille (u, v)* .

Remarque 19.2.19

Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel, une droite vectorielle et un plan vectoriel sont des sous-espaces vectoriels, comme le montre la propriété 19.2.25.



Dans \mathbb{R}^3 , un plan vectoriel est un exemple de sous-espace vectoriel et est stable par combinaison linéaire.

Propriété 19.2.20

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Le polynôme nul est bien dans $\mathbb{K}_n[X]$. De plus, pour tout $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a vu que $\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \leq n$ donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$. \square

Propriété 19.2.21

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Alors $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que $+$ et \cdot sont des opérations respectivement de $F \times F$ et de $\mathbb{K} \times F$ dans F .

- Pour tout $x, y \in F$, on a $x + y = 1 \cdot x + 1 \cdot y = \lambda x + \mu y$ en posant $\lambda = \mu = 1$. D'après le deuxième point de la définition d'un sous-espace vectoriel, on a donc bien $x + y \in F$.
 - Pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda x = \lambda x + 0 \cdot y = \lambda x + \mu y$ en posant $\mu = 0$ et $y = x$ par exemple. D'après le deuxième point de la définition, on a bien $\lambda x \in F$.
 - Les points suivants sont évidents :
 - La loi $+$ est associative (elle l'est sur E donc sur toute partie de E , en particulier sur F)
 - La loi $+$ est commutative (pour la même raison)
 - Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in F$ (on a donc $x, y \in E$), on a bien $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $1 \cdot x = x$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ et $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ car x et y sont des éléments de l'espace vectoriel E .
 - $0_E \in F$ par définition.
 - Enfin, montrons que tout élément de F est symétrisable dans F . Soit $x \in F$ et $-x$ son symétrique dans E . On a vu que $-x = (-1) \cdot x$, or $x \in F$ et F étant stable par combinaison linéaire (deuxième point de la définition d'un sous-espace vectoriel), on a bien $-x \in F$.
- F est donc bien un sous-espace vectoriel de E . □

Remarque 19.2.22

Un sous-espace vectoriel de E est donc un espace vectoriel inclus dans E .

Exercice 19.2.23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^T = M\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 19.2.24

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

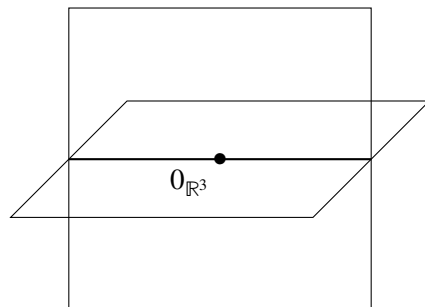
Soit J un ensemble non vide et $(E_j)_{j \in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{j \in J} E_j$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Pour tout $j \in J$, on a $0_E \in E_j$ puisque E_j est un sous-espace vectoriel de E . Ainsi, $0_E \in \bigcap_{j \in J} E_j$.

Soient $x, y \in \bigcap_{j \in J} E_j$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Pour tout $j \in J$, x et y sont donc des éléments de E_j . Puisque E_j est un sous-espace vectoriel de E , on a donc $\lambda x + \mu y \in E_j$, et ceci pour tout $j \in J$. On a donc bien $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{j \in J} E_j$.

Finalement, $\bigcap_{j \in J} E_j$ est bien un sous-espace vectoriel de E . □

Par exemple, dans \mathbb{R}^3 , l'intersection de deux plans vectoriels non parallèles est une droite vectorielle.



Propriété 19.2.25

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit J un ensemble fini, et $(e_j)_{j \in J} \in E^J$.

Alors $\text{Vect}(e_j)_{j \in J}$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.

Démonstration. Pour commencer, on a $0_E = \sum_{j \in J} 0 \cdot e_j$ donc 0_E est combinaison linéaire de $(e_j)_{j \in J}$ et $0_E \in \text{Vect}(e_j)_{j \in J}$.

Soit maintenant $x, y \in \text{Vect}(e_j)_{j \in J}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Par définition, il existe $(x_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ et $(y_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ telles que $x = \sum_{j \in J} x_j e_j$ et $y = \sum_{j \in J} y_j e_j$. On a alors :

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda \sum_{j \in J} x_j e_j + \mu \sum_{j \in J} y_j e_j \\ &= \sum_{j \in J} \underbrace{(\lambda x_j + \mu y_j)}_{\in \mathbb{K}} e_j \end{aligned}$$

donc $\lambda x + \mu y \in \text{Vect}(e_j)_{j \in J}$.

$\text{Vect}(e_j)_{j \in J}$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. □

Propriété 19.2.26

L'ensemble F des solutions d'un système linéaire **homogène** à n inconnues (S) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration. La preuve a été faite dans l'exercice 19.1.1. □

Propriété 19.2.27

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E .

Soit J un ensemble fini et $(e_j)_{j \in J} \in E^J$. On suppose que F contient tous les vecteurs de cette famille, c'est-à-dire que

$$\forall j \in J, e_j \in F$$

Alors $\text{Vect}(e_j)_{j \in J} \subset F$.

Démonstration. $(F, +, \cdot)$ étant un espace vectoriel, la propriété 19.2.13 assure que toute combinaison linéaire d'éléments de F (et donc en particulier de la famille $(x_j)_{j \in J}$) est encore dans F . □

Exercice 19.2.28

Soit α un réel fixé. Montrer que l'ensemble F des polynômes s'annulant en α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19.2.29

Montrer que l'ensemble $F = \{(a, b - a, c - b + a), a, b, c \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel (on montrera qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu).

Exercice 19.2.30

Montrer que l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & -a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 19.2.31

Montrer que l'ensemble $F = \{(a+b, a+2b, a+3b, a+4b, \dots), a, b \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 19.2.32

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E . F est-il un sous-espace vectoriel de E ?
2. Même question avec l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exercice 19.2.33

Déterminer deux vecteurs e_1 et e_2 de \mathbb{R}^n tels que $\text{Vect}(e_1, e_2)$ soit l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Correction. Notons F l'ensemble cherché.

Soient $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \left(L_1 \leftarrow \frac{-1}{3}L_1 \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \left(\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_3 - x_4 \\ x_4 = 2x_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_4 = 2x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 = x_2, x_4 = 2x_3\} \\ &= \{(x_2, x_2, x_3, 2x_3), x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2 \cdot (1, 1, 0, 0) + x_3 \cdot (0, 0, 1, 2), x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2)) \end{aligned}$$

Niveau 1

Exercice 19.5.1, questions 1, 5 et 11.

Niveau 2

Exercice 19.5.1, question 12.
Exercice 19.5.4.

Niveau 3

19.3 Familles génératrices, familles libres, bases

Dans toute cette section, on considère un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

19.3.1 Familles génératrices

Définition

Définition 19.3.1 – Famille génératrice

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Soit J un ensemble fini et $(e_j)_{j \in J} \in E^J$.
On dit que la famille $(e_j)_{j \in J}$ est *génératrice de E* lorsque $E = \text{Vect}(e_j)_{j \in J}$.

Remarque 19.3.2

On dit qu'une famille est génératrice lorsque chaque vecteur peut s'écrire **d'au moins une façon** comme combinaison linéaire de cette famille.

Exercice 19.3.3

- Déterminer une famille génératrice de \mathbb{R}^2 .
- Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de l'espace vectoriel $S_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

Exercice 19.3.4

Déterminer une famille génératrice de $S_3(\mathbb{R})$.

19.3.2 Opérations sur les familles génératrices

Propriété 19.3.5 – Opérations sur les familles génératrices

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et $\mathcal{G} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E .
Les opérations suivantes transforment \mathcal{G} en une famille génératrice de E :

1. Permuter deux vecteurs de \mathcal{G} .
2. Enlever le vecteur nul si \mathcal{G} le contient.
3. Multiplier un vecteur de \mathcal{G} par un élément de \mathbb{K}^* .
4. Ajouter à un vecteur de \mathcal{G} une combinaison linéaire des autres vecteurs de \mathcal{G} .
5. Enlever les vecteurs de \mathcal{G} qui sont combinaisons linéaires des autres vecteurs de \mathcal{G} .

Démonstration. 1. Soient $j_0, j_1 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $j_0 \neq j_1$. Posons, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$f_j = \begin{cases} e_j & \text{si } j \notin \{j_0, j_1\} \\ e_{j_1} & \text{si } j = j_0 \\ e_{j_0} & \text{si } j = j_1 \end{cases}$$

Il s'agit alors de montrer que $\mathcal{G}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est génératrice de E .

Il est clair que les vecteurs de \mathcal{G}' sont des éléments de E .

De plus, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$e_j = \begin{cases} f_j & \text{si } j \notin \{j_0, j_1\} \\ f_{j_0} & \text{si } j = j_1 \\ f_{j_1} & \text{si } j = j_0 \end{cases}$$

donc $e_j \in \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ et d'après 19.2.27 :

$$E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n) \subset E$$

donc, par double inclusion, $\text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n) = E$ et (f_1, f_2, \dots, f_n) est bien génératrice de E .

2. Quitte à permuter les vecteurs, supposons que $e_n = 0_E$. Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a alors $e_j \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$, y compris si $j = n$ puisque

$$e_n = \sum_{k=1}^n 0 \cdot e_k$$

On conclut alors comme dans le point précédent :

$$E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}) \subset E$$

3. Quitte à permuter les vecteurs, montrons que la famille $\mathcal{G}' = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \alpha e_n)$ est génératrice de E , où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Il est clair que les vecteurs de \mathcal{G}' sont éléments de E .

Pour tout $j \in J$, on a $e_j \in \text{Vect}(\mathcal{G}')$, y compris si $j = n$ puisque

$$e_n = \frac{1}{\alpha} \alpha e_n$$

On conclut alors comme dans le point précédent.

4. Quitte à permuter les vecteurs, montrons que

$$\mathcal{G}' = \left(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k \right)$$

est génératrice de E , où $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$.

Il est clair que les vecteurs de \mathcal{G}' sont éléments de E .

Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $e_j \in \text{Vect}(\mathcal{G}')$, y compris si $j = n$ puisque

$$e_n = \left(e_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k$$

On conclut comme dans les points précédents.

5. Conséquence directe des points précédents : si un vecteur de la famille donnée est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette même famille, on lui soustrait la-dite combinaison linéaire pour obtenir le vecteur nul, que l'on peut alors retirer.

□

Exercice 19.3.6

Dans \mathbb{R}^2 , considérons la famille $((1, 1), (-2, -1), (0, 0), (1, 4))$. Simplifier le plus possible

$$\text{Vect}((1, 1), (-2, -1), (0, 0), (1, 4))$$

Exercice 19.3.7

Montrer que $\text{Vect}((0, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 3)) = \text{Vect}((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$. Que peut-on en déduire ?

Pour s'entraîner**Niveau 1**

Exercice 19.5.5 : trouver une famille génératrice de l'espace vectoriel donné.

Niveau 2

Exercice 19.5.3. Exercice 19.5.6

Niveau 3

Exercice 19.5.11.

19.3.3 Familles liées, familles libres**Définition****Définition 19.3.8 – Famille liée**

Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel, on dit qu'une famille finie est liée lorsqu'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Considérons un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ et une famille finie $(e_j)_{j \in J}$.

— On suppose que cette famille est liée : il existe donc $j_0 \in J$ et $(\lambda_k)_{k \in J \setminus \{j_0\}}$ tels que $e_{j_0} = \sum_{k \in J \setminus \{j_0\}} \lambda_k e_k$. En particulier,

on a $\sum_{k \in J} \lambda_k e_k = 0_E$ en posant $\lambda_{j_0} = -1$. On a donc retrouvé le vecteur nul en tant que combinaison linéaire de la famille $(e_j)_{j \in J}$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

— Réciproquement, supposons qu'il existe $(\lambda_k)_{k \in J} \in \mathbb{K}^J$ composée de scalaires **non tous nuls** telle que $\sum_{k \in J} \lambda_k e_k = 0_E$.

Puisque ces scalaires ne sont pas tous nuls, il existe $j_0 \in J$ tel que $\lambda_{j_0} \neq 0$. On a alors $\lambda_{j_0} e_{j_0} + \sum_{k \in J \setminus \{j_0\}} \lambda_k e_k = 0_E$ ou encore

$$e_{j_0} = \frac{-1}{\lambda_{j_0}} \sum_{k \in J \setminus \{j_0\}} \lambda_k e_k$$

donc la famille $(e_k)_{k \in J}$ est liée.

Définition 19.3.9 – Famille liée (équivalente à la définition 19.3.8)

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et J un ensemble fini. Soit $(e_j)_{j \in J} \in E^J$. On dit que la famille $(e_j)_{j \in J}$ est *liée* lorsqu'il existe une famille de scalaires **non tous nuls** $(\lambda_k)_{k \in J} \in \mathbb{K}^J$ telle que

$$\sum_{j \in J} \lambda_j e_j = 0_E$$

Remarque 19.3.10

Attention : ne pas confondre "non tous nuls" avec "tous non nuls" !

Par contraposée, on définit alors la notion de famille libre.

Définition 19.3.11 – Famille libre

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et J un ensemble fini. Soit $(e_j)_{j \in J} \in E^J$. On dit que la famille $(e_j)_{j \in J}$ est **libre** lorsque :

$$\forall (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J, \sum_{j \in J} \lambda_j e_j = 0_E \implies (\forall j \in J, \lambda_j = 0)$$

Remarque 19.3.12

- Si e_1 est un vecteur de E , alors la famille (e_1) (ne contenant qu'un seul vecteur) est libre si et seulement si $e_1 \neq 0_E$.
- Une famille (u, v) composée de deux vecteurs de E est liée si et seulement si u et v sont *colinéaires* (on dit aussi *proportionnels*), c'est-à-dire que l'un est multiple de l'autre.
Une famille composée de deux vecteurs est donc libre si et seulement si ses deux vecteurs ne sont pas proportionnels.

Exercice 19.3.13

1. La famille $((0, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 3))$ est-elle libre dans \mathbb{R}^3 ?
2. Même question avec $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1))$.
3. Combien de matrices au maximum peut-on prendre pour former une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices réelles antisymétriques^a d'ordre 2) ?

a. Rappel : une matrice A est antisymétrique si $A^T = -A$

Propriétés et opérations sur les familles libres**Propriété 19.3.14**

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et J un ensemble fini. Soit $(e_j)_{j \in J}$ une famille **libre** de vecteurs de E . Soient $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ et $(\mu_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$. Alors :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j e_j = \sum_{j \in J} \mu_j e_j \iff (\forall j \in J, \lambda_j = \mu_j)$$

Remarque 19.3.15

Cette propriété signifie que chaque vecteur de E s'écrit d'**au plus** une manière comme combinaison linéaire de la famille **libre** $(e_j)_{j \in J}$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in J} \lambda_j e_j = \sum_{j \in J} \mu_j e_j &\iff \sum_{j \in J} \lambda_j e_j - \sum_{j \in J} \mu_j e_j = 0_E \\
 &\iff \sum_{j \in J} (\lambda_j - \mu_j) e_j = 0_E \\
 &\iff (\forall j \in J, \lambda_j - \mu_j = 0) \\
 &\iff (\forall j \in J, \lambda_j = \mu_j)
 \end{aligned}$$

□

Propriété 19.3.16 – Propriétés des familles libres

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel, et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E .

1. Si on permute deux vecteurs de \mathcal{F} , on obtient une famille libre.
2. Toute sous-famille de \mathcal{F} est encore libre.
3. Si on multiplie un des vecteurs de \mathcal{F} par un scalaire non nul, on obtient une famille libre.
4. Si on ajoute à un vecteur de \mathcal{F} une combinaison linéaire des autres vecteurs de \mathcal{F} , on obtient une famille libre.
5. \mathcal{F} ne contient pas le vecteur nul.
6. \mathcal{F} ne contient pas plusieurs occurrences d'un même vecteur.

Démonstration. 1. Soient $j_0, j_1 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $j_0 \neq j_1$ et posons, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$f_j = \begin{cases} e_j & \text{si } j \notin \{j_0, j_1\} \\ e_{j_1} & \text{si } j = j_0 \\ e_{j_0} & \text{si } j = j_1 \end{cases}$$

Montrons que $\mathcal{F}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j = 0_E &\implies \left(\sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{j_0, j_1\}} \lambda_j f_j \right) + \lambda_{j_0} f_{j_0} + \lambda_{j_1} f_{j_1} = 0_E \\
 &\implies \left(\sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{j_0, j_1\}} \lambda_j e_j \right) + \lambda_{j_0} e_{j_1} + \lambda_{j_1} e_{j_0} = 0_E \\
 &\implies \sum_{j=1}^n \mu_j e_j = 0_E
 \end{aligned}$$

$$\text{en posant, pour tout } j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mu_j = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } j \notin \{j_0, j_1\} \\ \lambda_{j_1} & \text{si } j = j_0 \\ \lambda_{j_0} & \text{si } j = j_1 \end{cases}.$$

Puisque \mathcal{F} est libre, on a alors $\mu_j = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, puis $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

2. Soit I une partie de $J = \llbracket 1; n \rrbracket$. Supposons que $(e_i)_{i \in I}$ est liée : il existe donc une famille de scalaires non tous nuls $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E$. On a alors $\sum_{j \in J} \lambda_j e_j = 0_E$ en posant $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in J \setminus I$.

Par hypothèse, les scalaires de la famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ ne sont pas tous nuls et $(e_j)_{j \in J}$ est donc liée, ce qui contredit l'hypothèse de départ. La famille $(e_i)_{i \in I}$ est donc libre.

3. Quitte à permuter les vecteurs de \mathcal{F} , montrons que la famille $\mathcal{F}' = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \alpha e_n)$ est libre, où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Supposons que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n \alpha e_n = 0_E$$

Puisque \mathcal{F} est libre, on en déduit que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \alpha$ sont tous nuls, et donc que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ puisque $\alpha \neq 0$.

4. Quitte à permuter les vecteurs de \mathcal{F} , montrons que la famille $\mathcal{F}' = \left(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k \right)$ est libre, où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Supposons que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n \left(e_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k \right) = 0_E$$

On a alors

$$(\lambda_1 + \lambda_n \alpha_1) e_1 + \dots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n \alpha_{n-1}) e_{n-1} + \lambda_n e_n = 0_E$$

Par liberté de \mathcal{F} , on obtient $\lambda_n = 0$ et $\lambda_k + \lambda_n \alpha_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, ce qui donne bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. □

Pour s'entraîner

Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
Exercice 19.5.7	Exercice 19.5.8, Exercice 19.5.10	

Propriété 19.3.17

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et (e_1, e_2, \dots, e_n) une famille libre de E , avec $n \in \mathbb{N}$.
Soit $e_{n+1} \in E$. On suppose que e_{n+1} n'est pas combinaison linéaire de (e_1, e_2, \dots, e_n) .
Alors $(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1})$ est libre.

Démonstration. Soit $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^{n+1}$ et supposons que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_k = 0_E$. On a donc

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k + \lambda_{n+1} e_{n+1} = 0_E \quad (*)$$

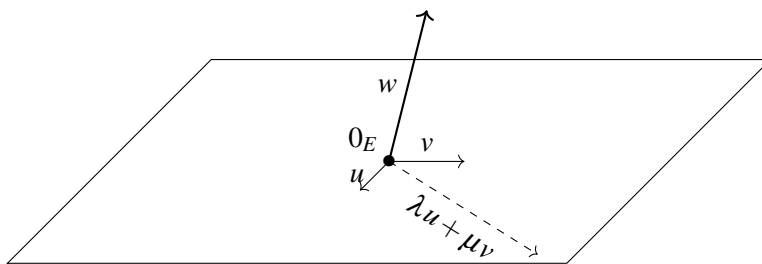
Si λ_{n+1} était non nul, on obtiendrait $e_{n+1} = \frac{-1}{\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ ce qui est exclu puisque e_{n+1} est supposé ne pas être combinaison linéaire de $(e_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$.

On en déduit que $\lambda_{n+1} = 0$ et l'égalité $(*)$ devient

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E$$

Puisque la famille $(e_j)_{j \in J}$ est libre, cela implique que $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Finalement, pour tout $j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, on a $\lambda_j = 0$ et la famille $(e_j)_{j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$ est bien libre. □



Sur ce dessin, dans \mathbb{R}^3 , la famille $(u, v, \lambda u + \mu v)$ n'est pas libre (elle est liée), mais (u, v, w) est libre puisque w n'est pas combinaison linéaire de u et v .

Propriété 19.3.18

Soit (P_1, P_2, \dots, P_n) une famille de polynômes **tous non nuls** dans $\mathbb{K}[X]$. On suppose que P_1, P_2, \dots, P_n sont de degrés deux-à-deux distincts. Alors la famille (P_1, P_2, \dots, P_n) est libre.

Démonstration. On peut raisonner par récurrence sur n .

- Pour $n = 1$, c'est évident puisque l'on ne considère que des polynômes non nuls.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la propriété est vraie. Soit $(P_1, P_2, \dots, P_{n+1})$ une famille de polynômes non nuls dans $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux-à-deux distincts. Quitte à permuter les vecteurs de cette famille, on peut supposer que

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n) < \deg(P_{n+1})$$

Par hypothèse de récurrence, (P_1, P_2, \dots, P_n) est libre. De plus, P_{n+1} n'est pas combinaison linéaire de (P_1, P_2, \dots, P_n) (en effet, le degré d'une combinaison linéaire de (P_1, P_2, \dots, P_n) est de degré inférieur ou égal à celui de P_n). On en déduit que $(P_1, P_2, \dots, P_{n+1})$ est libre, ce qui achève la récurrence. □

19.3.4 Bases

Définition 19.3.19 – Base

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On appelle **base de E** toute famille finie^a de E qui est à la fois génératrice de E et libre.

^a. Dans l'absolu, il existe des bases non finies, mais c'est hors-programme.

Remarque 19.3.20

Dire que $(e_j)_{j \in J} \in E^J$ est une base de E revient à dire que tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $(e_j)_{j \in J}$ (au moins une fois grâce au caractère générateur de cette famille, et au plus une fois grâce à la liberté de cette famille).

Définition 19.3.21 – Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. On suppose qu'il existe une base $(e_j)_{j \in J}$ une base de E .

Alors pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$, dont les coefficients sont appelés les *coordonnées de x dans la base \mathcal{B}* , telle que

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$$

Remarque 19.3.22

L'existence et l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base résulte des remarques 19.3.2 et 19.3.15.

Exercice 19.3.23

On a vu que la famille $((0, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 3))$ est génératrice de \mathbb{R}^3 et est libre : c'est donc une base de \mathbb{R}^3 . Soit $x = (3, 2, -1)$. Déterminer les coordonnées de x dans cette base.

Les propriétés 19.3.2 et 19.3.3 nous donnent directement la propriété suivante :

Propriété 19.3.24 – Propriétés des bases

1. Si on change l'ordre des vecteurs d'une base de E , on obtient encore une base de E .
2. Si on remplace un des vecteurs d'une base de E par un de ses multiples par un réel non nul, on obtient une base de E .
3. Si on remplace un des vecteurs d'une base de E par sa somme avec une combinaison linéaire des autres vecteurs, on obtient encore une base de E .

Pour s'entraîner**Niveau 1**

Exercice 19.5.15

Niveau 2

Exercice 19.5.9. Exercice 19.5.5.
Exercice 19.5.13.

Niveau 3

Exercice 19.5.14 (cet exercice sera facilité par le chapitre sur les applications linéaires et le théorème du rang).

19.3.5 Bases canoniques des espaces vectoriels de référence**Propriété 19.3.25 – Base canonique de \mathbb{K}^n**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1))$ est une base de \mathbb{K}^n , appelée **base canonique de \mathbb{K}^n** .

Démonstration. Notons $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

— Montrons que cette famille est génératrice : soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors on a

$$x = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

donc la famille (e_1, e_2, \dots, e_n) est génératrice de \mathbb{K}^n .

— Montrons que cette famille est libre dans \mathbb{K}^n : soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E$. On a $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k =$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, et ce vecteur est nul si et seulement si tous les λ_i sont nuls, ce qui prouve que la famille est libre.

Libre et génératrice, cette famille est donc une base de \mathbb{K}^n . □

Propriété 19.3.26 – Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1. Alors la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$** .

■ *Démonstration.* Même principe que pour \mathbb{K}^n . □

Remarque 19.3.27

Par exemple, la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$. Dans cette base, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Propriété 19.3.28 – Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$** .

Démonstration. Tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit par définition sous la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Ainsi, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est bien génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus, cette famille est libre : en effet, considérons des réels $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^n a_k X^k = 0$. Alors le polynôme

$\sum_{k=0}^n a_k X^k$ est nul et ses coefficients sont aussi nuls. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est donc bien libre.

Finalement, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est bien une base de $\mathbb{K}_n[X]$. □

Exemple 19.3.29

Dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, le polynôme $1 - X + 3X^2 + X^3$ a pour coordonnées $(1, -1, 3, 1)$.

19.3.6 Famille échelonnée de polynômes

Définition 19.3.30 – Famille échelonnée de polynômes

Soit (P_0, P_1, \dots, P_q) une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que cette famille est *échelonnée en degré* si

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_q)$$

Propriété 19.3.31 – Base échelonnée en degré de $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes ^a non nuls de $\mathbb{K}_n[X]$ échelonnée en degré. Alors \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

^a. Notez que cette famille est composée d'exactement $n + 1$ vecteurs.

Démonstration. Les $n + 1$ entiers $\deg(P_0), \deg(P_1), \dots, \deg(P_n)$ vérifient

$$0 \leq \deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n) \leq n$$

On a donc nécessairement :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \deg(P_k) = k$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, notons alors $P_k = \sum_{i=0}^k a_{i,k} X^i$, avec $a_{k,k} \neq 0$.

Soit $P = \sum_{i=0}^n b_i X^i \in \mathbb{K}_n[X]$. On va montrer que P s'écrit d'une et d'une seule façon comme combinaison linéaire de \mathcal{B} . Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} P = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k &\iff P = \sum_{k=0}^n \lambda_k \sum_{i=0}^k a_{i,k} X^i \\ &\iff P = \sum_{\substack{(i,k) \in \llbracket 0;n \rrbracket^2 \\ i \leq k}} \lambda_k a_{i,k} X^i \\ &\iff \sum_{i=0}^n b_i X^i = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n \lambda_k a_{i,k} X^i \\ &\iff \begin{cases} a_{0,0}\lambda_0 + a_{0,1}\lambda_1 + \dots + a_{0,n}\lambda_n = b_0 \\ a_{1,1}\lambda_1 + \dots + a_{1,n}\lambda_n = b_1 \\ \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n,n}\lambda_n = b_n \end{cases} \end{aligned}$$

On a obtenu un système triangulaire supérieur, à coefficients diagonaux tous non nuls : il admet donc une unique solution, ce qui prouve que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. \square

Exercice 19.3.32

$\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)(X-2))$ est famille échelonnée en degré, formée de 3 polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$: c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Quelles sont les coordonnées de $P = 3 - 5X + 12X^2$ dans la base \mathcal{B} ?

19.4 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 19.4.1

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$.

La somme de F_1 et F_2 est notée $F_1 + F_2$ et est définie par :

$$F_1 + F_2 = \{u_1 + u_2, (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2\}$$

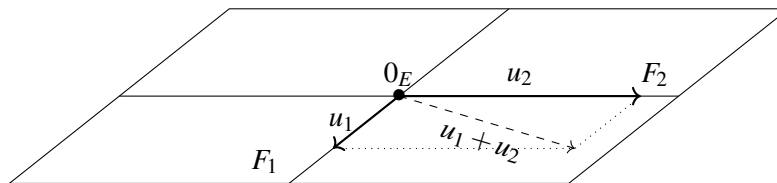


FIGURE 19.1 – Dans \mathbb{R}^3 , la somme de deux droites vectorielles non parallèles donne un plan.

Propriété 19.4.2

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$.
Alors $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.

Démonstration. — Soit $z \in F_1 + F_2$. Il existe donc $(x, y) \in F_1 \times F_2$ tel que $z = x + y$. En particulier, $z \in E$ puisque x et y sont dans E , qui est stable par combinaison linéaire.

— Puisque F_1 et F_2 , 0_E est dans F_1 et dans F_2 donc

$$0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} \in F_1 + F_2$$

— Soient $z, z' \in F_1 + F_2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Par définition, il existe $x, x' \in F_1$ et $y, y' \in F_2$ tels que $z = x + y$ et $z' = x' + y'$. On a alors :

$$\begin{aligned} \lambda z + \mu z' &= \lambda(x + y) + \mu(x' + y') \\ &= \underbrace{\lambda x + \mu x'}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda y + \mu y'}_{\in F_2} \end{aligned}$$

donc $\lambda z + \mu z' \in F_1 + F_2$.

$F_1 + F_2$ est donc bien un sous-espace vectoriel de E . □

Remarque 19.4.3

C'est cela qui rend la somme plus intéressante que la réunion : la somme de deux sous-espaces vectoriels de E reste un sous-espace vectoriel de E , mais la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E ne l'est pas forcément. Par exemple, $\text{Vect}((1, 0)) \cup \text{Vect}((0, 1))$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 , puisque cette réunion n'est pas stable par combinaison linéaire : $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans $\text{Vect}((1, 0)) \cup \text{Vect}((0, 1))$, mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ ne l'est pas (il n'est ni dans $\text{Vect}((1, 0))$, ni dans $\text{Vect}((0, 1))$).

Définition 19.4.4

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$.

La somme $F_1 + F_2$ est dite *directe* si pour tout $u \in F_1 + F_2$, il existe un **unique** couple $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.

On note alors $F + G = F \oplus G$.

Exercice 19.4.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 19.4.6

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$.

La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Démonstration. — Supposons que la somme $F_1 + F_2$ soit directe. Puisque F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E , il est clair que $0_E \in F_1 \cap F_2$.

Soit $x \in F_1 \cap F_2$. On a :

$$\underbrace{0_E}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} = 0_E = \underbrace{x}_{\in F_1} + \underbrace{(-x)}_{\in F_2}$$

Or, par définition d'une somme directe, 0_E ne peut s'écrire que d'une seule façon comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 . On en déduit que $x = 0_E$.

- Supposons que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Soit $x \in F_1 + F_2$ et deux couples $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $u_1 + u_2 = x = v_1 + v_2$. En particulier, on a :

$$\underbrace{u_1 - v_1}_{\in F_1} = \underbrace{v_2 - u_2}_{\in F_2}$$

donc $u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \in F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ puis $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$. x s'écrit donc bien d'une seule manière comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 : la somme $F_1 + F_2$ est directe.

□

Par exemple, sur la figure 19.1, l'intersection des deux droites est réduite à $\{0_E\}$: la somme $F_1 + F_2$ est directe.

Exercice 19.4.7

Dans \mathbb{R}^2 , on pose $F_1 = \text{Vect}((1, -1))$ et $F_2 = \text{Vect}((1, 2))$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et déterminer cette somme.

Définition 19.4.8 – Sous-espaces supplémentaires

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$.

On dit que F_1 et F_2 sont *supplémentaires* dans E lorsque $F_1 + F_2 = E$, cette somme étant directe.

Autrement dit, F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E lorsque $E = F_1 \oplus F_2$.

Remarque 19.4.9

F_1 et F_2 sont donc supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire exactement d'une façon comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 .

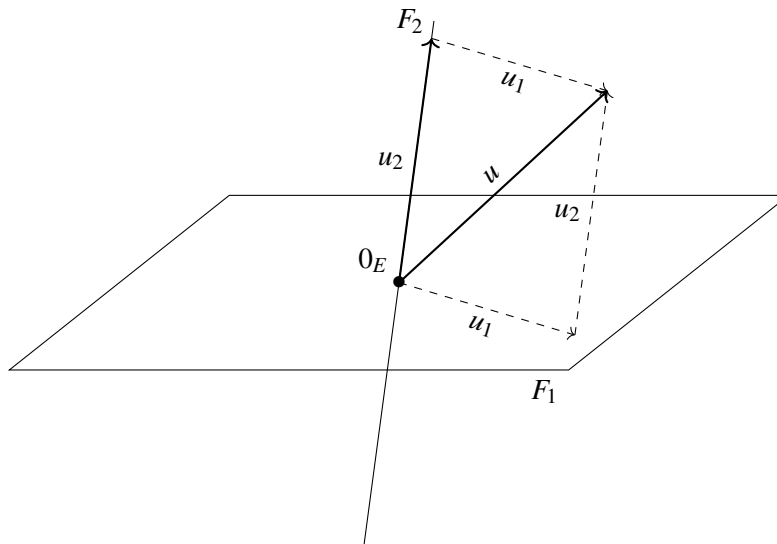


FIGURE 19.2 – Sur ce dessin, le plan vectoriel F_1 et la droite vectorielle F_2 sont supplémentaires.

Exercice 19.4.10

Dans \mathbb{R}^2 , on pose $u = (1, 2)$ et $v = (1, -1)$. On pose également $F_1 = \text{Vect}(u)$ et $F_2 = \text{Vect}(v)$.

1. Représenter graphiquement, dans un repère orthonormé, les deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 .

2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 19.4.11

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On pose $F = \{Q \times (X - \alpha), Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer :

$$\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}_0[X]$$

19.5 Exercices

Exercice 19.5.1

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} 3x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$

2. $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - y + 1 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

3. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

4. $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ yt \end{pmatrix}, x, y, t \in \mathbb{R} \right\}$

5. $J = \left\{ \begin{pmatrix} y - z \\ x + 2z \\ x - 3y \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

6. $K = \{P \in \mathbb{R}[X], P(a) = 0\}$ où a est un réel fixé.

7. $L = \{P \in \mathbb{R}[X], P(a) = 1\}$ où a est un réel fixé.

8. $M = \{(2x, 2x + 1), x \in \mathbb{R}\}$

9. $N = \{(|a + b|, |a - b|), a, b \in \mathbb{R}\}$

10. $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 0\}$

11. $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 3x + y = 0\}$

12. Q , l'ensemble des suites réelles dont chaque terme vaut la somme des deux précédents.

13. R , l'ensemble des suites réelles dont chaque terme vaut le carré de la somme des deux précédents.

14. $S = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 - u_{n+1}^2 = 0\}$

Correction. 1. Oui (avec la définition d'un sous-espace vectoriel, ou bien parce que $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$).

2. Non, car $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans G .

3. Non : $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont dans H mais pas $X + Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Oui, car $I = \mathbb{R}^2$.

5. Oui

6. Oui

7. Non (L ne contient pas le polynôme nul)

8. Idem

9. Non : $(1, 1) = (|1 + 0|, |1 - 0|)$ est dans N mais pas son opposé.

10. Oui : ne contient que $(0, 0)$!

11. Oui : c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

12. $Q = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.

On reconnaît ici une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est $X^2 - X - 1 = 0$, de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5 > 0$: cette équation caractéristique a donc deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , et ainsi :

$$\begin{aligned} Q &= \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda (r_1^n) + \mu (r_2^n), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((r_1^n), (r_2^n)) \end{aligned}$$

donc Q est un espace vectoriel.

13. Non : la suite $u = (0, 1, 1, 4, 25, \dots)$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (u_n + u_{n+1})^2$$

est dans R mais pas son opposé, à savoir $(0, -1, -1, -4, -25, \dots)$ puisque $-4 \neq (-1 + (-1))^2$.

14. Non : $(1, 1, 1, \dots)$ et $(1, -1, 1, -1, \dots)$ sont dans S mais pas leur somme.

Exercice 19.5.2

Donner une base des espaces vectoriels suivants :

1. $\text{Vect}((1, 2, 3), (-1, 2, -3), (0, 4, 0))$
2. $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)$
3. $\text{Vect}(1 + X + X^2, -2 - X + 3X^2, -1 + X + 3X^2, 1 + 2X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
4. $\text{Vect}((0, 3, 12, 6), (-2, 1, 3, 5), (-4, 11, 42, 28))$

Correction. 1. $(1, 2, 3) + (-1, 2, -3) = (0, 4, 0)$ donc la famille est liée. Ainsi, $\text{Vect}((1, 2, 3), (-1, 2, -3), (0, 4, 0)) = \text{Vect}((1, 2, 3), (-1, 2, -3))$. Ces deux derniers vecteurs n'étant pas colinéaires, on ne peut pas simplifier davantage : $((1, 2, 3), (-1, 2, -3))$ est une base de $\text{Vect}((1, 2, 3), (-1, 2, -3), (0, 4, 0))$.

2. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ car cette famille est libre et $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est égale à la somme des quatre autres matrices. Étant alors de dimension 4 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est lui-même de dimension 4, on en déduit que l'espace vectoriel donné est égal à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Par exemple :

$$\begin{aligned} &\text{Vect}(1 + X + X^2, -2 - X + 3X^2, -1 + X + 3X^2, 1 + 2X^2) \\ &= \text{Vect}(1, -2 - X + 3X^2, -1 + X + 3X^2, 1 + 2X^2) \quad (c_1 \leftarrow c_1 + c_2 + c_4) \\ &= \text{Vect}(1, -2 - X + 3X^2, -1 + X + 3X^2, X^2) \quad \left(c_4 \leftarrow \frac{1}{2}(c_4 - c_1)\right) \\ &= \text{Vect}(1, -2 - X + 3X^2, X, X^2) \quad (c_3 \leftarrow c_3 + c_1 - 3c_4) \\ &= \text{Vect}(1, X, X^2) \\ &= \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

ainsi $(1, X, X^2)$ est une base de l'espace vectoriel donné.

Exercice 19.5.3

Dans \mathbb{R}^3 , soient $u = (1, 3, -2)$, $v = (-1, 1, 4)$, $u' = (-4, 20, 24)$ et $v' = (0, 4, 2)$. Montrer que u et v d'une part et u' et v' d'autre part engendrent le même espace vectoriel.

Exercice 19.5.4

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel.

1. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E .
2. La réunion de deux sous-espaces vectoriels est-elle encore un sous-espace vectoriel ?

Exercice 19.5.5

L'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & b-c \\ b-a & a+b+c & c \\ a & -a & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

est-il un \mathbb{R} -espace vectoriel ? Si oui, en déterminer une base.

Exercice 19.5.6

1. Montrer que $(1 + X, X + X^2, X^2 + 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $1 + X, X + X^2$ et $X^2 + 1$ sont tout trois combinaisons linéaires de la famille $(1 + X + X^2, 2 + X, 3)$. Que peut-on en déduire sur cette famille ?

Exercice 19.5.7

Étudier la liberté des familles suivantes :

1. $((1, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 2))$
2. $((1, 2), (2, 5))$
3. $((1, 2), (2, 4))$

$$4. \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$5. \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$6. (1 - X, 1 + X, 3 - 2X) \text{ dans } \mathbb{R}[X].$$

$$7. (1 - X + X^2, 1 + X + X^2, 3) \text{ dans } \mathbb{R}[X].$$

Exercice 19.5.8

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la famille $((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}, (4^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est-elle libre ?

Exercice 19.5.9

Soit $f : x \mapsto e^x$, $g : x \mapsto \ln(1 + x)$ et $h : x \mapsto x^2 + 1$. Déterminer une base de $\text{Vect}(f, g, h)$.

Exercice 19.5.10

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la famille $((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, a))$ est-elle libre ?

2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \right)$ est-elle libre ?

Exercice 19.5.11

Soit

$$F = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = 2 \frac{n+2}{n+1} u_{n+1} - \frac{n+2}{n} u_n \right\}$$

Soient a et b les suites définies sur \mathbb{N}^* par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = n \\ b_n = n^2 \end{cases}$$

Montrer que $F = \text{Vect}(a, b)$.

Exercice 19.5.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les coordonnées du polynôme $(1+X)^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 19.5.13

1. Montrer que l'ensemble F des suites réelles u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$ est un espace vectoriel.
2. En déterminer une base.
3. Soit u une suite de F telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = -1$. Déterminer les coordonnées de u dans la base trouvée à la question 2).

Exercice 19.5.14

Soit U l'espace vectoriel des suites réelles et soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de U .
2. Soit les suites a et b définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1$ et $b_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$. Montrer que (a, b) est une base de E .

Exercice 19.5.15

1. Soient $P_1 = 1, P_2 = X - 1$ et $P_3 = (X - 1)^2$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer, en fonction de P, P' et P'' , les coordonnées de P dans la base \mathcal{B} .
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 1$ et le déterminer.
4. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\mapsto (P(1), P'(1), P''(1)) \end{aligned}$$

est une bijection et déterminer sa réciproque.

Exercice 19.5.16

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les sous-ensembles $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \text{ est paire}\}$ et $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \text{ est impaire}\}$. Montrer que F_1 et F_2 sont deux espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 19.5.17

Dans \mathbb{R}^3 , on pose $F_1 = \text{Vect}((1, -1, 1), (0, 1, 1))$ et $F_2 = \text{Vect}((1, 2, 3))$. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

19.6 DM conducteur**Exercice 61 – Savoir reconnaître un espace vectoriel**

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels ? Bien sûr, on demande une preuve de votre affirmation.

1. $E = \{(x+y, x-2y), x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $F = \{(x+y, (x-2y)^2), x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AA^T = I_2\}$
4. $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AA^T = 0\}$
5. $I = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, -u_n + \sqrt{2}u_{n+2} = 0\}$

Correction. 1. $E = \{x \cdot (1, 1) + y \cdot (1, -2), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1), (1, -2))$ donc E est un espace vectoriel.

2. $(1+0, (1-2 \times 0)^2) = (1, 1)$ est un élément de F , mais pas son opposé, $(-1, -1)$. En effet, dans le cas contraire, il existerait $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $-1 = (x-2y)^2 \geq 0$, ce qui est impossible.
 F n'est donc pas un espace vectoriel.

3. $0_2 0_2^T = 0_2 \neq I_2$ donc $0_2 \notin G$ et G n'est pas un espace vectoriel.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} AA^T = 0 &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 0 \\ c^2 + d^2 = 0 \\ ac + bd = 0 \end{cases} \\ &\iff a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

En effet, si, par exemple, a était non nul, on aurait $a^2 > 0$ et $b^2 \geq 0$ donc $a^2 + b^2 > 0$.

Ainsi $H = \{0\}$ et H est un espace vectoriel (c'est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

5. — Notons $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite nulle. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} -z_n + \sqrt{2}z_{n+2} &= -0 + \sqrt{2} \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I$.
 — Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} -[\lambda u + \mu v]_n + \sqrt{2}[\lambda u + \mu v]_{n+2} &= -\lambda u_n - \mu v_n + \sqrt{2}\lambda u_{n+2} + \sqrt{2}\mu v_{n+2} \\ &= \lambda \underbrace{(-u_n + \sqrt{2}u_{n+2})}_{=0} + \mu \underbrace{(-v_n + \sqrt{2}v_{n+2})}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque u et v sont dans I .

Ainsi, $\lambda u + \mu v \in I$.

I est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et est un espace vectoriel.

Exercice 62 – Déterminer une famille génératrice et une base

Déterminer une famille génératrice et une base des espaces vectoriels suivants :

1. $E = \{(y - z, 3z - y, z + 12x), x, y, z \in \mathbb{R}\}$
2. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0, 3z + x - y = 0\}$
3. $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(3) = 0\}$

Correction. 1. On a

$$\begin{aligned} E &= \{x \cdot (0, 0, 12) + y \cdot (1, -1, 0) + z \cdot (-1, 3, 1), x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((0, 0, 12), (1, -1, 0), (-1, 3, 1)) \\ &= \text{Vect}((0, 0, 1), (1, -1, 0), (-1, 3, 1)) \left(c_1 \leftarrow \frac{1}{12}c_1 \right) \\ &= \text{Vect}((0, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 2, 0)) (c_3 \leftarrow c_3 - c_1 + c_2) \\ &= \text{Vect}((0, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 0)) \left(c_3 \leftarrow \frac{1}{2}c_3 \right) \\ &= \text{Vect}((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)) (c_2 \leftarrow c_2 + c_3) \\ &= \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

donc la famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $E = \mathbb{R}^3$ (c'en est la base canonique).

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E &\iff \begin{cases} x + y &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y &= 0 \\ -2y + 3z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y = \frac{-3}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{donc } E = \left\{ \left(\frac{-3}{2}z, \frac{3}{2}z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right) \right).$$

La famille $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right) \right)$ est donc une famille génératrice de E , et puisqu'elle n'est formée que d'un vecteur et que celui-ci est non nul, \mathcal{B} est libre : c'est une base de E .

3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
 P \in E &\iff P(3) = 0 \\
 &\iff X - 3 \text{ divise } P \\
 &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = (X - 3) \times Q \\
 &\iff \exists a, b \in \mathbb{R}, P = (X - 3) \times (a + bX) \\
 &\iff \exists a, b \in \mathbb{R}, P = a(X - 3) + bX(X - 3) \\
 &\iff P \in \text{Vect}(X - 3, X(X - 3))
 \end{aligned}$$

donc $E = \text{Vect}(X - 3, X(X - 3))$. La famille $\mathcal{B} = \text{Vect}(X - 3, X(X - 3))$ est donc une famille génératrice de E . Cette famille est échelonnée en degré et est donc libre.

\mathcal{B} est donc bien libre et est une base de E .

Exercice 63 – Espace vectoriel de suites

Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 4u_n = 0\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, dont on donnera une base \mathcal{B} et la dimension.
2. Soit $u \in E$ telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = -1$. Déterminer les coordonnées de u dans la base \mathcal{B} .

Correction. 1. La relation définissant les suites de E est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est $X^2 - 4 = 0$ ou encore $(X - 2)(X + 2) = 0$, et donc les racines sont 2 et -2 .

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 E &= \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times 2^n + \mu \times (-2)^n\} \\
 &= \{\lambda \cdot (2^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu \cdot ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}})
 \end{aligned}$$

E est donc un espace vectoriel, en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Montrons que la famille $\mathcal{B} = ((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \cdot (2^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu \cdot ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda \times 2^n + \mu \times (-2)^n = 0$$

Alors, avec $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -4\lambda_2 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0
 \end{aligned}$$

donc la famille \mathcal{B} est libre.

Finalement, \mathcal{B} est une base de E , qui est de dimension 2.

2. Soit $u \in E$ telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = -1$. On cherche le couple de réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = x \cdot (2^n)_{n \in \mathbb{N}} + y \cdot ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x \times 2^n + y \times (-2)^n$$

Avec $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 2y = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y = 2 \\ -4y = -5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = 2 \\ y = \frac{5}{4} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

u a donc pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ dans la base \mathcal{B} .

Exercice 64

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

- Justifier que la famille $\mathcal{B} = \left((X - \alpha)^k\right)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Exprimer les coordonnées de P dans la base \mathcal{B} , en fonction de $P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{(n)}(\alpha)$.
- Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_3[X]$ tel que $P(1) = 3, P'(1) = i, P''(1) = 1 - i$ et $P^{(3)}(1) = 2$ et le déterminer.

Correction. 1. La famille \mathcal{B} est une famille libre (car échelonnée en degrés) de $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$. Puisque $n + 1$ est aussi la dimension de $\mathbb{C}_n[X]$, la famille \mathcal{B} est en réalité une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. On peut utiliser la formule de Taylor polynomiale :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

Ainsi, dans la base \mathcal{B} , le polynôme P a pour coordonnées

$$\left(P(\alpha), \frac{P'(\alpha)}{1!}, \frac{P''(\alpha)}{2!}, \dots, \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}\right) = \left(\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\right)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$$

3. Notons $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$. D'après ce qui précède, c'est une base de $\mathbb{C}_3[X]$. Soit $P \in \mathbb{C}_3[X]$
Alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(1) = 3 \\ P'(1) = i \\ P''(1) = 1 - i \\ P^{(3)}(1) = 2 \end{cases} &\iff P \text{ a pour coordonnées } \left(3, \frac{i}{1!}, \frac{1-i}{2!}, \frac{2}{3!}\right) \text{ dans la base } \mathcal{B} \\ &\iff P = 3 + i \times (X - 1) + \frac{1-i}{2} \times (X - 1)^2 + \frac{1}{3} \times (X - 1)^3 \end{aligned}$$

Le polynôme $P = 3 + i \times (X - 1) + \frac{1-i}{2} \times (X - 1)^2 + \frac{1}{3} \times (X - 1)^3$ est donc le seul polynôme de $\mathbb{C}_3[X]$ vérifiant $P(1) = 3, P'(1) = i, P''(1) = 1 - i$ et $P^{(3)}(1) = 2$.

Chapitre 20

Espaces vectoriels de dimension finie

20.1	Espaces vectoriels de dimension finie	626
20.2	Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie	628
20.2.1	Mise en place de la définition	628
20.2.2	Dimensions des espaces vectoriels de référence	630
20.2.3	Caractérisation des bases en dimension finie	631
20.2.4	Rang d'une famille de vecteurs	632
20.3	Sous-espaces vectoriels en dimension finie	633
20.3.1	Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie	633
20.3.2	Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie	634
20.4	Exercices	637

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

20.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 20.1.1

On dit qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est *de dimension finie* lorsqu'il admet une famille génératrice finie.

Exemple 20.1.2

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \mathbb{K}^n est de dimension finie : sa base canonique

$$((1, 0, 0, \dots, 0, 0), (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, 1))$$

en est une famille génératrice.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie : il est engendré par sa base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. Cependant, nous verrons que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

— Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie (de nouveau, il est engendré par sa base canonique).

Théorème 20.1.3

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient I et J deux ensembles finis tels que $I \subset J$.

On suppose que $(e_j)_{j \in J}$ est une famille génératrice de E , et que $(e_i)_{i \in I}$ est une sous-famille libre de $(e_j)_{j \in J}$.

Alors il existe un ensemble K tel que :

— $I \subset K \subset J$.

— $(e_k)_{k \in K}$ est une base de E .

Démonstration. On considère l'ensemble

$$A = \{ \text{Card}(K), I \subset K \subset J, (e_k)_{k \in K} \text{ est libre} \}$$

Puisque $I \in A$, A est une partie non vide de \mathbb{N} . De plus, A est majorée par $\text{Card}(J)$.

En tant que partie non vide majorée de \mathbb{N} , A admet un plus grand élément, que nous noterons n . Par définition, il existe alors un ensemble K , de cardinal n , tel que $I \subset K \subset J$ et tel que $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in K}$ est libre. On va alors montrer que \mathcal{B} est une famille génératrice de $(E, +, \cdot)$.

Rappelons l'implication suivante :

$$\begin{aligned} (\forall j \in J, e_j \in \text{Vect}(e_k)_{k \in K}) &\implies (E = \text{Vect}(e_j)_{j \in J} \subset \text{Vect}(e_k)_{k \in K} \subset E) \\ &\implies \text{Vect}(e_k)_{k \in K} = E \end{aligned}$$

Par contraposée, si l'on suppose que \mathcal{B} n'est pas une famille génératrice de E : il existe alors $j \in J$ tel que $e_j \notin \text{Vect}(e_k)_{k \in K}$. En particulier, $j \notin K$. La famille $(e_k)_{k \in K \cup \{j\}}$ est alors libre, ce qui est absurde car :

— $I \subset K \cup \{j\} \subset J$

— $\text{Card}(K \cup \{j\}) = n + 1 > n$

— $n = \max(A)$

La famille \mathcal{B} est alors génératrice de E . Étant libre, c'est une base de E . □

Théorème 20.1.4 – Théorème de la base extraite

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que E admet une famille génératrice finie \mathcal{G} . Alors, il existe une sous-famille de \mathcal{G} qui est une base de E .

Remarque 20.1.5

Autrement dit, de toute famille génératrice finie de E , on peut extraire une base.

Démonstration. Notons $\mathcal{G} = (e_j)_{j \in J}$, qui est par hypothèse une famille génératrice de E . Notons $I = \emptyset$. Alors $(e_i)_{i \in I}$ est libre : l'assertion

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, \left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E \right) \implies (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$$

est vraie, puisque sa négation est

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, \left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E \right) \text{ et } \underbrace{(\exists i \in I, \lambda_i \neq 0)}_{\text{impossible : } I = \emptyset}$$

On a alors :

- $I \subset J$
- $(e_i)_{i \in I}$ est libre
- $(e_j)_{j \in J}$ est génératrice de E

D'après le théorème précédent, on en déduit qu'il existe un ensemble fini K tel que $I \subset K \subset J$ tel que $(e_k)_{k \in K}$, sous-famille de $(e_j)_{j \in J}$, est une base de E . \square

Remarque 20.1.6

En pratique, pour extraire une base de E à partir d'une famille génératrice \mathcal{G} de E , on peut procéder ainsi :

- Si \mathcal{G} est libre, c'est une base de E : on s'arrête.
- Sinon, \mathcal{G} est liée : un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres. De \mathcal{G} , on peut retirer ce vecteur : on obtient une famille génératrice de E comportant un élément de moins.

On réitère ce procédé jusqu'à obtenir une famille libre et génératrice de E . On sait que cela arrivera : dans le pire des cas, on aura retiré tous les vecteurs de \mathcal{G} , en gardant à chaque étape une famille génératrice. On obtiendra alors la famille vide, qui est aussi libre.

Exercice 20.1.7

Extraire, de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$, une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Théorème 20.1.8 – Théorème de la base incomplète

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, **que l'on suppose de dimension finie**.

Soit I un ensemble fini et $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E . Alors, il existe une base de E de la forme $(e_k)_{k \in K}$, où K est un ensemble tel que $I \subset K$.

Démonstration. Par hypothèse, E admet une famille génératrice finie $(e_j)_{j \in J}$. La famille $(e_j)_{j \in J'}$, où l'on a noté $J' = I \cup J$, est donc encore génératrice de E . De plus, $(e_i)_{i \in I}$ est libre et $I \subset J'$: le théorème 20.1.3 prouve alors l'existence d'un ensemble K tel que $I \subset K \subset J'$ et tel que $(e_k)_{k \in K}$ est une base de E . \square

Remarque 20.1.9

- Autrement dit, dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, on peut compléter toute famille libre en une base de E .
 - En théorie, dans un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ de dimension finie, et dont \mathcal{G} est une famille génératrice, on peut construire une base à partir d'une famille libre \mathcal{L} de la façon suivante :
 - Si \mathcal{L} est génératrice de E , alors c'est une base de E .
 - Sinon, \mathcal{G} contient nécessairement un vecteur qui n'est pas dans $\text{Vect}(\mathcal{L})$. On concatène ce vecteur à \mathcal{L} , et on obtient une nouvelle famille, qui est encore libre.
- On recommence ce procédé jusqu'à obtenir une famille libre et génératrice de E . On est certain que cet algorithme s'arrête : dans le pire des cas, on aura concaténé à \mathcal{L} tous les éléments de \mathcal{G} , et on obtiendra bien une famille libre et génératrice de E .

Exercice 20.1.10

Compléter $(1 + X, 1 - X^2)$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Corollaire 20.1.11

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors :

$$E \text{ est de dimension finie} \iff E \text{ admet une base finie}$$

Démonstration. Le sens réciproque est immédiat. Pour le sens direct, si E est de dimension finie, il admet une famille génératrice dont on peut extraire une base. □

20.2 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

20.2.1 Mise en place de la définition

Propriété 20.2.1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ admet une famille génératrice formée de n vecteurs, alors toute famille de $n + 1$ vecteurs de E est liée.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons \mathcal{P}_n la propriété de l'énoncé.

- Si la famille vide est génératrice de E , c'est que $E = \{0_E\}$. La seule famille formée d'un seul vecteur de E est alors (0_E) , qui est bien liée. \mathcal{P}_0 est donc vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que \mathcal{P}_n est vraie. Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est encore vraie.
 Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel admettant une famille génératrice $\mathcal{G} = (e_j)_{j \in J}$ formée de $n + 1$ vecteurs. Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille formée de $n + 2$ vecteurs de E . Soit $i_0 \in I$.
 Si $u_{i_0} = 0_E$, alors la famille \mathcal{F} est liée et il ne reste rien à montrer. On suppose donc que $u_{i_0} \neq 0_E$.
 Puisque la famille \mathcal{G} est génératrice de E , pour tout $i \in I$, il existe $(\lambda_{i,j})_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ telle que

$$u_i = \sum_{j \in J} \lambda_{i,j} e_j$$

En particulier :

$$u_{i_0} = \sum_{j \in J} \lambda_{i_0,j} e_j$$

Puisque $u_{i_0} \neq 0_E$, il existe $j_0 \in J$ tel que $\lambda_{i_0,j_0} \neq 0$. Nous allons utiliser ce coefficient non nul pour simplifier les éléments de \mathcal{F} .

On pose :

$$\forall i \in I \setminus \{i_0\}, w_i = u_i - \frac{\lambda_{i,j_0}}{\lambda_{i_0,j_0}} u_{i_0}$$

On va alors montrer que, pour tout $i \in I \setminus \{i_0\}$, $w_i \in F$ où $F = \text{Vect}(e_j)_{j \in J \setminus \{j_0\}}$. Cela nous permettra en effet d'utiliser notre hypothèse de récurrence, puisque F est alors engendré par la famille $(e_j)_{j \in J \setminus \{j_0\}}$, formée de $n+1-1 = n$ vecteurs.

Soit $i \in I \setminus \{i_0\}$. Alors :

$$\begin{aligned} w_i &= u_i - \frac{\lambda_{i,j_0}}{\lambda_{i_0,j_0}} u_{i_0} \\ &= \sum_{j \in J} \lambda_{i,j} e_j - \frac{\lambda_{i,j_0}}{\lambda_{i_0,j_0}} \sum_{j \in J} \lambda_{i_0,j} e_j \\ &= \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} \lambda_{i,j} e_j - \frac{\lambda_{i,j_0}}{\lambda_{i_0,j_0}} \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} \lambda_{i_0,j} e_j + \underbrace{\lambda_{i,j_0} e_{j_0} - \frac{\lambda_{i,j_0}}{\lambda_{i_0,j_0}} \lambda_{i_0,j_0} e_{j_0}}_{=0_E} \end{aligned}$$

donc $w_i \in \text{Vect}(e_j)_{j \in J \setminus \{j_0\}}$.

La famille $(w_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ est alors une famille de $n+1$ vecteurs de l'espace $F = (e_j)_{j \in J \setminus \{j_0\}}$, engendré par n vecteurs : c'est donc une famille liée. Il existe donc une famille de scalaires $(\alpha_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \in \mathbb{K}^{I \setminus \{i_0\}}$ **non tous nuls** telle que

$$\sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \alpha_i w_i = 0_E$$

ou encore

$$\sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \alpha_i \left(u_i - \frac{\lambda_{i,j_0}}{\lambda_{i_0,j_0}} u_{i_0} \right) = 0_E$$

ou enfin

$$\sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \alpha_i u_i - \left(\sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \alpha_i \frac{\lambda_{i,j_0}}{\lambda_{i_0,j_0}} \right) u_{i_0} = 0_E$$

Puisque les $(\alpha_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ ne sont pas tous nuls, on a bien montré que $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ est liée.

Dans tous les cas, \mathcal{F} est une famille liée, ce qui achève la récurrence. □

Corollaire 20.2.2

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que \mathcal{L} est une famille libre de E , et que \mathcal{G} est une famille génératrice de E , ces familles étant finies. Alors

$$\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$$

Remarque 20.2.3

On note, par abus de langage, $\text{Card}(\mathcal{L})$ le nombre de vecteurs formant la famille \mathcal{L} . Autrement dit, si $\mathcal{L} = (e_i)_{i \in I}$, alors on note $\text{Card}(\mathcal{L}) = \text{Card}(I)$.

Démonstration. Notons $n = \text{Card}(\mathcal{G})$ et supposons que $\text{Card}(\mathcal{L}) \geq n+1$. Prenons une sous-famille de \mathcal{L} formée de $n+1$ vecteurs : elle est liée d'après le résultat précédent. \mathcal{L} serait donc liée, ce qui contredit les hypothèses initiales. □

Théorème 20.2.4 – Théorème de la dimension

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal.

Démonstration. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .

- Puisque \mathcal{B} est libre et \mathcal{B}' est génératrice de E , on a $\text{Card}(\mathcal{B}) \leq \text{Card}(\mathcal{B}')$.
- Puisque \mathcal{B}' est libre et \mathcal{B} est génératrice de E , on a $\text{Card}(\mathcal{B}') \leq \text{Card}(\mathcal{B})$.

Finalement, $\text{Card}(\mathcal{B}) = \text{Card}(\mathcal{B}')$. □

Toutes les bases de E ayant même cardinal, on peut alors définir la notion de *dimension* d'un espace vectoriel.

Définition 20.2.5 – Dimension d'un espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel de dimension finie. E admet donc une base : on appelle *dimension de E* le cardinal de toute base de E , et on note $\dim(E)$ cet entier naturel.

Exemple 20.2.6

$(1, X, \dots, X^n)$ étant une base de $\mathbb{K}_n[X]$, celui-ci est de dimension $n + 1$.

Remarque 20.2.7

Le sous-espace nul est de dimension 0 (la famille vide en est une base).

Propriété 20.2.8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , avec $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- Les familles libres de E comportent au plus n éléments.
- Les familles génératrices de E comportent au moins n éléments.

Démonstration. E étant de dimension finie, il admet une famille génératrice finie, dont on peut extraire une base \mathcal{B} qui est nécessairement formée de n éléments.

Soit \mathcal{L} une famille libre. \mathcal{B} étant une base de E , c'en est une famille génératrice donc on a $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \text{Card}(\mathcal{B}) = n$.

Soit \mathcal{G} une famille génératrice de E . \mathcal{B} étant une base de E , elle est libre donc $n = \text{Card}(\mathcal{B}) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$. □

20.2.2 Dimensions des espaces vectoriels de référence

Propriété 20.2.9

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$
- Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$

Démonstration. Il suffit d'observer les bases canoniques de ces espaces vectoriels. □

Propriété 20.2.10

- $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
- Si I est intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ n'est pas de dimension finie.
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.

Démonstration. Dans chacun des cas, on peut créer une famille libre arbitrairement grande, ce qui entrerait en contradiction avec la propriété 20.2.8 dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie.

- Supposons $\mathbb{K}[X]$ de dimension finie n . Pour tout $d \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \dots, X^d)$ est libre (c'est une base de $\mathbb{K}_d[X]$). On a donc

$$\forall d \in \mathbb{N}, d+1 \leq n$$

ce qui est absurde.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{array}{ccc} f_k & : & I \rightarrow \mathbb{K} \\ & & x \mapsto x^k \end{array}$$

On montre alors que la famille $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre. En effet, soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et supposons que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$, où 0 désigne la fonction nulle sur I .

On a donc

$$\forall x \in I, \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k = 0$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ admet donc une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul, ainsi $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Contenant des familles libres arbitrairement longues, $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ n'est pas de dimension finie.

- Même raisonnement, en définissant pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite notée u^k définie par

$$\forall j \in \mathbb{N}, u_j^k = j^k$$

□

20.2.3 Caractérisation des bases en dimension finie

Théorème 20.2.11

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de E , **formée d'exactly n éléments**. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. \mathcal{F} est une famille libre.
2. \mathcal{F} est une famille génératrice de E .
3. \mathcal{F} est une base de E .

Démonstration. — Montrons que $1 \implies 2$. On suppose donc que \mathcal{F} est libre. Supposons que \mathcal{F} ne soit pas génératrice de E : il existe alors un élément v de E qui n'est pas dans $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n, v)$ est donc une famille libre de E , formée de $n+1$ éléments : c'est impossible puisque E est de dimension n .

\mathcal{F} est donc nécessairement génératrice de E .

- Montrons que $2 \implies 3$. On suppose donc que \mathcal{F} est génératrice de E . Il reste à montrer qu'elle est libre. Supposons que ce ne soit pas le cas : un des vecteurs de \mathcal{F} est donc combinaison linéaire des autres. En le retirant, on obtient une famille génératrice de E formée de $n-1$ éléments : impossible d'après 20.2.8. \mathcal{F} est donc nécessairement libre, et c'est une base de E .

- L'implication $3 \implies 1$ est évidente.

□

Exercice 20.2.12

Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1))$ est une base de \mathbb{K}^3 .

Exercice 20.2.13

Montrer que

$$F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n\}$$

est un espace vectoriel de dimension 2, dont on donnera une base.

Exercice 20.2.14

Montrer que

$$F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0\}$$

est un plan vectoriel dont on donnera une base.

20.2.4 Rang d'une famille de vecteurs**Définition 20.2.15 – Rang d'une famille de vecteurs**

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $(e_j)_{j \in J}$ une famille finie de E . $\text{Vect}(e_j)_{j \in J}$ étant, par définition, de dimension finie, on note

$$\text{rg}(e_j)_{j \in J} = \dim(\text{Vect}(e_j)_{j \in J})$$

Cet entier est appelé *rang de la famille* $(e_j)_{j \in J}$.

Exercice 20.2.16

Déterminer

$$\text{rg}(1 + X, 1 + X + X^2, 1 - 3X + X^2, X + 5X^2)$$

Propriété 20.2.17

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $(e_j)_{j \in J}$ une famille de vecteurs de E , formée de $p \in \mathbb{N}$ éléments.

1. $\text{rg}(e_j)_{j \in J} \leq p$
2. $(e_j)_{j \in J}$ est libre si et seulement si $\text{rg}(e_j)_{j \in J} = p$.

Démonstration. $(e_j)_{j \in J}$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(e_j)_{j \in J}$, formée de p élément. Toute base de $\text{Vect}(e_j)_{j \in J}$ est donc formée de moins de p éléments, ainsi $\text{rg}(e_j)_{j \in J} \leq p$.

De plus :

$$\begin{aligned} (e_j)_{j \in J} \text{ est libre} &\iff (e_j)_{j \in J} \text{ est une base de } \text{Vect}(e_j)_{j \in J} \\ &\iff \dim(\text{Vect}(e_j)_{j \in J}) = p \\ &\iff \text{rg}(e_j)_{j \in J} = p \end{aligned}$$

On a utilisé le théorème 20.2.11, sachant que $(e_j)_{j \in J}$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(e_j)_{j \in J}$. □

20.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

20.3.1 Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie

Théorème 20.3.1

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. Alors F est de dimension finie et

$$\dim(F) \leq \dim(E)$$

Démonstration. On considère l'ensemble

$$A = \{\text{Card}(\mathcal{L}), \mathcal{L} \text{ est une famille libre de } F\}$$

A est une partie non vide de \mathbb{N} , puisque la famille vide est une famille libre de F .

De plus, toute famille libre de F est aussi une famille libre de E , qui est de dimension finie. D'après 20.2.8, A est donc majorée par $\dim(E)$.

En tant que partie non vide majorée de \mathbb{N} , A admet un plus grand élément : notons-le p . Par définition, il existe donc une famille libre $\mathcal{L} = (f_1, \dots, f_p)$ de F formée de p éléments.

La famille \mathcal{L} est alors nécessairement génératrice de F . En effet, dans le cas contraire, il existerait un vecteur $v \in F$ qui n'est pas dans $\text{Vect}(f_k)_{k \in [1;p]}$. La famille $(f_1, f_2, \dots, f_p, v)$ serait alors une famille libre de F formée de $p+1$ éléments : absurde car p est le cardinal maximal des familles libres de \mathcal{F} .

\mathcal{L} est donc une base de F , qui est donc de dimension finie.

De plus

$$\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{L}) = p \leq \dim(E)$$

puisque $p \in A$ et $\dim(E)$ est un majorant de A . □

Propriété 20.3.2

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. Alors

$$F = E \iff \dim(F) = \dim(E)$$

Démonstration. On sait déjà que F est de dimension finie.

Le sens direct est évident, occupons-nous de la réciproque et supposons que $\dim(F) = \dim(E)$. Notons n cette dimension commune. Puisque F est de dimension finie n , F admet une base que nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

La famille \mathcal{B} est donc une famille libre, et ses vecteurs sont dans F donc dans E puisque $F \subset E$. \mathcal{B} est donc une famille libre de n éléments de E . Or $\dim(E) = n$, donc \mathcal{B} est en fait une base de E . Ainsi :

$$E = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n) = F$$
□

Exemple 20.3.3

Soit $F = \text{Vect}(X-1, X^2-1)$ et $G = \text{Vect}(X^2-1, 2X^2-X-1)$. Montrer que $F = G$.

Propriété 20.3.4 – Retour sur le rang

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, et $(e_j)_{j \in J}$ une famille finie de vecteurs de E .

$$1. \text{ rg}(e_j)_{j \in J} \leq n$$

2. $(e_j)_{j \in J}$ est génératrice de E si et seulement si $\text{rg}(e_j)_{j \in J} = n$.

Démonstration. 1. $\text{Vect}(e_j)_{j \in J}$ est un sous-espace vectoriel de E , qui est de dimension n . Ainsi :

$$\text{rg}(e_j)_{j \in J} = \dim(\text{Vect}(e_j)_{j \in J}) \leq \dim(E) = n$$

2. Le sens direct est évident, et le sens réciproque est une conséquence directe de la propriété 20.3.2. □

Corollaire 20.3.5

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel **de dimension finie** $n \in \mathbb{N}$, et \mathcal{B} une famille finie de vecteurs de E **formée d'exactly n vecteurs**. Alors

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } E \iff \text{rg}(\mathcal{B}) = n$$

Démonstration. Puisque $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$, on a

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } E \iff \mathcal{B} \text{ est génératrice de } E \iff \text{rg}(\mathcal{B}) = n$$
□

20.3.2 Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

Propriété 20.3.6

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que F et G sont de dimension finie.

Soient (f_1, f_2, \dots, f_p) une famille génératrice de F et (g_1, g_2, \dots, g_q) une famille génératrice de G , avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Alors $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une famille génératrice de $F + G$.

Démonstration. Si $p = 0$ ou $q = 0$, le résultat est immédiat (l'une des deux familles est vide). On supposera donc que $p \neq 0$ et $q \neq 0$.

Il est clair que les vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$ sont dans $F + G$.

Soit $x \in F + G$. Il existe donc $u \in F$ et $v \in G$ tels que $x = f + g$. Puisque (f_1, f_2, \dots, f_p) est une famille génératrice de F ,

il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ telle que $f = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k$.

De même, (g_1, g_2, \dots, g_q) est une famille génératrice de G donc il existe $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q$ telle que $g = \sum_{k=1}^q \mu_k g_k$.

Finalement,

$$x = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k + \sum_{k=1}^q \mu_k g_k \in \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$$

donc $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est génératrice de E . □

Théorème 20.3.7 – Formule de Grassmann

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que F et G sont de dimension finie.

Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration. $F \cap G$ est de dimension finie : c'est un sous-espace vectoriel de F , qui est supposé de dimension finie. Considérons une base $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$ de $F \cap G$. C'est une famille libre de F : on peut donc la compléter en une base $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p, f_1, \dots, f_q)$ de F . Mais \mathcal{U} est aussi une famille libre de G : on peut la compléter en une base $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p, g_1, \dots, g_r)$ de G . p, q et r sont ici des entiers naturels. Il s'agit maintenant de montrer que $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est une base de $F + G$. Une fois ceci prouvé, on aura effectivement

$$\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = (p + q) + (p + r) - p = p + q + r = \dim(F + G)$$

$(u_1, \dots, u_p, f_1, \dots, f_q)$ est une famille génératrice de F , et $(u_1, \dots, u_p, g_1, \dots, g_r)$ est une famille génératrice de G . D'après la propriété 20.3.6, et en retirant les vecteurs u_1, \dots, u_p qui apparaissent en double, la famille \mathcal{B} est bien génératrice de $F + G$.

Il reste à montrer que \mathcal{B} est libre. Soient $(\alpha_k)_{k \in \llbracket 1; p \rrbracket} \in \mathbb{K}^{\llbracket 1; p \rrbracket}$, $(\beta_k)_{k \in \llbracket 1; q \rrbracket} \in \mathbb{K}^{\llbracket 1; q \rrbracket}$ et $(\gamma_k)_{k \in \llbracket 1; r \rrbracket} \in \mathbb{K}^{\llbracket 1; r \rrbracket}$. On suppose que

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^q \beta_k f_k + \sum_{k=1}^r \gamma_k g_k = 0_E \quad (\star)$$

On a donc en particulier

$$\underbrace{\sum_{k=1}^r \gamma_k g_k}_{\in G} = - \underbrace{\sum_{k=1}^p \alpha_k u_k}_{\in F \cap G} - \underbrace{\sum_{k=1}^q \beta_k f_k}_{\in F}$$

donc $\sum_{k=1}^r \gamma_k g_k \in F \cap G$, et il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^r \gamma_k g_k = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k$$

c'est-à-dire

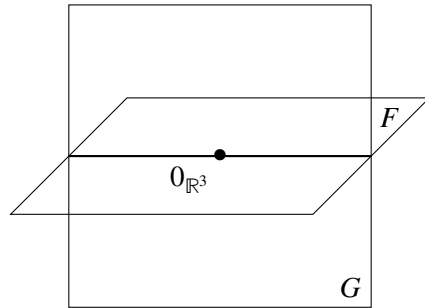
$$0_E = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k - \sum_{k=1}^r \gamma_k g_k$$

Puisque $(u_1, \dots, u_p, g_1, \dots, g_r)$ est libre, cela implique en particulier que $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket, \gamma_k = 0$.

On montre de la même manière, en isolant $\sum_{k=1}^q \beta_k f_k$, que β_k est nul pour tout $k \in \llbracket 1; q \rrbracket$. L'égalité (\star) devient alors

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k u_k = 0_E : \text{puisque } (u_1, \dots, u_p) \text{ est libre, on a alors } \alpha_k = 0 \text{ pour tout } k \in \llbracket 1; p \rrbracket.$$

La famille \mathcal{B} est donc bien libre et est une base de E . □



Sur ce dessin, F et G sont deux plans vectoriels de \mathbb{R}^3 . Leur intersection est une droite vectorielle, qui est donc de dimension 1. De plus, $F + G = \mathbb{R}^3$.

$$\text{On a bien } \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim(F + G).$$

Corollaire 20.3.8

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E = F \oplus G$.
2. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
3. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
4. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $E = F + G$.

Démonstration. — L'équivalence $1 \iff 2$ a été vue dans le précédent chapitre d'algèbre linéaire.

— Montrons que $2 \implies 3$. Supposons que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$. D'après la formule de Grassmann, on a alors

$$\dim(E) = \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0} = \dim(F) + \dim(G)$$

— Montrons que $3 \implies 4$. On suppose donc que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et que $F \cap G = \{0_E\}$. On a alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E . On a donc bien $F + G = E$.

— Montrons pour finir que $4 \implies 1$. On suppose donc que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $E = F + G$. Il reste à montrer que la somme $F + G$ est directe. D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(F \cap G) = \underbrace{\dim(F) + \dim(G)}_{=\dim(E)} - \dim\left(\underbrace{F + G}_{=E}\right) = 0$$

donc $F \cap G = \{0_E\}$ est la somme $F + G$ est directe. □

Propriété 20.3.9

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Soient (f_1, \dots, f_p) une base de F et (g_1, \dots, g_q) une base de G .

On note $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$.

Alors :

$$E = F \oplus G \iff \mathcal{B} \text{ est une base de } E$$

On dit alors que \mathcal{B} est une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Démonstration. D'après 20.3.6, \mathcal{B} est une famille génératrice de $F + G$, de sorte que $F + G = \text{Vect}(\mathcal{B})$. Ainsi :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff \begin{cases} E = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} E = \text{Vect}(\mathcal{B}) \\ \dim(E) = p + q \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mathcal{B} \text{ est génératrice de } E \\ \dim(E) = \text{Card}(\mathcal{B}) \end{cases} \\ &\iff \mathcal{B} \text{ est une base de } E \end{aligned}$$

■ d'après 20.2.11 □

Corollaire 20.3.10

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel **de dimension finie**. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F admet un supplémentaire dans E .

Autrement dit, il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

Démonstration. En tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, F est de dimension finie et admet donc une base (f_1, f_2, \dots, f_p) . Cette base de F est aussi une famille libre de E : on peut la compléter en une base $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ de E .

Posons alors $G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_q)$. (g_1, \dots, g_q) est alors une base de G (elle est libre puisque c'est une sous-famille d'une famille libre).

Finalement :

- (f_1, \dots, f_p) est une base de F
- (g_1, \dots, g_q) est une base de G
- $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E

D'après 20.3.9, on a donc bien $E = F \oplus G$. □

Exercice 20.3.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, dans $\mathbb{K}_n[X]$, un supplémentaire de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ et une base adaptée à la décomposition obtenue.

Exercice 20.3.12

Dans \mathbb{R}^3 , déterminer un supplémentaire de la droite vectorielle $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et une base adaptée à la décomposition obtenue.

20.4 Exercices

Exercice 20.4.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(3) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 20.4.2

Soient a, b et c trois réels.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix} \right)$ soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Même question pour la famille $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 20.4.3

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3))$
2. $((1, -1, 2, 0), (1, 1, 2, 2), (0, 2, 1, 2), (0, -2, 0, -2))$

3. $((1, 2), (3, 4))$
4. $(1 + X, 2 + X^2, 3 + X)$
5. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 20.4.4

Montrer que

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + \frac{x^2}{x^2 + 1} f(x) = 0 \right\}$$

est une droite vectorielle dont on donnera une base.

Exercice 20.4.5

Dans \mathbb{R}^3 , on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(1, 1, 1)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 20.4.6

1. Montrer que

$$F = \text{Vect}(X + 1, X^2 + 1)$$

et

$$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P'(1) = 0\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Donner une base adaptée à cette décomposition.
3. Décomposer $Q = 1 - X + X^3$ dans $F \oplus G$.

Exercice 20.4.7

On définit les quatre fonctions suivantes sur \mathbb{R} :

$$f_1 : x \mapsto \cos(x)$$

$$f_2 : x \mapsto \cos(2x)$$

$$f_3 : x \mapsto \sin(x)$$

$$f_4 : x \mapsto \sin(2x)$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.
2. On note $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$ et $G = \text{Vect}(f_3, f_4)$. Justifier que F et G sont en somme directe.

Exercice 20.4.8

On considère l'application

$$f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + z \\ 2y + z \\ z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les ensembles

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = X\}$$

et

$$G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 2X\}$$

sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X+Y) = f(X) + f(Y)$$

3. Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G$. Vérifier que la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, adaptée à $F \oplus G$.

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(a) Décomposer X dans $F \oplus G$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer simplement $f^n(X)$.

Exercice 20.4.9

Montrer que

$$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n\}$$

est un \mathbb{C} -espace vectoriel dont on précisera une base et la dimension.

Chapitre 21

Applications linéaires

21.1	Applications linéaires	642
21.1.1	Définition	642
21.1.2	Opérations sur les applications linéaires	644
21.1.3	Noyau d'une application linéaire	647
21.1.4	Image d'une application linéaire	648
21.1.5	Caractérisation des applications linéaires surjectives, injectives, bijectives	649
21.1.6	Rang d'une application linéaire	650
21.2	Endomorphismes remarquables	653
21.2.1	Puissances d'un endomorphisme	653
21.2.2	Groupe linéaire	653
21.2.3	Homothéties	654
21.2.4	Projections	654
21.2.5	Symétries	656
21.3	Applications linéaires en dimension finie	659
21.3.1	Détermination d'une application linéaire	659
21.3.2	Isomorphismes en dimension finie	661
21.3.3	Théorème du rang	663
21.4	Équations linéaires	665
21.5	Formes linéaires et hyperplans	667
21.6	Exercices	669
21.7	DM conducteur	675

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

21.1 Applications linéaires

21.1.1 Définition

Définition 21.1.1

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

— On appelle *application linéaire de E vers F* toute application $\varphi \in \mathcal{F}(E, F)$ telle que :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2, \varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$$

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

— On appelle *isomorphisme de E vers F* toute application linéaire **bijective** de E vers F .

— On appelle *endomorphisme de E* toute application linéaire de E vers E .

L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

— On appelle *automorphisme de E* tout endomorphisme bijectif de E .

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\text{GL}(E)$.

Remarque 21.1.2

Si φ est une application linéaire de E vers F :

— Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\varphi(x + y) = \varphi(1 \cdot x + 1 \cdot y) = 1 \cdot \varphi(x) + 1 \cdot \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

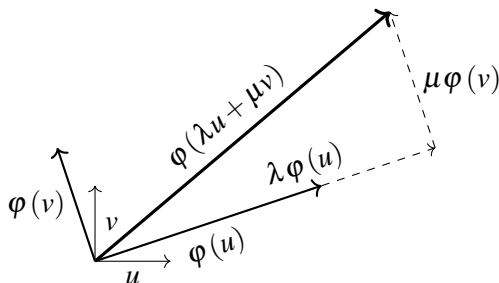
— Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\varphi(\lambda x) = \varphi(\lambda x + 0 \cdot 0_E) = \lambda \varphi(x) + 0 \cdot \varphi(0_E) = \lambda \varphi(x)$$

— On a nécessairement $\varphi(0_E) = 0_F$, puisque :

$$\varphi(0_E) = \varphi(0_E + 0_E) = \varphi(0_E) + \varphi(0_E)$$

et il suffit alors d'ajouter $-\varphi(0_E)$.



Exercice 21.1.3

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+y \\ -2x+3y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est une application linéaire.

Exercice 21.1.4

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P - XP' \end{aligned}$$

est un endomorphisme.

Exercice 21.1.5

L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy + 1 \end{aligned}$$

est-elle linéaire ?

L'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

est-elle linéaire ?

Exercice 21.1.6

Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto M^T \end{aligned}$$

est un automorphisme.

Définition 21.1.7 – L'application identité

Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel. L'application identité de E est l'application

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

C'est un endomorphisme de E .

Démonstration. Il est clair que Id_E va bien de E vers lui-même.

Pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\text{Id}_E(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y = \lambda \text{Id}_E(x) + \mu \text{Id}_E(y)$$

donc $\text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$. □

Propriété 21.1.8

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout ensemble fini J :

$$\forall (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J, \forall (x_j)_{j \in J} \in E^J, f\left(\sum_{j \in J} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j \in J} \lambda_j f(e_j)$$

■ *Démonstration.* C'est une récurrence immédiate sur le cardinal de J . □

21.1.2 Opérations sur les applications linéaires**Combinaison linéaire****Propriété 21.1.9 – Préliminaire**

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Alors $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration. Montrons que la somme de deux éléments de $\mathcal{F}(E, F)$ est encore dans $\mathcal{F}(E, F)$. Soient $f, g \in \mathcal{F}(E, F)$ et $x \in E$. On a :

$$(f + g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in F} + \underbrace{g(x)}_{\in F} \in F$$

puisque F est stable par combinaison linéaire. Ainsi $f + g \in \mathcal{F}(E, F)$.

De même, pour $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et pour tout $x \in E$:

$$(\lambda f)(x) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\in F} \in F$$

Ainsi $\lambda f \in \mathcal{F}(E, F)$.

L'associativité, la commutativité de $+$ ne pose pas de difficulté, de même pour la distributivité à droite et à gauche, la pseudo-associativité de \cdot et la neutralité de 1. Le vecteur nul est l'application nulle

$$\begin{aligned} \tilde{0} &: E \rightarrow F \\ x &\mapsto 0_F \end{aligned}$$

et $f \in \mathcal{F}(E, F)$ admet $-f : x \mapsto -f(x)$ pour symétrique. □

Propriété 21.1.10

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration. On montre que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$. Il est clair que $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{F}(E, F)$.

— En notant $\tilde{0}$ l'application nulle de E vers F , on a pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tout $x, y \in E$:

$$\tilde{0}(\lambda x + \mu y) = 0_F = \lambda \tilde{0}(x) + \mu \tilde{0}(y)$$

donc $\tilde{0} \in \mathcal{L}(E, F)$.

— Montrons que $\mathcal{L}(E, F)$ est stable par combinaison linéaire. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$.

$$\begin{aligned}
 (\alpha f + \beta g)(\lambda x + \mu y) &= \alpha f(\lambda x + \mu y) + \beta g(\lambda x + \mu y) \\
 &= \alpha(\lambda f(x) + \mu f(y)) + \beta(\lambda g(x) + \mu g(y)) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont linéaires} \\
 &= \alpha f(x) + \alpha f(y) + \beta g(x) + \beta g(y) \\
 &= \alpha f(x) + \beta g(x) + \alpha f(y) + \beta g(y) \\
 &= (\alpha f + \beta g)(x) + (\alpha f + \beta g)(y)
 \end{aligned}$$

L'application $\alpha f + \beta g$ est donc bien linéaire, et $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)$.
 $\mathcal{L}(E, F)$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$. □

Remarque 21.1.11

- En particulier, toute combinaison linéaire d'applications linéaires de E vers F est encore une application linéaire de E vers F .
- Cela s'applique aussi à $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Exemple 21.1.12

Justifier que $f : (x, y) \mapsto (3x, 3y)$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

Propriété 21.1.13

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On suppose que E et F sont de dimension finie, et on note $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.
 Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie égale à np .

Démonstration. Admis pour le moment, nous reviendrons sur ce résultat après un passage par la matrice. □

Composition

Propriété 21.1.14 – Composition

Soient E, F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration. Il est clair que $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$. Montrons qu'il s'agit bien d'une application linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(\lambda x + \mu y) &= g(f(\lambda x + \mu y)) \\
 &= g(\lambda f(x) + \mu f(y)) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\
 &= \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)) \text{ car } g \text{ est linéaire} \\
 &= \lambda (g \circ f)(x) + \mu (g \circ f)(y)
 \end{aligned}$$

donc $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$. □

Lien avec les isomorphismes

Propriété 21.1.15

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que f est un isomorphisme. Alors f^{-1} est un isomorphisme de F vers E .

Démonstration. Il est clair que f^{-1} va de F dans E : il reste à montrer que f^{-1} est linéaire. Soient $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. f étant bijective, il existe un (unique) couple $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$, de sorte que $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. On a alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) &= f^{-1}(\lambda f(x_1) + \mu f(x_2)) \\ &= f^{-1}(f(\lambda x_1 + \mu x_2)) \text{ par linéarité de } f \\ &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ &= \lambda f^{-1}(y_1) + \mu f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

donc f^{-1} est bien linéaire. □

Corollaire 21.1.16

Soient E, F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit f un isomorphisme de E vers F et g un isomorphisme de F vers G . Alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E vers G , dont la réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. On sait déjà que $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$, reste à montrer que $g \circ f$ est bijectif. Pour cela, on écrit que :

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G$$

et de même, $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{Id}_E$. $g \circ f$ est donc bien bijective, de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Exercice 21.1.17

1. Montrer que

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ (a, b) &\mapsto a + b + (a - b)X \end{aligned}$$

est un isomorphisme et donner la réciproque.

2. Montrer que

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ P &\mapsto 3P \end{aligned}$$

est un isomorphisme dont on donnera la réciproque.

3. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $(g \circ f)(a, b)$. Montrer que $g \circ f$ est un isomorphisme et en donner la réciproque.

Image directe, image réciproque

Propriété 21.1.18 – Image directe et image réciproque

Soient E et F deux \mathbb{K} espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Soit G un sous-espace vectoriel de E . Alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F .
- Soit H un sous-espace vectoriel de F . Alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque 21.1.19

On rappelle que $f(G)$ est un ensemble appelé *image directe de G par f* , et que $f(G) = \{f(x), x \in G\}$.
 De plus, $f^{-1}(H)$ est un ensemble appelé *image réciproque de H par f* , et que $f^{-1}(H) = \{x \in E, f(x) \in H\}$.
 Cet ensemble est défini même si f n'est pas bijective.

Démonstration. — Soit G un sous-espace vectoriel de E . Il est clair que $f(G)$ est une partie de F . De plus :

- $0_F = f(0_E)$ et $0_E \in G$ puisque G est un sous-espace vectoriel de E . Ainsi $0_F \in f(G)$.
- Soient $y_1, y_2 \in f(G)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Puisque $y_1, y_2 \in f(G)$, il existe $x_1, x_2 \in G$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
 On a alors, par linéarité de f :

$$\begin{aligned}\lambda y_1 + \mu y_2 &= \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \\ &= f(\lambda x_1 + \mu x_2)\end{aligned}$$

donc $\lambda y_1 + \mu y_2 \in f(G)$ puisque $\lambda x_1 + \mu x_2 \in G$ (G étant stable par combinaison linéaire).
 $f(G)$ est donc bien un sous-espace vectoriel de F .

- Soit H un sous-espace vectoriel de F .

- $f(0_E) = 0_F$ et $0_F \in H$ puisque H est un sous-espace vectoriel de F . Ainsi $0_E \in f^{-1}(H)$.
- Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(H)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Par linéarité de f :

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \in H \text{ car } H \text{ est stable par combinaison linéaire}$$

Ainsi $\lambda x_1 + \mu x_2 \in f^{-1}(H)$.
 $f^{-1}(H)$ est donc bien un sous-espace vectoriel de E . □

21.1.3 Noyau d'une application linéaire**Définition 21.1.20 – Noyau d'une application linéaire**

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *noyau de f* l'ensemble

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

C'est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de E d'après 21.1.18, et puisque $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F . □

Propriété 21.1.21 – Lien avec l'injectivité

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ est injective} \iff \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Démonstration. $\text{Ker}(f)$ étant un sous-espace vectoriel de E , on sait déjà que $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f)$.

- Supposons f injective. Soit $x \in \text{Ker}(f)$. On a alors

$$f(x) = 0_F = f(0_E)$$

donc $x = 0_E$ par injectivité de f . On a donc bien $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

- Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors, par linéarité de

$f :$

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0_E$$

donc $x_1 - x_2 \in \text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Ainsi, $x_1 - x_2 = 0_E$ et $x_1 = x_2 : f$ est injective. □

Exercice 21.1.22

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) &\mapsto (z_1 - z_2, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

Montrer que f est injective.

Exercice 21.1.23

1. Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}[X] &\rightarrow \mathbb{C}[X] \\ P &\mapsto P + P' \end{aligned}$$

est une application linéaire.

2. f est-elle injective ?

21.1.4 Image d'une application linéaire

Définition 21.1.24 – Image d'une application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *image de f* l'ensemble

$$\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E)$$

C'est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration. Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de F d'après 21.1.18. □

Propriété 21.1.25 – Caractérisation de la surjectivité

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$f \text{ est surjective} \iff \text{Im}(f) = F$$

Démonstration. Immédiat par définition de $\text{Im}(f)$. □

Propriété 21.1.26 – Famille génératrice de l'image en dimension finie

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie, et que $(e_j)_{j \in J}$ est une famille génératrice de E .

Alors $(f(e_j))_{j \in J}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

En particulier, $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, et $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(E)$.

Démonstration. Par définition :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(f) &= \{f(x), x \in E\} \\
 &= \left\{ f\left(\sum_{j \in J} \lambda_j e_j\right), (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J \right\} \text{ car } (e_j)_{j \in J} \text{ est génératrice de } E \\
 &= \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j f(e_j), (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J \right\} \text{ par linéarité de } f \\
 &= \operatorname{Vect}(f(e_j))_{j \in J}
 \end{aligned}$$

donc $(f(e_j))_{j \in J}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$, qui est de dimension finie.

Prenons maintenant une base $(e_j)_{j \in J}$ de E : en particulier, $\operatorname{Card}(J) = \dim(E)$.

$(f(e_j))_{j \in J}$ étant une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ formée de $\operatorname{Card}(J)$ éléments, toute base de $\operatorname{Im}(f)$ est formée de moins de $\operatorname{Card}(J) = \dim(E)$ éléments. On a donc bien $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leq \dim(E)$. \square

Exercice 21.1.27

On considère l'endomorphisme

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\
 P &\mapsto P + XP' + P''
 \end{aligned}$$

Déterminer $\operatorname{Im}(f)$.

21.1.5 Caractérisation des applications linéaires surjectives, injectives, bijectives

Propriété 21.1.28 – Caractérisation de l'injectivité

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour toute famille libre $(e_j)_{j \in J}$ de E , la famille $(f(e_j))_{j \in J}$ est libre.

Démonstration. (1) \implies (2) : Supposons f injective et soit $(e_j)_{j \in J}$ une famille libre de E . Montrons que la famille $(f(e_j))_{j \in J}$ est libre. Soit $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ et supposons que $\sum_{j \in J} \lambda_j f(e_j) = 0_F$. Par linéarité de f , on a alors :

$$f\left(\sum_{j \in J} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j \in J} \lambda_j f(e_j) = 0_F = f(0_E)$$

et puisque f est injective :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j e_j = 0_E$$

Or $(e_j)_{j \in J}$ est libre donc $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in J$. On a bien montré que la famille $(f(e_j))_{j \in J}$ est libre.

(2) \implies (1) : Supposons vraie l'assertion (2) et montrons que f est injective. Nous allons pour cela montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ est réduit à $\{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Si x est non nul, alors (x) est une famille libre de E , donc $(f(x))$ est une famille libre de F d'après l'assertion (2), ainsi $f(x) \neq 0_F$ ce qui contredit le fait que $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Ainsi $x = 0_E$ et $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$: f est injective. \square

Propriété 21.1.29

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie, et que $(e_j)_{j \in J}$ est une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est surjective si et seulement si $(f(e_j))_{j \in J}$ est une famille génératrice de F .
2. f est injective si et seulement si $(f(e_j))_{j \in J}$ est une famille libre de F .
3. f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_j))_{j \in J}$ est une base de F .

Démonstration. 1. Puisque $(e_j)_{j \in J}$ est génératrice de E , on sait que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_j))_{j \in J}$ donc :

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff \text{Im}(f) = F \\ &\iff \text{Vect}(f(e_j))_{j \in J} = F \\ &\iff (f(e_j))_{j \in J} \text{ est génératrice de } F \end{aligned}$$

2. Si f est injective, alors $(f(e_j))_{j \in J}$ est libre d'après 21.1.28. Réciproquement, supposons que $(f(e_j))_{j \in J}$ est libre et montrons que f est injective, c'est-à-dire que son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Puisque $(e_j)_{j \in J}$ est une famille génératrice de E , il existe $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ telle que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$. On a alors

$$0_F = f(x) = f\left(\sum_{j \in J} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j \in J} \lambda_j f(e_j)$$

Or $(f(e_j))_{j \in J}$ est libre donc $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in J$, ainsi $x = 0_E$ et $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$: f est injective.

3. Conséquence immédiate des deux points précédents. □

Exercice 21.1.30

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\mapsto P + XP' \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, calculer $f(X^k)$.
3. En déduire que f est un automorphisme.

21.1.6 Rang d'une application linéaire**Définition 21.1.31 – Rang d'une application linéaire**

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est de *rang fini* lorsque $\text{Im}(f)$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle *rang de f* le nombre suivant :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Exercice 21.1.32

On considère l'application linéaire

$$f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+3b \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de f .

Propriété 21.1.33

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$, avec égalité si et seulement si f est injective.
2. Si F est de dimension finie, alors f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$, avec égalité si et seulement si f est surjective.
3. Si E et F sont de dimension finie, alors f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

Démonstration. 1. L'inégalité a déjà été prouvée dans la propriété 21.1.26.

Notons $(e_j)_{j \in J}$ une base de E .

Supposons f injective : la famille $(f(e_j))_{j \in J}$ est alors libre et génératrice de $\text{Im}(f)$, qui a donc même dimension que E (le cardinal de J). On a donc bien $\text{rg}(f) = \dim(E)$.

Réciproquement, si $\dim(E) = \text{rg}(f)$ alors $\text{Card}(J) = \dim(\text{Im}(f))$. Ainsi $(f(e_j))_{j \in J}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ formée de $\dim(\text{Im}(f))$ éléments : c'en est alors une base, donc une famille libre. f transforme donc la base $(e_j)_{j \in J}$ de E en une famille libre : f est injective.

2. $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F : si ce dernier est de dimension finie, $\text{Im}(f)$ aussi d'après le chapitre précédent, avec $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(F)$. De plus :

$$f \text{ est surjective} \iff \text{Im}(f) = F$$

$$\iff \dim(\text{Im}(f)) = \dim(F)$$

puisque F est de dimension finie et $\text{Im}(f)$ en est un sous-espace vectoriel.

3. Conséquence directe des deux points précédents.

□

Propriété 21.1.34

Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Si g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$.
2. Si f est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$.
3. Si f et g sont de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

Démonstration. 1. Supposons que g est de rang fini. Remarquons que

$$\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$$

En effet, pour tout $y \in \text{Im}(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(f(x))$. Puisque $f(x) \in F$, y est bien un élément de $\text{Im}(g)$.

$\text{Im}(g \circ f)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\text{Im}(g)$. Si g est de rang fini, alors $\text{Im}(g)$ est de dimension finie, et

il en est donc de même pour $\text{Im}(g \circ f)$ avec $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$.

2. Supposons f de rang fini. Notons $(u_j)_{j \in J}$ une base de $\text{Im}(f)$, de sorte que $\text{rg}(f) = \text{Card}(J)$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{Im}(g \circ f) &= \{g(f(x)), x \in E\} \\ &= \left\{ g \left(\sum_{j \in J} \lambda_j u_j \right), (\lambda_j) \in \mathbb{K}^J \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j g(u_j), (\lambda_j) \in \mathbb{K}^J \right\} \\ &= \text{Vect}(g(u_j))_{j \in J} \end{aligned}$$

$\text{Im}(g \circ f)$ est donc engendré par $\text{Card}(J) = \text{rg}(f)$ vecteurs : $\text{Im}(g \circ f)$ est donc de dimension finie, inférieure ou égale à $\text{rg}(f)$. □

Exercice 21.1.35

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Montrer que $g \circ f$ n'est pas surjective.

Propriété 21.1.36 – Rang et isomorphismes

Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Si f est surjective et si g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.
2. Si f est de rang fini et si g est injective, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

Démonstration. 1. Supposons que f est un isomorphisme et que g est de rang fini. On a déjà vu que $g \circ f$ est de rang fini.

De plus, $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$. En effet, l'inclusion de gauche à droite a été vue dans la preuve précédente. Réciproquement, soit $z \in \text{Im}(g)$: il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$: on a alors $z = g(f(x)) \in \text{Im}(g \circ f)$.

On a donc bien $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$ et $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.

2. Supposons f de rang fini et g injective. On sait déjà que $g \circ f$ est de rang fini. f étant de rang fini, $\text{Im}(f)$ admet une base $(u_j)_{j \in J}$, où $\text{Card}(J) = \text{rg}(f)$. On a alors, comme dans la preuve précédente :

$$\text{Im}(g \circ f) = \text{Vect}(g(u_j))_{j \in J}$$

$(g(u_j))_{j \in J}$ est donc une famille génératrice de $\text{Im}(g \circ f)$. Puisque g est injective et $(u_j)_{j \in J}$ est libre, la famille $(g(u_j))_{j \in J}$ est libre. C'est donc une base de $\text{Im}(g \circ f)$, ainsi $\text{rg}(g \circ f) = \text{Card}(J) = \text{rg}(f)$. □

21.2 Endomorphismes remarquables

21.2.1 Puissances d'un endomorphisme

Propriété 21.2.1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. La composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E .

Démonstration. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$. D'après 21.1.14, $g \circ f$ est une application de E vers E , donc un endomorphisme de E . □

Définition 21.2.2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme f^n par récurrence en posant :

$$\begin{cases} f^0 = \text{Id}_E \\ \forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f \end{cases}$$

Remarque 21.2.3

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{f \text{ apparaît } n \text{ fois}}$

Démonstration. Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n est bien un endomorphisme de E . □

21.2.2 Groupe linéaire

Définition 21.2.4 – Groupe linéaire

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Le *groupe linéaire* $\text{GL}(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E , c'est-à-dire des endomorphismes bijectifs de E .

Propriété 21.2.5

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- $\text{Id}_E \in \text{GL}(E)$.
- Pour tout $f \in \text{GL}(E)$, on a $f^{-1} \in \text{GL}(E)$.
- Pour tout $f, g \in \text{GL}(E)$, on a $g \circ f \in \text{GL}(E)$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. 1. Id_E est un isomorphisme, de réciproque Id_E .

2. C'est un cas particulier de la propriété 21.1.15.

3. C'est un cas particulier de la propriété 21.1.16. □

Définition 21.2.6 – Puissances négatives d'un automorphisme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \text{GL}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u^{-n} = (u^{-1})^n$$

21.2.3 Homothéties

Définition 21.2.7 – Homothétie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle *homothétie de rapport λ* l'application

$$\begin{aligned} h_\lambda &: E \rightarrow E \\ x &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

On a donc $h_\lambda = \lambda \text{Id}_E$. C'est un endomorphisme de E .

Démonstration. $h_\lambda = \lambda \text{Id}_E$ est bien un endomorphisme puisque $\text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{L}(E)$ est stable par combinaison linéaire. \square

Propriété 21.2.8

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu} = h_\mu \circ h_\lambda$
- Si $\lambda \neq 0$, alors $h_\lambda \in \text{GL}(E)$ et $h_\lambda^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$.

Démonstration. 1. Pour tout $x \in E$:

$$h_\lambda(h_\mu(x)) = h_\lambda(\mu x) = \lambda \mu x = h_{\lambda\mu}(x)$$

et on fait le même calcul pour $h_\lambda \circ h_\mu$.

2. Supposons que $\lambda \neq 0$. On a alors $h_\lambda \circ h_{\frac{1}{\lambda}} = h_{\frac{1}{\lambda}} \circ h_\lambda = h_{\lambda \times \frac{1}{\lambda}} = h_1 = \text{Id}_E$. \square

21.2.4 Projections

Définition 21.2.9

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans E . Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(p(x), q(x)) \in F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$. L'application p est alors un endomorphisme de E , appelé *projection sur F parallèlement à G* .

Remarque 21.2.10

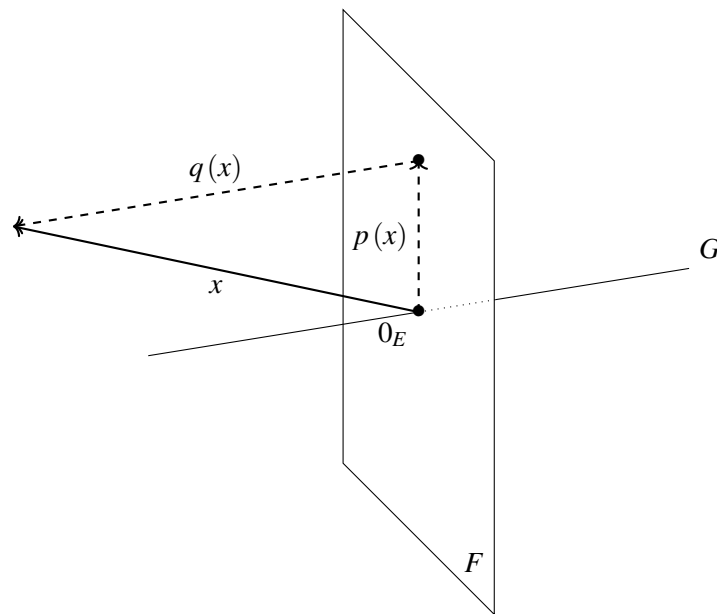
Avec les mêmes notations, q est la projection sur G parallèlement à F .

Démonstration. Puisque F est un sous-espace vectoriel de E , il est clair que p va de E vers E . Montrons que p est linéaire.

Soient $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \mu x_2 &= \lambda(p(x_1) + q(x_1)) + \mu(p(x_2) + q(x_2)) \\ &= \underbrace{\lambda p(x_1) + \mu p(x_2)}_{\in F} + \underbrace{\lambda q(x_1) + \mu q(x_2)}_{\in G} \end{aligned}$$

Il s'agit là de l'unique décomposition de $\lambda x_1 + \mu x_2$ dans $F \oplus G$. donc $p(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda p(x_1) + \mu p(x_2)$ et p est linéaire. \square

**Propriété 21.2.11**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .
Soit p la projection sur F parallèlement à G . Alors

$$\text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \text{Im}(p) = F \text{ et } \text{Ker}(p) = G$$

Démonstration. — Par définition, $\text{Im}(p) \subset F$.

— Pour tout $x \in F$, on peut écrire $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ donc $p(x) = x$. Autrement dit, $p(x) - x = 0_E$ ou encore

$$(p - \text{Id}_E)(x) = 0_E \text{ donc } x \in \text{Ker}(p - \text{Id}_E).$$

— Soit $x \in \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$, alors $p(x) - x = 0_E$ donc $x = p(x) \in \text{Im}(p)$

Finalement $\text{Im}(p) \subset F \subset \text{Ker}(p - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(p)$ d'où l'égalité.

Pour le noyau, soit $x \in E$.

— Par définition de p , il existe un unique élément $q(x)$ dans G tel que $x = p(x) + q(x)$. Si $p(x) = 0_E$, alors $x = q(x) \in G$.

— Réciproquement, supposons que $x \in G$. On peut alors écrire $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$: c'est l'unique décomposition de x

dans $F \oplus G$. On a donc bien $p(x) = 0_E$.

Par double inclusion, on a bien $\text{Ker}(p) = G$. □

Propriété 21.2.12 – Caractérisation des projections

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$.

p est une projection si et seulement si $p^2 = p$.

Dans ce cas, p est la projection sur $\text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Démonstration. — Supposons que p est la projection sur F parallèlement à G , où F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Soit $x \in E$, et notons $q(x)$ l'unique élément de G tel que $x = p(x) + q(x)$.

Puisque $G = \text{Ker}(p)$, et par linéarité de p , on a

$$p(x) = p(p(x) + q(x)) = p(p(x)) + \underbrace{p(q(x))}_{=0_E} = p^2(x)$$

et ceci pour tout $x \in E$.

On a donc bien $p^2 = p$.

— Supposons que $p^2 = p$. Posons $F = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(p)$.

Montrons déjà que F et G sont supplémentaires dans E . Soit $x \in E$: montrons que x se décompose de manière unique sous la forme $x = u + v$ avec $(u, v) \in F \times G$. On peut raisonner par analyse-synthèse.

— Supposons qu'il existe $(u, v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$. En appliquant p , on obtient

$$p(x) = p(u + v) = p(u) + p(v) = p(u)$$

puisque $v \in G = \text{Ker}(p)$. De plus, $u \in F = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ donc $(p - \text{Id}_E)(u) = 0_E$ ou encore $p(u) - \text{Id}_E(u) = p(u) - u = 0_E$ et $p(u) = u$.

On a donc $p(x) = u$ et $v = x - u = x - p(x)$.

— Posons $u = p(x)$ et $v = x - p(x)$. Il est clair que $u + v = x$. De plus :

$$(p - \text{Id}_E)(u) = p(u) - u = p(p(x)) - p(x) = p^2(x) - p(x) = p(x) - p(x) = 0_E$$

donc $u \in \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = F$. Enfin :

$$p(v) = p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_E$$

donc $v \in \text{Ker}(p) = G$.

Il existe donc bien un unique couple $(u, v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$, et on a $u = p(x)$. F et G sont donc bien supplémentaires dans E , et p est la projection sur F parallèlement à G . □

Exercice 21.2.13

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (4x - 2y, 6x - 3y) \end{aligned}$$

Montrer que f est une projection sur F parallèlement à G , où F et G sont à préciser.

21.2.5 Symétries

Définition 21.2.14

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans E . Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(p(x), q(x)) \in F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$.

L'application s , qui à tout $x \in E$ associe

$$s(x) = p(x) - q(x)$$

est un endomorphisme, appelé *symétrie par rapport à F et parallèlement à G* .

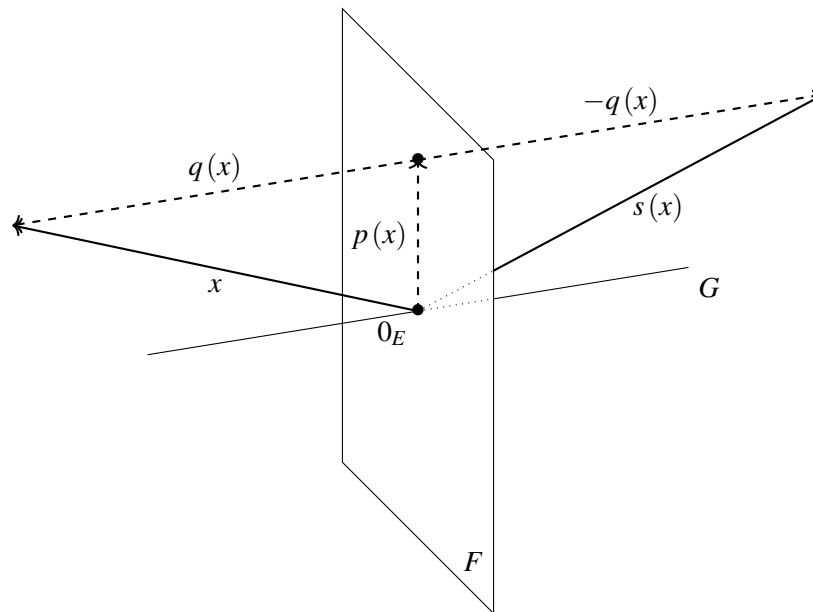
Remarque 21.2.15

Avec ces notations, on a pour tout $x \in E$: $q(x) = x - p(x)$ donc

$$s(x) = 2p(x) - x$$

où p est la projection sur F parallèlement à G .

Démonstration. $s = 2p - \text{Id}_E$ donc s est une combinaison linéaire d'endomorphismes de E : c'est un endomorphisme de E . □



Propriété 21.2.16

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

Alors s est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G si et seulement si $\frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ est la projection sur F parallèlement à G .

Démonstration. Par définition :

$$\begin{aligned} & s \text{ est la symétrie par rapport à } F \text{ parallèlement à } G \\ \iff & s = 2p - \text{Id}_E \text{ où } p \text{ est la projection sur } F \text{ parallèlement à } G \\ \iff & p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \text{ où } p \text{ est la projection sur } F \text{ parallèlement à } G \end{aligned}$$

□

Propriété 21.2.17

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Alors :

$$F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \text{ et } G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$$

Démonstration. On note p la projection sur F parallèlement à G , de sorte que $s = 2p - \text{Id}_E$ et $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
x \in F &\iff x \in \text{Ker}(p - \text{Id}_E) \\
&\iff p(x) - x = 0_E \\
&\iff \frac{1}{2}(s(x) + x) - x = 0_E \\
&\iff \frac{1}{2}(s(x) - x) = 0_E \\
&\iff s(x) - x = 0_E \\
&\iff x \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E)
\end{aligned}$$

donc $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$.

$$\begin{aligned}
x \in G &\iff x \in \text{Ker}(p) \\
&\iff p(x) = 0 \\
&\iff \frac{1}{2}(s(x) + x) = 0 \\
&\iff x \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E)
\end{aligned}$$

donc $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$. □

Propriété 21.2.18 – Caractérisation des symétries

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

Alors :

$$s \text{ est une symétrie} \iff s^2 = \text{Id}_E$$

Démonstration. Pour tout $x \in E$, on a par linéarité de $s + \text{Id}_E$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)\right)^2(x) &= \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \left(\frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \left(\frac{1}{2}(s(x) + x)\right) \\
&= \frac{1}{4}(s + \text{Id}_E)(s(x) + x) \\
&= \frac{1}{4}(s(s(x) + x) + \text{Id}_E(s(x) + x)) \\
&= \frac{1}{4}(s^2(x) + s(x) + s(x) + x) \\
&= \frac{1}{4}(s^2 + 2s + \text{Id}_E)(x)
\end{aligned}$$

$$\text{donc } \left(\frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)\right)^2 = \frac{1}{4}(s^2 + 2s + \text{Id}_E).$$

D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
 s \text{ est une symétrie} &\iff \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \text{ est une projection} \\
 &\iff \left(\frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)\right)^2 = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \\
 &\iff \frac{1}{4}(s^2 + 2s + \text{Id}_E) = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \\
 &\iff s^2 + 2s + \text{Id}_E = 2s + 2\text{Id}_E \\
 &\iff s^2 = \text{Id}_E
 \end{aligned}$$

□

Remarque 21.2.19

En particulier, une symétrie est un automorphisme, de réciproque elle-même.

Exercice 21.2.20

On considère l'application

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (x, y) &\mapsto (7x - 4y, 12x - 7y)
 \end{aligned}$$

Montrer que f est une symétrie par rapport à F parallèlement à G , où F et G sont à préciser.

21.3 Applications linéaires en dimension finie

21.3.1 Détermination d'une application linéaire

Théorème 21.3.1

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie, et on note $(e_j)_{j \in J}$ une base de E . Soit $(u_j)_{j \in J} \in F^J$. Alors il existe une unique application linéaire φ de E vers F telle que

$$\forall j \in J, \varphi(e_j) = u_j$$

Démonstration. On peut raisonner par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons que $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie : $\forall j \in J, \varphi(e_j) = u_j$. Soit $x \in E$, de coordonnées $(x_j)_{j \in J}$ dans la base $(e_j)_{j \in J}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{j \in J} x_j e_j\right) \\
 &= \sum_{j \in J} x_j \varphi(e_j) \\
 &= \sum_{j \in J} x_j u_j
 \end{aligned}$$

par linéarité de φ .

Les coordonnées d'un vecteur dans une base étant uniques, cela suffit à caractériser φ .

Synthèse : Considérons l'application φ qui à tout $x \in E$ associe

$$\varphi(x) = \sum_{j \in J} x_j u_j$$

où $(x_j)_{j \in J}$ sont les coordonnées de x dans la base $(e_j)_{j \in J}$.

F étant stable par combinaison linéaire, il est clair que φ va bien de E vers F .

Montrons que φ est linéaire : soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, de coordonnées respectives $(x_j)_{j \in J}$ et $(y_j)_{j \in J}$ dans la base $(e_j)_{j \in J}$. On a donc

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda \sum_{j \in J} x_j e_j + \mu \sum_{j \in J} y_j e_j \\ &= \sum_{j \in J} (\lambda x_j + \mu y_j) e_j \end{aligned}$$

donc $\lambda x + \mu y$ a pour coordonnées $(\lambda x_j + \mu y_j)_{j \in J}$ dans la base $(e_j)_{j \in J}$. On a donc

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + \mu y) &= \sum_{j \in J} (\lambda x_j + \mu y_j) u_j \\ &= \lambda \sum_{j \in J} x_j u_j + \mu \sum_{j \in J} y_j u_j \\ &= \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y) \end{aligned}$$

donc φ est bien linéaire.

Montrons pour finir que pour tout $k \in J$, on a bien $\varphi(e_k) = u_k$.

Soit $k \in J$. On a

$$e_k = \sum_{j \in J} \delta_{k,j} e_j$$

donc e_k a pour coordonnées $(\delta_{k,j})_{j \in J}$ dans la base $(e_j)_{j \in J}$, ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi(e_k) &= \sum_{j \in J} \delta_{k,j} u_j \\ &= u_k \end{aligned}$$

Finalement, nous avons bien montré que φ convient.

Par analyse-synthèse, nous avons bien montré l'existence d'un unique $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que : $\forall j \in J, \varphi(e_j) = u_j$. □

Exercice 21.3.2

Déterminer l'unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ tel que

$$f((1, 0, 0)) = X - 1, f((0, 1, 0)) = X^2 - 5, f((0, 0, 1)) = 1 + 2X$$

et montrer que f est un isomorphisme.

Propriété 21.3.3

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$.

Alors, il existe une unique application linéaire u de E vers F telle que $u(x) = u_1(x)$ pour tout $x \in E_1$ et $u(x) = u_2(x)$

pour tout $x \in E_2$.

De plus, pour tout $x \in E$ et en notant $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, on a

$$u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$$

Démonstration. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons qu'une telle application linéaire u existe. Soit $x \in E$. Puisque $E = E_1 \oplus E_2$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a alors, par linéarité de u :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1 + x_2) \\ &= u(x_1) + u(x_2) \\ &= u_1(x_1) + u_2(x_2) \end{aligned}$$

ce qui caractérise u .

Notons alors p_1 (respectivement p_2) la projection sur E_1 (respectivement E_2) parallèlement à E_2 (respectivement E_1). On a alors, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1(p_1(x)) + u_2(p_2(x)) \\ &= (u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2)(x) \end{aligned}$$

donc $u = u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2$.

Synthèse : $u_1 \circ p_1$ et $u_2 \circ p_2$ sont linéaires en tant que composées d'applications linéaires. Il est donc clair que $u = u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. De plus :

— Pour tout $x \in E_1$, on a $x = p_1(x)$ et $p_2(x) = 0_E$ donc

$$u(x) = u_1(p_1(x)) + u_2(p_2(x)) = u_1(x) + u_2(0_E) = u_1(x)$$

— De même, pour tout $x \in E_2$, on a $u(x) = u_2(x)$.

L'application u ainsi définie convient donc bien. □

21.3.2 Isomorphismes en dimension finie

Définition 21.3.4 – Espaces isomorphes

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On dit que E et F sont *isomorphes* s'il existe un isomorphe de E vers F .

Exercice 21.3.5

Montrer que \mathbb{C}^3 et $\mathbb{K}_2[X]$ sont isomorphes.

Théorème 21.3.6

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie.

Alors E et F sont isomorphes si et seulement si F est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration. E étant de dimension finie, il admet une base $(e_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ avec $n = \dim(E)$ (éventuellement nul, auquel cas cette famille est la famille vide).

— Supposons que E et F sont isomorphes : il existe donc un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La famille $(f(e_j))_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket}$

est alors une base de F , donc F est de dimension finie égale à n , c'est-à-dire de même dimension que E .

- Supposons que F est de dimension finie égale à n et posons $(u_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une base de F . D'après le théorème 21.3.1, il existe une (unique) application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(e_j) = u_j$$

En particulier, $(f(e_j))_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} = (u_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de F . D'après 21.1.29, f est un isomorphisme. □

Exercice 21.3.7

Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f'' - 2f' + 2f = 0\}$ est isomorphe à \mathbb{R}^2 .

Propriété 21.3.8

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels **de même dimension finie**.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$f \text{ est surjective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective}$$

Démonstration. Supposons que $\dim(E) = \dim(F)$. D'après 21.1.33 :

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\iff \operatorname{rg}(f) = \dim(E) \\ &\iff \operatorname{rg}(f) = \dim(F) \\ &\iff f \text{ est injective} \end{aligned}$$

□

Remarque 21.3.9

Bien sûr, ce résultat reste vrai dans le cas d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E (il s'agit bien d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie : E et lui-même).

Exercice 21.3.10

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer, avec un minimum de calculs, que l'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Propriété 21.3.11

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- S'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \operatorname{Id}_E$, alors f est un automorphisme et $f^{-1} = g$.
- S'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \operatorname{Id}_E$, alors f est un automorphisme et $f^{-1} = g$.

Démonstration. — On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \operatorname{Id}_E$. En particulier, pour tout $x \in E$:

$$f(g(x)) = x$$

donc $x \in \operatorname{Im}(f)$ puisque $g(x) \in E$. On a donc $E = \operatorname{Im}(f)$: f est surjective. Puisque E est de dimension finie, f

est bijective et est donc un automorphisme de E .

f admet donc une réciproque, notée f^{-1} . Puisque $f \circ g = \text{Id}_E$, on obtient en composant par f^{-1} :

$$f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \text{Id}_E$$

ou encore

$$(f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1}$$

c'est-à-dire $g = f^{-1}$.

- On suppose maintenant qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \text{Id}_E$. f est alors injective : en effet, si $x, y \in E$ sont tels que $f(x) = f(y)$, alors on a

$$x = \text{Id}_E(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = \text{Id}_E(y) = y$$

E étant de dimension finie, f est bien un automorphisme. En composant, dans l'égalité $g \circ f = \text{Id}_E$, par f^{-1} (cette fois, par la droite), on obtient bien $g = f^{-1}$. □

21.3.3 Théorème du rang

Théorème 21.3.12 – Théorème du rang - forme géométrique

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On suppose que $\text{Ker}(u)$ admet un supplémentaire, noté S , dans E .

Alors $u|_S$ est un isomorphisme entre S et $\text{Im}(u)$.

Démonstration. Pour tout $x \in S$, on a $x \in E$ donc $u(x) \in \text{Im}(u)$. L'application $u|_S$ est donc bien une application de S vers $\text{Im}(u)$.

Pour tout $x, y \in S$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a en particulier $x, y \in E$ donc :

$$\begin{aligned} u|_S(\lambda x + \mu y) &= u(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \\ &= \lambda u|_S(x) + \mu u|_S(y) \end{aligned}$$

puisque u est linéaire et puisque $x, y \in S$. On a donc bien $u|_S \in \mathcal{L}(S, \text{Im}(u))$.

Il reste à montrer que $u|_S$ est une bijection de S sur $\text{Im}(u)$.

- Montrons que $u|_S$ est injective. Pour cela, on montre que son noyau est réduit à $\{0_E\}$. Or :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(u|_S) &= \{x \in S, u|_S(x) = 0_E\} \\ &= \{x \in S, u(x) = 0_E\} \\ &= S \cap \{x \in E, u(x) = 0_E\} \\ &= S \cap \text{Ker}(u) \\ &= \{0_E\} \end{aligned}$$

puisque S et $\text{Ker}(u)$ sont en somme directe.

$u|_S$ est donc bien injective.

- Montrons que $u|_S$ est surjective, en tant qu'application de S vers $\text{Im}(u)$. Soit $y \in \text{Im}(u)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Or $E = S \oplus \text{Ker}(u)$ donc il existe $(x_1, x_2) \in S \times \text{Ker}(u)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

On a alors

$$y = u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + \underbrace{u(x_2)}_{=0_E} = u(x_1)$$

avec $x_1 \in S$. y admet donc bien un antécédent dans S par $u|_S$, et $u|_S$ est surjective.

Finalement, $u|_S$ est bien un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$. □

Théorème 21.3.13 – Théorème du rang

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u)$$

Démonstration. $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E , qui est de dimension finie. $\text{Ker}(u)$ admet donc un supplémentaire S dans E , et on a $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(S)$.

Or S est de dimension finie et est, d'après la version géométrique du théorème du rang, isomorphe à $\text{Im}(u)$: on a donc $\dim(S) = \dim(\text{Im}(u)) = \text{rg}(u)$.

Finalement :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(S) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u)$$

□

Exercice 21.3.14

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y + 2z, 9x + 6y - 2z, 2x + y, 27x + 15y - 2z) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 formé des solutions du système

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 9x + 6y - 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 27x + 15y - 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 21.3.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(1) - P(2) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. f est-elle injective ?
On considère l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = P(2)\}$.
3. Montrer que F est un \mathbb{R} -espace vectoriel dont on précisera la dimension.
4. Déterminer une base de F .

21.4 Équations linéaires

Définition 21.4.1 – Équation linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme $u(x) = b$, d'inconnue $x \in E$, où $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.

Propriété 21.4.2 – Ensemble des solutions d'une équation linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. On note S l'ensemble des solutions de l'équation

$$u(x) = b \quad (*)$$

d'inconnue $x \in E$. On a donc $S = \{x \in E, u(x) = b\}$.

- Si l'équation $(*)$ n'admet aucune solution alors S est vide.
- Sinon, $(*)$ admet au moins une solution, que l'on note x_0 . Dans ce cas :

$$S = \{x_0 + x, x \in \text{Ker}(u)\}$$

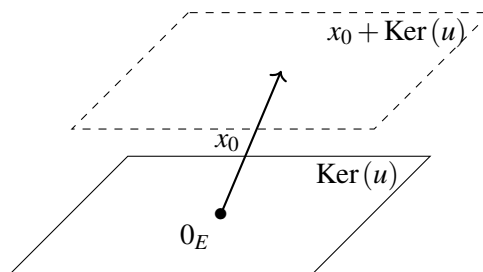
Remarque 21.4.3

On note souvent, dans le cas où $(*)$ admet au moins une solution x_0 , $S = x_0 + \text{Ker}(u)$.

Démonstration. Le cas où $(*)$ n'admet aucune solution étant trivial, supposons que cette équation admet au moins une solution, notée x_0 . Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} u(x) = b &\iff u(x) = u(x_0) \\ &\iff u(x) - u(x_0) = 0_F \\ &\iff u(x - x_0) = 0_F \\ &\iff x - x_0 \in \text{Ker}(u) \\ &\iff x \in \{x_0 + z, z \in \text{Ker}(u)\} \end{aligned}$$

□



Nous avons déjà rencontré de nombreuses équations linéaires !

Exemple 21.4.4 – Systèmes linéaires

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Considérons un système linéaire sous la forme $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. L'ensemble de ses solutions est alors

$$S = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = B\} = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), u(X) = B\}$$

où

$$\begin{aligned} u &: \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

est bien une application linéaire.

Exemple 21.4.5 – Suites arithmético-géométriques

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On considère l'ensemble F des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F &= \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = b\} \\ &= \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = b\} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est bien une application linéaire (à montrer).

F est donc l'ensemble des solutions d'une équation linéaire !

Cherchons le noyau de φ . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (0)_{n \in \mathbb{N}} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = 0 \\ &\iff (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } a \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0 \end{aligned}$$

Supposons alors que $a \neq 1$: l'équation $l = al + b$, d'inconnue $l \in \mathbb{K}$, admet alors pour solution $l = \frac{b}{1-a}$, et la suite $(l)_{n \in \mathbb{N}}$ constante égale à l est alors un élément de F .

On en déduit que, dans ce cas :

$$\begin{aligned} F &= \{(l)_{n \in \mathbb{N}} + (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ker}(\varphi)\} \\ &= \{(l)_{n \in \mathbb{N}} + (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } a\} \\ &= \{(l)_{n \in \mathbb{N}} + (\lambda a^n)_{n \in \mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(l + \lambda a^n)_{n \in \mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Exercice 21.4.6

Dans l'exemple précédent, que devient F si $a = 1$?

Exemple 21.4.7 – Équations différentielles

On considère un intervalle I de \mathbb{R} contenant au moins deux points.

Soient a et b deux fonctions définies et dérivables sur I , à valeurs dans \mathbb{K} . On considère alors l'équation différentielle

$$y' + ay = b \quad (*)$$

d'inconnue $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de cette équation est alors

$$F = \{y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}), \varphi(y) = b\}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ y &\mapsto y' + ay \end{aligned}$$

est bien linéaire.

Le noyau de φ est alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (\star) !

En notant y_0 une solution particulière de (\star) (que l'on peut obtenir par exemple avec la méthode de variation de la constante), on obtient

$$\begin{aligned} F &= \{y_0 + y, y \in \text{Ker}(\varphi)\} \\ &= \{y_0 + y, y \text{ est solution de l'équation homogène associée à } (\star)\} \end{aligned}$$

Remarque 21.4.8

- Garder en tête, dans l'exemple précédent, que a et b sont des fonctions et pas des constantes.
- Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants, de la forme

$$\forall x \in I, y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = \gamma(x)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\gamma \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, et en supposant l'existence d'une solution particulière y_0 , l'ensemble des solutions est

$$\{y_0 + y, y \in \text{Ker}(\varphi)\}$$

avec $\varphi : y \mapsto y'' + \alpha y' + \beta y$. Le noyau de φ est de nouveau l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

21.5 Formes linéaires et hyperplans

Définition 21.5.1 – Forme linéaire

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle *forme linéaire sur E* toute application $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Définition 21.5.2 – Hyperplan

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *hyperplan de E* tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Exemple 21.5.3

- Dans \mathbb{R}^3 , un hyperplan est un plan vectoriel.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.

Propriété 21.5.4

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Alors F est un hyperplan de E si et seulement s'il existe une forme linéaire **non nulle** sur E , notée φ , telle que $F = \text{Ker}(\varphi)$.

Démonstration. — Supposons qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle telle que $F = \text{Ker}(\varphi)$. On a $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$ donc $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 0$ ou 1 . Or φ n'est pas nulle : il existe donc $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$, ainsi $\text{Im}(\varphi)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et on a donc $\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi)) = 1$.
D'après le théorème du rang (E étant de dimension finie), on a

$$\dim(F) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \text{rg}(\varphi) = n - 1$$

— Supposons que $\dim(F) = n - 1$, et prenons un supplémentaire S de F dans E . S est donc de dimension 1 et admet une base de la forme (e_n) .

Notons alors

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: F \rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

et φ_2 la forme linéaire sur S telle que $\varphi_2(e_n) = 1$ (φ_2 existe d'après 21.3.1). Remarquons que φ_2 est un isomorphisme puisque $\text{rg}(\varphi_1) = 1 = \dim(\text{Vect}(e_n)) = \dim(\mathbb{K})$.

D'après 21.3.3, l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ qui à tout $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in F \times S$, associe $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ est alors linéaire. Étant à valeurs dans \mathbb{K} , c'est bien une forme linéaire, et :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(x) = 0 \\ &\iff \underbrace{\varphi_1(x_1)}_{=0} + \varphi_2(x_2) = 0 \\ &\iff \varphi_2(x_2) = 0 \\ &\iff x_2 = 0 \\ &\iff x = x_1 \in F \end{aligned}$$

On a donc bien trouvé une forme linéaire non nulle (puisque $\varphi(e_n) = 1 \neq 0$) sur E dont F est le noyau. □

Propriété 21.5.5 – Hyperplans et droites vectorielles

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E .

Soit D une droite vectorielle de E non incluse dans H . Alors D et H sont supplémentaires dans E .

Démonstration. On a déjà $\dim(D) + \dim(H) = 1 + n - 1 = n = \dim(E)$. Il suffit alors de montrer que $D \cap H = \{0_E\}$ pour conclure. Supposons que ce ne soit pas le cas, et qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $x \in D \cap H$.

En particulier, $x \in D$ donc $\text{Vect}(x) \subset D$ puis $D = \text{Vect}(x)$ car D et $\text{Vect}(x)$ sont de même dimension (égale à 1). Cependant, puisque $D \cap H$ est un sous-espace vectoriel de E , on aurait alors :

$$D = \text{Vect}(x) \subset D \cap H \subset H$$

donc D est inclus dans H , ce qui contredit l'hypothèse initiale. On a donc bien $D \cap H = \{0_E\}$, et finalement $E = D \oplus H$. □

Exercice 21.5.6

Montrer que

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3z = 0\}$$

est un hyperplan de \mathbb{R}^3 dont on donnera une base.

Exercice 21.5.7

Montrer que

$$F = \{P \in \mathbb{K}_n[X], P(1) = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$, dont on donnera une base.

21.6 Exercices**Exercice 21.6.1**

Parmi les applications suivantes, reconnaître celles qui sont linéaires.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 2$
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$
3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.
4. $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3x$
5. $j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x - y, 3x + 12y)$
6. $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$
7. $l : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - b \\ b + 2c \\ 3c - d \end{pmatrix}$
8. $m : \mathcal{M}_{35}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{35}(\mathbb{R}) : M \mapsto \sqrt{2}M - 56M^T$.
9. $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$
10. $\psi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 21.6.2

Pour chaque application linéaire de l'exercice 21.6.1, déterminer le noyau, l'image, le rang (s'il y a lieu) et étudier l'injectivité et la surjectivité.

Exercice 21.6.3

Soit A un polynôme réel non constant. On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto A'P + AP' \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$.

Exercice 21.6.4

Comme l'exercice précédent, mais où A est un polynôme non nul et $\varphi(P) = AP' - A'P$.

Exercice 21.6.5

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x - y, z + y)$

2. $g : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] : P \mapsto P'$
3. $h : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] : P \mapsto P'$
4. $i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x + z - y, z + 2y)$

Correction. 1. Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\
 &= ((\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), (\lambda z + \mu z') + (\lambda y + \mu y')) \\
 &= (\lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y', \lambda z + \mu z' + \lambda y + \mu y') \\
 &= (\lambda(x - y) + \mu(x' - y'), \lambda(z + y) + \mu(z' + y')) \\
 &= \lambda(x - y, z + y) + \mu(x' - y', z' + y') \\
 &= \lambda f(x, y, z) + \mu f(x', y', z')
 \end{aligned}$$

donc f est bien une application linéaire.

Déterminer le noyau de f . Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \text{Ker}(f) &\iff (x - y, z + y) = (0, 0) \\
 &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y, z = -y\} \\
 &= \{(y, y, -y), y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{y \cdot (1, 1, -1), y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((1, 1, -1))
 \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker}(f) \neq \{(0, 0, 0)\}$ donc f n'est pas injective.

De plus $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1. D'après le théorème du range, qui s'applique ici puisque \mathbb{R}^3 est de dimension finie, on obtient

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$$

donc

$$3 = 1 + \text{rg}(f)$$

ainsi $\text{rg}(f) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc f est surjective.

2. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, P' est encore dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc g est bien définie.

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout réels λ, μ :

$$\begin{aligned}
 g(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)' \\
 &= \lambda P' + \mu Q' \\
 &= \lambda g(P) + \mu g(Q)
 \end{aligned}$$

donc $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

Déterminons le noyau de g . Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} g(P) = 0 &\iff P' = 0 \\ &\iff P \text{ est constant} \\ &\iff P \in \mathbb{R}_0[X] \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(g) = \mathbb{R}_0[X]$ (l'ensemble des polynômes constants à coefficients réels).

Ainsi $\text{Ker}(g) \neq \{0\}$ donc g n'est pas injective. De plus, $\dim(\text{Ker}(g)) = 1$ donc d'après le théorème du rang (qui s'applique car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie) :

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\text{Ker}(g)) + \text{rg}(g)$$

donc

$$n + 1 = 1 + \text{rg}(g)$$

et $\text{rg}(g) = n \neq \dim(\mathbb{R}_n[X])$: g n'est pas surjective.

Commentaire

On peut aussi dire que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie, ainsi g est injective si et seulement si g est surjective. Puisque g n'est pas injective, elle n'est donc pas surjective.

Commentaire

Au lieu de chercher le noyau, on peut s'intéresser à l'image de g . Supposons que $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(g) &= \text{Vect}(g(1), g(X), g(X^2), \dots, g(X^n)) \\ &= \text{Vect}(0, 1, 2X, \dots, nX^{n-1}) \\ &= \text{Vect}(1, X, \dots, nX^{n-1}) \\ &= \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{aligned}$$

donc $\text{rg}(g) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n \neq \dim(\mathbb{R}_n[X])$ et g n'est pas surjective. Le théorème du rang, ou le fait que g soit un endomorphisme en dimension finie, montre alors que g n'est pas non plus injective.

Si $n = 0$, alors $\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(1)) = \text{Vect}(0) = \{0\}$ donc g n'est pas surjective, ni injective.

3. Supposons $n \geq 1$ (sinon $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ n'est pas défini). Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc h est bien définie.

La linéarité de h se montre comme dans la question précédente.

Le noyau de h est encore $\text{Ker}(h) = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}$ donc h n'est pas injective.

De plus $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, donc d'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(h) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\text{Ker}(h)) = n + 1 - 1 = n$$

donc $\text{rg}(h) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ et h est surjective.

4. Montrer que i est une application linéaire est laissé en exercice.

Déterminons le noyau de i .

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} i(x, y, z) = (0, 0, 0) &\iff (x - y + z, x + z - y, z + 2y) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y - z = \frac{-1}{2}z - z = \frac{-3}{2}z \\ y = \frac{-1}{2}z \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \text{Ker}(i) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = \frac{-3}{2}z, y = \frac{-1}{2}z \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{-3}{2}z, \frac{-1}{2}z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \cdot \left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right), z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right) \right) \\ &= \text{Vect}((-3, -1, 2)) \text{ en multipliant par 2} \end{aligned}$$

En particulier, $\text{Ker}(i) \neq \{(0, 0, 0)\}$ donc i n'est pas injective.

Puisque i est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 et que \mathbb{R}^3 est de dimension finie, i n'est pas non plus surjective (ce qui conclut l'exercice).

Commentaire

D'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(i) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(i)) = 3 - 1 = 2$$

Exercice 21.6.6

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - 2y + 3z, 3x + 3y - 2z, -x - 16y + 19z) \end{aligned}$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme.
2. Déterminer le rang de f .
3. Sans le résoudre, déterminer la dimension de l'ensemble S des solutions du système

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \\ -x - 16y + 19z = 0 \end{cases} \quad (*)$$

en tant que sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exercice 21.6.7

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x - y, -x + y) \end{aligned}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f^2(x, y)$, $f^3(x, y)$ et, de manière générale, $f^n(x, y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21.6.8

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\}$. On se propose de déterminer la dimension et une base de F .

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} : P \mapsto P(a)$. Quel lien existe-t-il entre φ et F ?
2. Déterminer le rang de φ .
3. En déduire la dimension de F .
4. Montrer que la famille $((X - a), X(X - a), X^2(X - a), \dots, X^{n-1}(X - a))$ est une base de F .

Exercice 21.6.9

On considère un espace vectoriel E de dimension 3 et un endomorphisme φ de E .

On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de E tels que $\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$, $\varphi(u_2) = \lambda_2 u_2$ et $\varphi(u_3) = \lambda_3 u_3$ où λ_1 , λ_2 et λ_3 sont des réels non nuls.

1. Montrer que φ est bijective.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A quelle(s) condition(s) sur λ l'application $\varphi - \lambda \text{Id}$ est-elle un automorphisme ?

Exercice 21.6.10

On considère un endomorphisme g d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$.

On suppose que $g^n = 0$ et que $g^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $v \in E$ tel que $g^{n-1}(v) \neq 0_E$ et que la famille $\mathcal{B} = (v, g(v), \dots, g^{n-1}(v))$ est une base de E .
2. Déterminer le rang de φ .

Exercice 21.6.11

Soit E un espace vectoriel réel et soit f un endomorphisme de E . On pose $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.
2. Que dire de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Im}(f^2)$?
3. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ si et seulement si $\text{Im}(f) \cap \text{Ker} f = \{0_E\}$.

Exercice 21.6.12

Soit l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (4x - 6y, 2x - 3y) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. (a) Déterminer $\text{Ker}(f)$.
(b) Donner une base de $\text{Im}(f)$ et en déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
3. Déterminer $f \circ f$

Exercice 21.6.13

n est un entier naturel non nul. Pour $a \in \mathbb{R}^*$, on définit l'application f_a par

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P(ax + 1 - a) \end{aligned}$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme.
2. Pour $b \in \mathbb{R}^*$, calculer $f_a \circ f_b$.
3. Montrer que f_a est un isomorphisme.

Exercice 21.6.14

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + 2y + z \\ -x - y + 4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Montrer qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $E_{\lambda_1} = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})$ et $E_{\lambda_2} = \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})$ ne sont pas réduits à $\{0\}$, où Id désigne l'application identité sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Soit $u \in E_{\lambda_1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $f^n(u)$?
3. Montrer que

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$$

et déterminer une base \mathcal{B} adaptée à cette décomposition.

4. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer les coordonnées de X dans la base \mathcal{B} .
- (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de $f^n(X)$.

Exercice 21.6.15

Soit $U = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de U .

On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (u_0, u_1) \end{aligned}$$

2. Montrer que φ est un isomorphisme. Que peut-on en déduire ?
3. Soit les suites a et b définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1$ et $b_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$. Montrer que (a, b) est une base de E .

21.7 DM conducteur

Exercice 65

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - y + z, 2x + y + 2z, x + z, y + 3z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire. PTS 1
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$. PTS 1
3. Déterminer le rang de f . PTS 1
4. f est-elle un isomorphisme ? PTS 0.5

Correction. 1. Pour plus de commodité, les vecteurs lignes seront notés en colonne. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $Y =$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda X + \mu Y) &= f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \\
 &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}\right) \\
 &= \begin{pmatrix} (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') \\ 2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z') \\ (\lambda x + \mu x') + (\lambda z + \mu z') \\ (\lambda y + \mu y') + 3(\lambda z + \mu z') \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda(x - y + z) + \mu(x' - y' + z') \\ \lambda(2x + y + 2z) + \mu(2x' + y' + 2z') \\ \lambda(x + z) + \mu(x' + z') \\ \lambda(y + 3z) + \mu(y' + 3z') \end{pmatrix} \\
 &= \lambda \begin{pmatrix} x - y + z \\ 2x + y + 2z \\ x + z \\ y + 3z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' - y' + z' \\ 2x' + y' + 2z' \\ x' + z' \\ y' + 3z' \end{pmatrix} \\
 &= \lambda f(X) + \mu f(Y)
 \end{aligned}$$

donc f est bien linéaire.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(f) &\iff f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x - y + z \\ 2x + y + 2z \\ x + z \\ y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y = 0 \\ y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et f est injective.

3. Puisque $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$, et comme \mathbb{R}^3 est de dimension finie, on a d'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 0 = 3$$

4. \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 sont de dimension finie mais pas de même dimension. f ne peut donc pas être un isomorphisme.

Exercice 66

On définit

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

est une symétrie par rapport à F et parallèlement à G , F et G étant deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à préciser.

Correction. Montrons déjà que φ est linéaire. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= A(\lambda X + \mu Y) \\ &= \lambda AX + \mu AY \\ &= \lambda f(X) + \mu f(Y) \end{aligned}$$

donc f est bien linéaire.

De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f^2(X) &= f(f(X)) \\ &= f(AX) \\ &= A^2X \end{aligned}$$

Or

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

donc $f^2(X) = X$. On a donc $f^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. f est donc bien une symétrie, et c'est la symétrie par rapport à $F =$

$\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})})$ et parallèlement à $G = \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})})$. De plus, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}) &\iff (f - \text{Id}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})})(X) = 0 \\ &\iff f(X) - X = 0 \\ &\iff AX - X = 0 \\ &\iff (A - I_3)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -2x & & & = 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z & = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z & = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & & & = 0 \\ & -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z & = 0 \\ & \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi

$$F = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

De même :

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}) &\iff (A + I_3)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} & & 0 & = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z & = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z & = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z & = 0 \end{cases} \\ &\iff -x + y + 3z = 0 \\ &\iff x = y + 3z \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} G &= \text{Ker} \left(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} y+3z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Au final, f est la symétrie par rapport à $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ parallèlement à $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 67

Dans cet exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

On considère l'ensemble

$$F = \{P \in \mathbb{K}_n[X], P(1) = P(2) = \dots = P(s)\}$$

et l'application

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathcal{M}_{s-1,1}(\mathbb{K}) \\ P &\mapsto \begin{pmatrix} P(2) - P(1) \\ P(3) - P(1) \\ \vdots \\ P(s) - P(1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Vérifier que φ est une application linéaire.
2. Montrer que F est le noyau de φ .
3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On suppose que $P \in F$ et on considère le polynôme $U = P - P(1)$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que

$$U = (X-1)(X-2)\dots(X-s)Q$$

Quel est le degré maximal de Q ?

Dans la suite, on notera $T = (X-1)(X-2)\dots(X-s)$.

4. Montrer que

$$F = \{\lambda + TQ, Q \in \mathbb{K}_{n-s}[X], \lambda \in \mathbb{R}\}$$

5. Montrer que $\mathcal{B} = (1, T, TX, TX^2, \dots, TX^{n-s})$ est une base de F .
6. Quel est le rang de φ ? Que peut-on en déduire à propos de φ ?

Correction. 1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda P + \mu Q) &= \begin{pmatrix} (\lambda P + \mu Q)(2) - (\lambda P + \mu Q)(1) \\ (\lambda P + \mu Q)(3) - (\lambda P + \mu Q)(1) \\ \vdots \\ (\lambda P + \mu Q)(s) - (\lambda P + \mu Q)(1) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda P(2) + \mu Q(2) - \lambda P(1) - \mu Q(1) \\ \lambda P(3) + \mu Q(3) - \lambda P(1) - \mu Q(1) \\ \vdots \\ \lambda P(s) + \mu Q(s) - \lambda P(1) - \mu Q(1) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda(P(2) - P(1)) + \mu(Q(2) - Q(1)) \\ \lambda(P(3) - P(1)) + \mu(Q(3) - Q(1)) \\ \vdots \\ \lambda(P(s) - P(1)) + \mu(Q(s) - Q(1)) \end{pmatrix} \\
 &= \lambda \begin{pmatrix} P(2) - P(1) \\ P(3) - P(1) \\ \vdots \\ P(s) - P(1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} Q(2) - Q(1) \\ Q(3) - Q(1) \\ \vdots \\ Q(s) - Q(1) \end{pmatrix} \\
 &= \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)
 \end{aligned}$$

donc φ est bien linéaire.

2. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Alors :

$$\begin{aligned}
 P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \begin{pmatrix} P(2) - P(1) \\ P(3) - P(1) \\ \vdots \\ P(s) - P(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} P(2) = P(1) \\ P(3) = P(1) \\ \vdots \\ P(s) = P(1) \end{cases} \\
 &\iff P(1) = P(2) = \dots = P(s) \\
 &\iff P \in F
 \end{aligned}$$

donc $F = \text{Ker}(\varphi)$.

3. Puisque $P \in F$, on a $P(1) = P(2) = \dots = P(s)$ donc $U(1) = U(2) = \dots = U(s) = 0$. $1, 2, \dots, s$ sont donc des racines distinctes de U donc $(X-1)(X-2)\dots(X-s)$ divise U et il existe un polynôme Q tel que $U = (X-1)(X-2)\dots(X-s)Q$.

Comme $U \in \mathbb{K}_n[X]$, et puisque $(X-1)(X-2)\dots(X-s)$ est de degré s , on a $Q \in \mathbb{K}_{n-s}[X]$.

4. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

— Si $P \in F$, d'après ce qui précède, il existe $Q \in \mathbb{K}_{n-s}[X]$ tel que $P - P(1) = TQ$ donc

$$P = P(1) + TQ = \lambda + TQ$$

en notant $\lambda = P(1)$.

— Réciproquement, si $P = \lambda + TQ$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, alors pour tout $k \in \llbracket 1; s \rrbracket$ on a

$$P(k) = \lambda + \underbrace{T(k)}_{=0} Q(k) = \lambda$$

donc $P(1) = P(2) = \dots = P(s)$ et $P \in F$.

On a donc bien $F = \{\lambda + TQ, Q \in \mathbb{K}_n[X], \lambda \in \mathbb{R}\}$.

5. \mathcal{B} est échelonnée en degré et est donc libre. De plus :

$$\begin{aligned} F &= \{\lambda + TQ, Q \in \mathbb{K}_n[X], \lambda \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \lambda + T \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k, \lambda, a_0, a_1, \dots, a_{n-s} \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \left\{ \lambda \cdot 1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k TX^k, \lambda, a_0, a_1, \dots, a_{n-s} \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \text{Vect}(1, T, TX, \dots, TX^{n-s}) \\ &= \text{Vect}(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

Finalement, \mathcal{B} est une famille libre et génératrice de F : c'est une base de F .

6. La base \mathcal{B} de F étant formée de $n - s + 2$ vecteurs, on a

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(F) = n - s + 2$$

donc, d'après le théorème du rang (qui s'applique bien puisque $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie), on a

$$\text{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{K}_n[X]) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n + 1 - (n - s + 2) = s - 1 = \dim(\mathcal{M}_{s-1,1}(\mathbb{K}))$$

On en déduit que φ est surjective (mais pas injective).

Exercice 68 – Des endomorphismes de sous-espaces vectoriels

Dans \mathbb{R}^3 , on considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2y + z, -6x + 7y + 2z, 6x - 4y + z) \end{aligned}$$

et le vecteur $u_1 = (1, 2, -2)$.

On définit aussi les ensembles $F = \text{Vect}(u_1)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -3x + 2y + z = 0\}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , et en donner une base (u_2, u_3) .
3. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
4. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1 , u_2 et u_3 .
5. Montrer que pour tout v dans F , $f(v)$ est encore dans F .
6. Montrer que pour tout v dans G , $f(v)$ est encore dans G .

On définit alors les endomorphismes φ et ψ , respectivement de F et G , de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : F &\rightarrow F & \text{et} & \quad \psi : G \rightarrow G \\ v &\mapsto f(v) & & \quad v \mapsto f(v) \end{aligned}$$

Autrement dit, $\varphi = f|_F$ et $\psi = f|_G$.

7. Soit $v \in F$.
- (a) Justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que $v = au_1$.
 - (b) Exprimer en fonction de v les vecteurs $f(v)$, $f^2(v)$ et de manière générale, $f^n(v)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Soit $v \in G$.
- (a) Justifier l'existence de $b, c \in \mathbb{R}$ tel que $v = bu_2 + cu_3$.
 - (b) Exprimer en fonction de v les vecteurs $f(v)$, $f^2(v)$ et de manière générale, $f^n(v)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base \mathcal{B} sont $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $f^n(v)$.

Correction. 1. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 & f(\lambda \cdot (x, y, z) + \mu (x', y', z')) \\
 &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\
 &= (2(\lambda y + \mu y') + \lambda z + \mu z', -6(\lambda x + \mu x') + 7(\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z'), 6(\lambda x + \mu x') - 4(\lambda y + \mu y') + \lambda z + \mu z') \\
 &= (\lambda(2y + z) + \mu(2y' + z'), \lambda(-6x + 7y + 2z) + \mu(-6x' + 7y' + 2z'), \lambda(6x - 4y + z) + \mu(6x' - 4y' + z')) \\
 &= \lambda(2y + z, -6x + 7y + 2z, 6x - 4y + z) + \mu(2y' + z', -6x' + 7y' + 2z', 6x' - 4y' + z') \\
 &= \lambda f((x, y, z)) + \mu f((x', y', z'))
 \end{aligned}$$

donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$-3x + 2y + z = 0 \iff z = 3x - 2y$$

donc

$$\begin{aligned}
 G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 3x - 2y\} \\
 &= \{(x, y, 3x - 2y), x, y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{x \cdot (1, 0, 3) + y \cdot (0, 1, -2), x, y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((1, 0, 3), (0, 1, -2))
 \end{aligned}$$

et la famille $(u_2, u_3) = ((1, 0, 3), (0, 1, -2))$ est une base de G puisque ses deux vecteurs ne sont pas proportionnels.

3. On a

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(u_1, u_2, u_3) &= \text{rg}((1, 2, -2), (1, 0, 3), (0, 1, -2)) \\
 &= \text{rg}((1, 2, -2), (0, -2, 5), (0, 1, -2)) && (c_2 \leftarrow c_2 - c_1) \\
 &= \text{rg}((1, 2, -2), (0, 1, -2), (0, -2, 5)) && (c_2 \leftrightarrow c_1) \\
 &= \text{rg}((1, 2, -2), (0, 1, -2), (0, 0, -9)) && (c_3 \leftarrow c_3 + 2c_2) \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

En effet, la famille $((1, 2, -2), (0, 1, -2), (0, 0, -9))$ est libre : si on essaie de le montrer, le système qui apparaît est directement triangulaire à têtes de lignes non nulles.

La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est donc génératrice de \mathbb{R}^3 , et puisque $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .

4. On obtient :

$$\begin{aligned}
 f(u_1) &= (2, 4, -4) \\
 &= 2 \cdot (1, 2, -2) \\
 &= 2u_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(u_2) &= (3, 0, 9) \\
 &= 3 \cdot (1, 0, 3) \\
 &= 3u_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(u_3) &= (0, 3, -6) \\
 &= 3 \cdot (0, 1, -2) \\
 &= 3u_3
 \end{aligned}$$

5. Soit $v \in F = \text{Vect}(u_1)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u_1$.

Par linéarité de f , on obtient :

$$\begin{aligned}
 f(v) &= f(\lambda u_1) \\
 &= \lambda f(u_1) \\
 &= 2\lambda u_1 \in \text{Vect}(u_1) = F
 \end{aligned}$$

donc $f(v) \in F$.

6. Soit $v \in G = \text{Vect}(u_2, u_3)$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda u_2 + \mu u_3$. Par linéarité de f :

$$\begin{aligned}
 f(v) &= f(\lambda u_2 + \mu u_3) \\
 &= \lambda f(u_2) + \mu f(u_3) \\
 &= 3\lambda u_2 + 3\mu u_3 \in \text{Vect}(u_2, u_3) = G
 \end{aligned}$$

donc $f(v) \in G$.

7. (a) $v \in F = \text{Vect}(u_1)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v = au_1$.

(b) On a :

$$\begin{aligned}
 f(v) &= f(au_1) \\
 &= a \underbrace{f(u_1)}_{=2u_1} \\
 &= 2au_1 \\
 &= 2v
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^2(v) &= f(f(v)) \\
 &= f(2v) \\
 &= 2 \underbrace{f(v)}_{=2v} \\
 &= 2^2 v
 \end{aligned}$$

Montrons alors, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n(v) = 2^n v$$

— Pour $n = 0$, c'est évident puisque $f^0(v) = \text{Id}(v) = v = 2^0 v$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(v) = 2^n v$. Alors :

$$\begin{aligned}
 f^{n+1}(v) &= f(f^n(v)) \\
 &= f(2^n v) \\
 &= 2^n f(v) \\
 &= 2^n \times 2v \\
 &= 2^{n+1} v
 \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, f^n(v) = 2^n v$.

8. (a) $v \in G = \text{Vect}(u_2, u_3)$ donc il existe $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $v = bu_2 + cu_3$.

(b) On a :

$$\begin{aligned} f(v) &= f(bu_2 + cu_3) \\ &= bf(u_2) + cf(u_3) \\ &= 3bu_2 + 3cu_3 \\ &= 3(bu_2 + cu_3) \\ &= 3v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^2(v) &= f(f(v)) \\ &= f(3v) \\ &= 3f(v) \\ &= 3 \times 3v \\ &= 3^2 v \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(v) = 3^n v$.

— Pour $n = 0$, c'est vrai puisque $f^0(v) = \text{Id}(v) = v = 3^0 v$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(v) = 3^n v$.

Alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1}(v) &= f(f^n(v)) \\ &= f(3^n v) \\ &= 3^n f(v) \\ &= 3^n \times 3v \\ &= 3^{n+1} v \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(v) = 3^n v$.

9. v a pour coordonnées (a, b, c) dans la base \mathcal{B} , ainsi $v = au_1 + bu_2 + cu_3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. f étant un endomorphisme de \mathbb{R}^3 , c'est aussi le cas de f^n . On a donc :

$$\begin{aligned} f^n(v) &= f^n(au_1 + bu_2 + cu_3) \\ &= a \underbrace{f^n(u_1)}_{\in F} + b \underbrace{f^n(u_2)}_{\in G} + c \underbrace{f^n(u_3)}_{\in G} \\ &= a \times 2^n u_1 + b \times 3^n u_2 + c \times 3^n u_3 \\ &= 2^n au_1 + 3^n bu_2 + 3^n cu_3 \end{aligned}$$

Chapitre 22

Dénombrement

22.1	Ensembles finis	686
22.1.1	Définition	686
22.1.2	Opérations	687
22.1.3	Cardinal et applications	691
22.2	Listes, arrangements et combinaisons	695
22.2.1	Listes	695
22.2.2	Arrangements	695
22.2.3	Combinaisons	697
22.3	Exercices	699

22.1 Ensembles finis

22.1.1 Définition

Définition 22.1.1 – Ensemble fini

Soit A un ensemble. On dit que A est *de cardinal fini* (ou *fini*) lorsqu'il comporte un nombre fini d'éléments. Ce nombre d'éléments est alors noté $\text{Card}(A)$ ou $|A|$.

Remarque 22.1.2

— Si A est un ensemble fini, alors $\text{Card}(A) = \sum_{a \in A} 1$.

Exemple 22.1.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\llbracket 1; n \rrbracket$ est fini et de cardinal n (y compris si $n = 0$, auquel cas cet intervalle est vide).

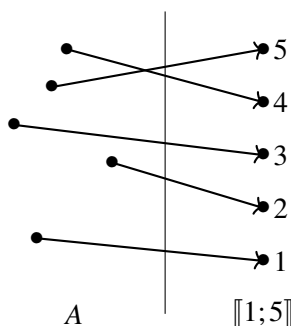
Propriété 22.1.4

Soient A et B deux ensembles. On suppose que A est fini. Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont en bijection} \iff \begin{cases} B \text{ est fini} \\ \text{Card}(A) = \text{Card}(B) \end{cases}$$

Remarque 22.1.5

- A et B sont en bijection s'il existe une bijection φ de A vers B (ce qui revient à dire qu'il existe une bijection de B vers A : il suffit de considérer φ^{-1}).
- En particulier, un ensemble A est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si A est en bijection avec $\llbracket 1; n \rrbracket$, c'est-à-dire si l'on peut numéroter les éléments de A de 1 à n .
- Bien qu'elles permettent de définir rigoureusement le cardinal d'un ensemble fini, l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.



A est en bijection avec $\llbracket 1; 5 \rrbracket$ donc $\text{Card}(A) = 5$.

Propriété 22.1.6

Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$, $\llbracket a; b \rrbracket$ est de cardinal fini et

$$\text{Card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b - a + 1$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'application

$$\begin{aligned}\varphi &: \llbracket a; b \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; b-a+1 \rrbracket \\ x &\mapsto x-a+1\end{aligned}$$

est une bijection.

Déjà, φ est bien définie : pour tout $x \in \llbracket a; b \rrbracket$, on a bien $x-a+1 \in \llbracket 1; b-a+1 \rrbracket$.

Soit $y \in \llbracket 1; b-a+1 \rrbracket$ et $x \in \llbracket a; b \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned}y = \varphi(x) &\iff y = x-a+1 \\ &\iff x = y+a-1\end{aligned}$$

et $y+a-1$ est bien dans $\llbracket a; b \rrbracket$ puisque $1 \leq y \leq b-a+1$. y admet donc un unique antécédent par φ dans $\llbracket a; b \rrbracket$: φ est bijective. \square

Propriété 22.1.7

Soit E un ensemble fini et A une partie de E . Alors A est de cardinal fini et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$.

Démonstration. Il est très intuitif que A est de cardinal fini et que $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$, et nous nous contenterons ici de cette intuition.

Supposons maintenant que $E \neq A$: puisque $A \subset E$, il existe alors $x \in E \setminus A$. L'ensemble $A \cup \{x\}$ est alors une partie de E contenant $\text{Card}(A) + 1$ éléments (puisque x n'est pas un élément de A), ainsi $\text{Card}(A) + 1 \leq \text{Card}(E)$ ou encore $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E) - 1 < \text{Card}(E)$. Par contraposée, on a bien

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(E) \implies A = E$$

et le sens réciproque est immédiat. \square

Exemple 22.1.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des racines complexes du polynôme $X^n - 1$. Ce polynôme étant de degré n , on sait que \mathbb{U}_n est fini et que $\text{Card}(\mathbb{U}_n) \leq n$.

De plus, les complexes $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ sont des racines n -ièmes de l'unité, sont deux-à-deux distincts et sont au nombre de n .

On a donc

$$n = \text{Card}\left(\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\}\right) \leq \text{Card}(\mathbb{U}_n) \leq n$$

On en déduit que $\text{Card}(\mathbb{U}_n) = n$ et que

$$\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\} = \mathbb{U}_n$$

22.1.2 Opérations

Remarque 22.1.9 : Quelques rappels

Soient A et B deux parties de E .

— L'union de A et B est notée $A \cup B$. C'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B (ou dans les deux en même temps). Ainsi :

$$A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

- L'intersection de A et B est notée $A \cap B$. C'est l'ensemble des éléments de E qui sont simultanément dans A et dans B . Ainsi

$$A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$$

- A et B sont dites *disjointes* lorsque $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire lorsqu'il n'existe aucun élément de E qui soit dans A et dans B simultanément.
- Le complémentaire de A dans E est noté \bar{A} ou $E \setminus A$. C'est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A .
- La différence de B par A est notée $B \setminus A$. C'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans B mais pas dans A :

$$B \setminus A = \{x \in E, x \in B \text{ et } x \notin A\} = B \cap \bar{A}$$

Propriété 22.1.10 – Cardinal d'une union disjointe

Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E . **On suppose que A et B sont disjointes.**
Alors $A \cup B$ est une partie finie de E et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Corollaire 22.1.11 – Cardinal d'une différence

On considère un ensemble E .

1. Pour toutes parties A et B de E , et si B est finie, alors $B \setminus A$ et $A \cap B$ sont des parties finies de E et :

$$\text{Card}(B \setminus A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

2. Si E est fini, alors pour toute partie A de E , $E \setminus A$ est finie et

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E \setminus A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

Démonstration. 1. $B \setminus A$ est une partie de B qui est ici supposé fini donc $B \setminus A$ est finie. Il en est de même pour $A \cap B$.
On a

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

Cela se montre par double inclusion :

— Soit $x \in B$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$. Sinon, $x \in B \setminus A$. Dans les deux cas, on a bien $x \in (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

— Soit $x \in (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Alors $x \in B \setminus A$ ou $x \in A \cap B$: dans les deux cas, $x \in B$.

De plus, $B \setminus A$ et $A \cap B$ sont disjoints (si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ donc $x \notin B \setminus A$).

On a donc

$$\text{Card}(B) = \text{Card}((B \setminus A) \cup (A \cap B)) = \text{Card}(B \setminus A) + \text{Card}(A \cap B)$$

et on obtient le résultat en soustrayant $\text{Card}(A \cap B)$.

2. On applique ce qui précède à A et E , sachant que $A \cap E = A$.

□

Propriété 22.1.12

Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E . Alors $A \cup B$ est finie et :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Démonstration. On a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. On peut le montrer par double inclusion :

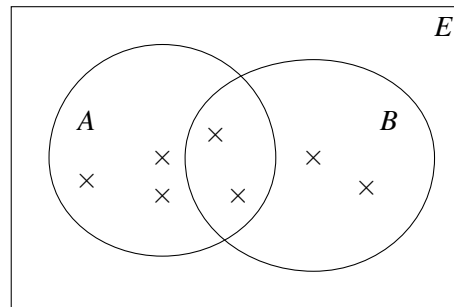
- Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$. Sinon, $x \notin A$ et $x \in B$ donc $x \in B \setminus A$. Dans les deux cas, on a bien $x \in A \cup (B \setminus A)$.
- Soit $x \in A \cup (B \setminus A)$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$. Sinon, $x \in B \setminus A$ donc $x \in B$. Dans les deux cas, on a bien $x \in A \cup B$.

De plus, A et $B \setminus A$ sont des parties disjointes de E (si $x \in A$, alors x ne peut pas être dans $B \setminus A$). Enfin, ces deux parties de E sont finies.

On a donc

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(A \cup (B \setminus A)) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B \setminus A) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \end{aligned}$$

□



Si l'on souhaite compter le nombre d'éléments de $A \cup B$, on compte ceux de A et ceux de B : les éléments de $A \cap B$ sont alors comptés deux fois, soit une fois de trop.

Exercice 22.1.13

Dans une classe de 21 élèves, 8 font du football, 7 du basket et 12 ne font ni du football, ni du basket. Combien d'élèves font du foot *et* du basket ?

Correction. On note C l'ensemble des 21 élèves, F l'ensemble des élèves faisant du football, B l'ensemble des élèves faisant du basket et A l'ensemble des élèves ne faisant ni l'un ni l'autre. On cherche donc $\text{Card}(F \cap B)$.

On sait que

$$\text{Card}(F \cup B) = \text{Card}(F) + \text{Card}(B) - \text{Card}(F \cap B) \quad (\star)$$

Or $F \cup B$ est l'ensemble des élèves faisant du football ou du basket : c'est le complémentaire de A dans C . On a donc $\text{Card}(F \cup B) = \text{Card}(C) - \text{Card}(A) = 21 - 12 = 9$. L'égalité (\star) donne alors

$$\begin{aligned} \text{Card}(F \cap B) &= \text{Card}(F) + \text{Card}(B) - \text{Card}(F \cup B) \\ &= 8 + 7 - 9 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Remarque 22.1.14 : Rappel : unions et intersections quelconques

Soit J un ensemble, et $(A_j)_{j \in J}$ une famille de parties d'un ensemble E .

- La réunion des $(A_j)_{j \in J}$ est

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \in E, \exists j \in J, x \in A_j\}$$

Autrement dit, un élément x de E est dans $\bigcup_{j \in J} A_j$ si et seulement s'il est dans *au moins* l'un des A_j .

— L'intersection des $(A_j)_{j \in J}$ est

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \{x \in E, \forall j \in J, x \in A_j\}$$

Autrement dit, un élément x de E est dans $\bigcap_{j \in J} A_j$ si et seulement s'il est dans *chacun* des A_j .

Propriété 22.1.15

Soit J un ensemble fini et $(A_j)_{j \in J}$ une famille de parties finies de E . On suppose que ces parties de E sont deux-à-deux disjointes, c'est-à-dire que

$$\forall i, j \in J, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

Alors $\bigcup_{j \in J} A_j$ est une partie finie de E et

$$\text{Card} \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) = \sum_{j \in J} \text{Card}(A_j)$$

Remarque 22.1.16

Si J est vide, on pose $\bigcup_{j \in J} A_j = \emptyset$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $\text{Card}(J)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{P}_n : « Pour toute famille $(A_j)_{j \in J}$ de n parties finies deux-à-deux disjointes de E , $\bigcup_{j \in J} A_j$ est une partie finie de E et $\text{Card} \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) = \sum_{j \in J} \text{Card}(A_j)$ ».

— \mathcal{P}_0 est trivialement vraie puisqu'une somme portant sur un ensemble vide est nulle.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose \mathcal{P}_n vraie.

Soit J un ensemble de cardinal $n + 1$, et $(A_j)_{j \in J}$ une famille de parties finies de E deux-à-deux disjointes. Soit $j_0 \in J$ et $J' = J \setminus \{j_0\}$: en particulier, $\text{Card}(J') = \text{Card}(J) - \text{Card}(\{j_0\}) = n + 1 - 1 = n$ puisque $\{j_0\} \subset J$.

Par hypothèse de récurrence, $\bigcup_{j \in J'} A_j$ est donc une partie finie de E et

$$\text{Card} \left(\bigcup_{j \in J'} A_j \right) = \sum_{j \in J'} \text{Card}(A_j)$$

Puisque A_{j_0} est finie, et d'après 22.1.10, l'ensemble $\bigcup_{j \in J} A_j = \left(\bigcup_{j \in J'} A_j \right) \cup A_{j_0}$ est fini et :

$$\begin{aligned} \text{Card} \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) &= \text{Card} \left(\bigcup_{j \in J'} A_j \right) + \text{Card}(A_{j_0}) \\ &= \sum_{j \in J'} \text{Card}(A_j) + \text{Card}(A_{j_0}) \\ &= \sum_{j \in J} \text{Card}(A_j) \end{aligned}$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

□

Remarque 22.1.17 : Rappel : produit cartésien

Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B est noté $A \times B$, et

$$A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$$

Propriété 22.1.18 – Produit cartésien d'ensembles finis

Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \times B$ est fini et

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \text{Card}(B)$$

Démonstration. Construire un couple dans $A \times B$ revient à :

1. Choisir un élément a de A : il y a $\text{Card}(A)$ façons de le faire.
2. Choisir un élément b de B : il y a $\text{Card}(B)$ façons de le faire.

Pour chacun des $\text{Card}(A)$ choix possibles de a , il y a $\text{Card}(B)$ choix possibles de b . Il y a donc $\text{Card}(A) \text{Card}(B)$ éléments dans $A \times B$. □

Propriété 22.1.19

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, \dots, A_n des parties finies d'un ensemble E . Alors $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ est de cardinal fini et

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \prod_{k=1}^n \text{Card}(A_k)$$

Démonstration. Construire un élément de $A_1 \times \dots \times A_n$ revient à :

- Choisir un élément de A_1 : il y a $\text{Card}(A_1)$ façons de le faire.
- Choisir un élément de A_2 : il y a $\text{Card}(A_2)$ façons de le faire.
- ...
- Choisir un élément de A_n : il y a $\text{Card}(A_n)$ façons de le faire.

Il y a donc bien $\prod_{k=1}^n \text{Card}(A_k)$ éléments dans $A_1 \times \dots \times A_n$. □

Exemple 22.1.20

On lance un dé rouge et un dé bleu à 6 faces chacun. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

22.1.3 Cardinal et applications

Si vous avez 6 chaussettes à ranger en utilisant 3 tiroirs, alors au moins un tiroir contiendra plus de deux chaussettes.

Cette simple affirmation nous invite à étudier le cardinal de $f(A)$, où f est une application entre deux ensembles A et B (A pourrait être l'ensemble de vos chaussettes, et f une application qui à chaque chaussette associe un tiroir).

Propriété 22.1.21

Soient A et B deux ensembles. On suppose que A est fini. Soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$.

Alors $f(A)$ est une partie^a finie de B et $\text{Card}(f(A)) \leq \text{Card}(A)$.

^a. Pour rappel, $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.

Démonstration. Notons $A = \{a_i, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$, les $(a_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ étant les éléments deux-à-deux distincts de A , de sorte que $n = \text{Card}(A)$. Alors

$$f(A) = \{f(a_i), i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$$

contient bien moins de n éléments.

Attention

On ne peut pas dire que $f(A)$ contient exactement n éléments : les $(f(a_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ ne sont pas forcément deux-à-deux distincts.

□

Propriété 22.1.22

Soient A et B deux ensembles. On suppose que A est fini. Soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$. Alors f est injective si et seulement si $\text{Card}(A) = \text{Card}(f(A))$.

Démonstration. On sait déjà que $f(A)$ est fini et que $\text{Card}(f(A)) \leq \text{Card}(A)$.

— Supposons f injective. L'application

$$\begin{aligned} \varphi &: A \rightarrow f(A) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

(qui n'est autre que f , vue comme arrivant dans $f(A)$) est alors une bijection (elle est injective puisque f l'est, mais aussi surjective par définition de $f(A)$). A et $f(A)$ sont alors en bijection : en particulier, $\text{Card}(A) = \text{Card}(f(A))$.

— Supposons que f n'est pas injective. Il existe donc deux éléments u et v de A , avec $u \neq v$ et $f(u) = f(v)$. On a alors

$$f(A \setminus \{u\}) = f(A)$$

En effet, l'inclusion de gauche à droite est immédiate puisque $A \setminus \{u\} \subset A$. Réciproquement, soit $y \in f(A)$. Il existe donc $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Si $x \neq u$, alors $x \in A \setminus \{u\}$ donc $y \in f(A \setminus \{u\})$. Sinon, $x = u$ donc $y = f(x) = f(u) = f(v) \in f(A \setminus \{u\})$ puisque $v \in A \setminus \{u\}$ car $v \neq u$. Dans les deux cas, on a bien $y \in f(A \setminus \{u\})$.

On a donc bien $f(A \setminus \{u\}) = f(A)$. D'après la propriété précédente, on obtient

$$\text{Card}(f(A)) = \text{Card}(f(A \setminus \{u\})) \leq \text{Card}(A \setminus \{u\}) = \text{Card}(A) - 1 < \text{Card}(A)$$

Finalement, f est injective si et seulement si $\text{Card}(A) = \text{Card}(f(A))$.

□

Remarque 22.1.23

En particulier, si $\text{Card}(f(A)) < \text{Card}(A)$, alors f n'est pas injective : on appelle souvent ce résultat le *lemme des tiroirs*. Si A désigne l'ensemble de vos chaussettes, et f est l'application qui à chaque chaussette associe un tiroir, le tout en supposant que vous avez strictement moins de tiroirs que de chaussettes, alors f ne peut pas être injective : au moins un tiroir contiendra plus de deux chaussettes.

Exemple 22.1.24

Un code de carte bancaire est composé de 4 chiffres. Dans un lot de 10001 cartes bancaires, au moins deux d'entre elles ont le même code.

En effet, notons :

- A l'ensemble des cartes bancaires de la ville en question.
- f l'application qui à chaque carte bancaire associe son code.

$f(A)$ est alors l'ensemble des codes utilisés : c'est donc une partie de l'ensemble de tous les codes possibles, c'est-à-dire de $\llbracket 0; 9 \rrbracket^4$, qui est de cardinal 10^4 . On a donc

$$\text{Card}(f(A)) \leq 10^4 < 10001 = \text{Card}(A)$$

donc f n'est pas injective.

Propriété 22.1.25

Soient A et B deux ensembles finis **de même cardinal**, et soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$. Alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que l'injectivité de f équivaut à sa surjectivité. Or :

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff \text{Card}(f(A)) = \text{Card}(A) && \text{d'après 22.1.22} \\ &\iff \text{Card}(f(A)) = \text{Card}(B) && \text{car Card}(A) = \text{Card}(B) \\ &\iff f(A) = B && \text{d'après 22.1.7 et puisque } f(A) \subset B \\ &\iff f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

□

Exercice 22.1.26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $p = 2^n$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $r_p(k)$ le reste dans la division euclidienne de k par p . On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \llbracket 0; p-1 \rrbracket &\rightarrow \llbracket 0; p-1 \rrbracket \\ k &\mapsto r_p(3k) \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que f est une bijection.

1. Dans cette question uniquement, on pose $n = 3$. Montrer que f est alors une bijection. On pourra calculer directement $f(k)$ pour tout $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$.
On revient au cas général où n est quelconque.
2. Soient $k, k' \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ tels que $f(k) = f(k')$.
 - (a) Montrer que p divise $3(k - k')$ et en déduire que p divise $k - k'$.
 - (b) En déduire que $k = k'$.
3. Justifier que f est une bijection.

Correction. 1. Si $n = 3$, alors $p = 2^3 = 8$. Les valeurs prises par f sont alors synthétisées dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(k)$	0	3	6	1	4	7	2	5

Par exemple, $3 \times 5 = 15$ et $15 = 1 \times 8 + 7$ donc $f(5) = r_8(15) = 7$.

Chaque valeur de $\llbracket 0; 7 \rrbracket$ est donc atteinte exactement une fois par f : f est bijective.

2. (a) On reprend les notations de l'énoncé : en particulier, on suppose que $f(k) = f(k')$. Par division euclidienne, il existe deux entiers q et q' tels que $3k = pq + r_p(3k) = pq + f(k)$ et $3k' = pq' + r_p(3k') = pq' + f(k')$.
On a donc

$$3k - 3k' = pq + f(k) - (pq' + f(k')) = p(q - q')$$

puisque $f(k) = f(k')$. Ainsi $3(k - k') = p(q - q')$ et puisque $q - q' \in \mathbb{Z}$, p est bien un diviseur de $3(k - k')$.

- Or $p = 2^n$: dans la décomposition en facteurs premiers de $3(k - k')$ doit donc apparaître le facteur 2^n , qui ne peut pas venir de 3 puisque 3 est premier. $p = 2^n$ divise donc $k - k'$.
- (b) p divise $k - k'$ mais k et k' sont dans $\llbracket 0; p - 1 \rrbracket$ donc $-p < k - k' < p$. Le seul multiple de p strictement compris entre $-p$ et p étant 0, on en déduit que $k = k'$.
3. La question précédente montre que f est injective. L'ensemble de départ et d'arrivée étant finis de même cardinal, f est bien une bijection.

Propriété 22.1.27 – Nombre d'applications de A vers B

Soient A et B deux ensembles finis non vides. Le nombre d'applications de A vers B est alors $\text{Card}(B)^{\text{Card}(A)}$. Autrement dit :

$$\text{Card}(B^A) = \text{Card}(B)^{\text{Card}(A)}$$

Démonstration. Notons $A = \{a_i, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$, où les $(a_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont les éléments deux-à-deux distincts de A , et $n = \text{Card}(A)$.

Construire une application de A vers B revient donc à associer, à chaque élément de A , un élément de B . Cela revient donc à choisir une famille $(b_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ d'éléments de B (pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, b_i est alors l'élément associé à a_i).

Or, le nombre de familles à n éléments de B est précisément le cardinal de B^n , c'est-à-dire $\text{Card}(B)^n = \text{Card}(B)^{\text{Card}(A)}$. □

Remarque 22.1.28 : Le cas des ensembles vides

En réalité, cette formule reste valable si A ou B est vide. En effet, si A est vide, l'application vide est la seule application de A vers B et on a bien $\text{Card}(B)^{\text{Card}(A)} = 1$. Sinon, A est non vide, et si B est vide, il n'existe pas d'application de A vers B (puisque à tout élément de A , il faut associer un élément de B , ce qui est alors impossible). Or, dans ce cas, on a bien $\text{Card}(B)^{\text{Card}(A)} = 0$.

Propriété 22.1.29 – Nombre de parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

Démonstration. On a déjà montré cette formule avec la formule du binôme. Donnons maintenant une preuve axée sur le dénombrement.

Si E est vide, l'égalité est triviale : la seule partie de E est l'ensemble vide.

Supposons E non vide, et notons $E = \{e_i, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ où les $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont les éléments deux-à-deux distincts de E .

Construire une partie de E revient alors à :

- Choisir si on garde e_1 : il y a deux choix possibles.
- Choisir si on garde e_2 : il y a deux choix possibles.
- ...
- Choisir si on garde e_n : il y a deux choix possibles.

En tout, cela fait bien $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{2 \text{ apparaît } n \text{ fois}} = 2^n$ façons de construire une partie de E . □

Exemple 22.1.30

Dans un sac de n billes, on prend une poignée (éventuellement vide) d'un nombre quelconque de billes.

Choisir une telle poignée revient donc à choisir une partie de l'ensemble des n billes : il y a donc 2^n poignées possibles.

22.2 Listes, arrangements et combinaisons

22.2.1 Listes

Définition 22.2.1

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$. On appelle p -liste de E tout p -uplet de E , c'est-à-dire tout élément de E^p .

On a donc directement le résultat suivant.

Propriété 22.2.2

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$. Le nombre de p -listes de E est alors $\text{Card}(E^p) = \text{Card}(E)^p$.

Remarque 22.2.3

- Dans une p -liste, les éléments choisis ne sont pas supposés deux-à-deux distincts.
- Si $p = 0$, cette formule est bien valide : dans ce cas, E^p ne contient que la famille vide, donc $\text{Card}(E^p) = 1 = \text{Card}(E)^p$.

Exemple 22.2.4

- (a, n, a, n, a, s) est une 6-liste de $\{a, b, c, \dots, z\}$.
- Le nombre de codes à 4 chiffres possibles est aussi le nombre de 4-listes de $\llbracket 0; 9 \rrbracket$. Ce nombre est donc $\text{Card}(\llbracket 0; 9 \rrbracket)^4 = 10^4$.

22.2.2 Arrangements

Propriété 22.2.5

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$. Le nombre de p -listes **formées d'éléments deux-à-deux distincts** est alors

$$\mathcal{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration. Pour $n = 0$, l'égalité est évidente :

$$\frac{0!}{(0-0)!} = \frac{1}{1} = 1 = \mathcal{A}_0^0$$

Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$. Pour choisir une famille (x_1, x_2, \dots, x_p) de p éléments deux-à-deux distincts d'un ensemble à n éléments, il faut et il suffit de :

- Choisir le premier élément, x_1 : il y a n façons de le faire.
- Choisir le second élément, x_2 , différent de x_1 : il y a $n - 1$ façons de le faire.
- ...
- Choisir le p -ième élément, x_p , différent des $p - 1$ précédents : il y a $n - (p - 1)$ façons de le faire.

En tout, le nombre de p -listes de E formées d'éléments deux-à-deux distincts est donc

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - (p - 1)) = \frac{n!}{(n - p)!}$$

□

Remarque 22.2.6

- Si $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p > n$, alors $\mathcal{A}_n^p = 0$.
- La notation « \mathcal{A}_n^p » n'est pas officiellement au programme. Elle vient du fait qu'une p -liste de E formée d'éléments deux-à-deux distincts est aussi appelée un p -arrangement de E . (a, n, a, n, a, s) n'est pas un 6-arrangement de $\{a, b, c, \dots, z\}$ (certaines lettres sont répétées) mais (c, h, i, e, n) en est un 5-arrangement.

Exemple 22.2.7

Vous disposez de 10 paires de chaussettes et, étant très prévoyant, vous souhaitez planifier leur utilisation et attribuer à chacun des 7 jours de la semaine sa paire de chaussettes.

Créer un tel planning revient alors à choisir un 7-arrangement de l'ensemble de vos 10 chaussettes. Il y a donc $\mathcal{A}_{10}^7 = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = 10 \times 9 \times \dots \times 4 = 604800$ plannings possibles (10 choix possibles pour le premier jour, 9 pour le second, ..., 4 pour le septième).

Exemple 22.2.8

Dans un jeu de 52 cartes, vous tirez 3 cartes successivement et sans remise. Un tel tirage peut donc être représenté par une 3-liste d'éléments deux-à-deux distincts de l'ensemble des 52 cartes : il y a donc $\frac{52!}{(52-3)!} = 52 \times 51 \times 50 = 132600$ tirages possibles.

Propriété 22.2.9

Soient E et F deux ensembles finis.

Le nombre d'applications injectives de E dans F est alors $\mathcal{A}_{\text{Card}(F)}^{\text{Card}(E)}$.

Démonstration. Notons $E = \{e_i, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ où les $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont les éléments deux-à-deux distincts de E et $p = \text{Card}(E)$. Construire une application injective de E vers F revient à choisir une famille $(u_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ de n éléments deux-à-deux distincts de F (pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, u_i est alors l'élément associé à e_i).

Le nombre d'applications injectives de E vers F est donc bien $\mathcal{A}_{\text{Card}(F)}^n$, avec $n = \text{Card}(E)$. \square

Exemple 22.2.10

Il y a $\mathcal{A}_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ applications injectives de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$, mais aucune de $\llbracket 1; 10 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ (comme l'énonçait le lemme des tiroirs).

Définition 22.2.11 – Permutation

Soit E un ensemble fini de cardinal n . On appelle *permutation de E* toute famille de n éléments deux-à-deux distincts de E .

Exemple 22.2.12

Posons $E = \{c, h, i, e, n\}$. Alors (n, i, c, h, e) est une permutation de E .

Propriété 22.2.13 – Nombre de permutations d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Il y a alors $n!$ permutations de E .

Démonstration. Conséquence directe de 22.2.5 : le cardinal cherché est $\mathcal{A}_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$. □

Exemple 22.2.14

Construire un anagramme^a du mot « chien » revient à choisir une permutation de l'ensemble $\{c, h, i, e, n\}$: il y a donc 5! anagrammes possibles du mot chien.

a. Mot (ayant un sens ou non) obtenu en permutant les lettres du mot initial : les mots « niche » ou « ehnci » sont des anagrammes du mot « chien ».

22.2.3 Combinaisons

Définition 22.2.15 – p -combinaisons et coefficients

Soit E un ensemble fini de cardinal n . On appelle p -combinaison de E toute partie de E formée de p éléments.

Exemple 22.2.16

Si $E = \{a, b, c, \dots, z\}$, alors $\{c, h, a, t\}$ est une 4-combinaison de E .

Remarquons qu'ici, et contrairement aux arrangements et aux listes, l'ordre ne compte pas : ainsi, les 4-combinaisons $\{c, h, a, t\}$ et $\{t, c, h, a\}$ sont en fait la même.

Définition 22.2.17 – Coefficients binomiaux

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble formé de n éléments.

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de k -combinaisons de E . $\binom{n}{k}$ est un *coefficient binomial*. Ce nombre ne dépend pas de l'ensemble E choisi.

Par convention, si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k < 0$, on pose également $\binom{n}{k} = 0$.

Exemple 22.2.18

Le nombre de 4-combinaisons de $\{a, b, c, \dots, z\}$ est $\binom{26}{4}$.

Propriété 22.2.19

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Démonstration. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$. Considérons un ensemble E formé de n éléments. L'idée consiste à dénombrer différemment les k -arrangements de E .

Pour créer un k -arrangement de E , il faut et il suffit de :

1. Choisir k éléments, notés a_1, a_2, \dots, a_k , de E : il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire.
2. Les ordonner, c'est-à-dire choisir une permutation de l'ensemble $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Il y a $k!$ façons de le faire.

Le nombre de k -arrangements de E est donc $k! \times \binom{n}{k}$. Ainsi

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$$

donc

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□

Exercice 22.2.20

Combien d'anagrammes du mot « cerise » existe-t-il ?

Correction. Il s'agit de construire une 6-liste de l'ensemble $\{c, e, r, i, s\}$, dans laquelle le e apparaît exactement 2 fois et chacune des autres lettres apparaît exactement une fois. Construire un tel anagramme revient donc à :

- Placer les deux e , c'est-à-dire choisir 2 emplacements dans la 6-listes : il y a $\binom{6}{2}$ façons de le faire.
- Répartir les autres lettres parmi les 4 emplacements restants, ce qui revient à choisir une permutation de $\{c, r, i, s\}$: il y a $4!$ façons de le faire.

En tout, il y a donc $\binom{6}{2} \times 4! = \frac{6!}{2!4!} 4! = \frac{6!}{2} = 360$ anagrammes du mot « cerise ».

Remarque 22.2.21

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{n}{1} = n$. En effet, c'est évident si $n = 0$, et si $n \geq 1$, alors :

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

Propriété 22.2.22

Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration. Direct par le calcul ; on peut aussi dire que choisir k éléments dans un ensemble à n éléments revient à choisir les $n - k$ éléments que l'on ne garde pas. □

Propriété 22.2.23 – Triangle de Pascal

Soit $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Alors :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Démonstration. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.

Remarquons d'emblée que si $k > n$, alors $k+1 > n+1 > n$ et la formule de l'énoncé devient triviale : tous les coefficients binomiaux en jeu sont nuls.

Dans la suite, on supposera donc que $k \leq n$.

Considérons un ensemble E formé de $n+1$ éléments. Soit a un élément quelconque de E , de sorte que $E \setminus \{a\}$ soit formé

de n éléments.

Pour construire une partie de E formée de $k + 1$ éléments, nous avons deux possibilités :

- On construit une partie de E formée de $k + 1$ éléments, ne contenant pas a . Cela revient à choisir $k + 1$ éléments dans $E \setminus \{a\}$: par définition, il y a $\binom{n}{k+1}$ façons de le faire.
- On construit une partie de E formée de $k + 1$ éléments, contenant a . Pour construire une telle partie, il faut et il suffit de choisir k éléments dans $E \setminus \{a\}$ (puis d'y adjoindre a) : il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire.

En tout, il y a donc $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ parties de E formées d'exactly $k + 1$ éléments, autrement dit :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

□

Propriété 22.2.24 – Formule du binôme

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Une preuve calculatoire et utilisant le triangle de Pascal a déjà été faite plusieurs fois à ce stade de l'année. On peut néanmoins en donner une version combinatoire.

On a

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{a+b \text{ apparaît } n \text{ fois}}$$

Une fois développé, ce produit fait apparaître des termes de la forme $a^k b^{n-k}$, où $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Un tel terme est obtenu en choisissant, lors du développement, k fois a parmi les n facteurs de l'expression $(a+b)^n$ (b est donc choisi $n-k$ fois).

Le terme $a^k b^{n-k}$ apparaît donc $\binom{n}{k}$ fois dans le développement, et ceci pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. □

22.3 Exercices

Exercice 22.3.1

Écrire à l'aide de factorielles les nombres $A = 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$ et $B = \frac{1}{12 \times 13 \times 14}$.

Exercice 22.3.2

Calculer :

1. $\frac{10!^2}{4! \times 5!};$

2. $5!^2 - 3!^2;$

3. $\frac{2}{n!} + \frac{2}{(n+2)!} - \frac{2}{(n+1)!}$ où $n \in \mathbb{N};$

4. $\prod_{1 \leq k \leq 2n, k \text{ pair}} k;$

5. $\prod_{1 \leq k \leq 2n, k \text{ impair}} k.$

Exercice 22.3.3

On dispose de 3 tiroirs pour ranger 5 pulls. Chaque tiroir peut accueillir les 5 pulls.

1. Combien y a-t-il de rangements possibles ?
2. Combien y a-t-il de rangements possibles qui ne laissent aucun tiroir vide ?

Exercice 22.3.4

1. Un club de sport propose uniquement du basket et du football. 25 adhérents font du basket, 30 font du football, et 10 font du basket et du football. Combien d'adhérents compte ce club ?
2. Soit E un ensemble fini de cardinal n et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer $\text{Card}(A \cup B \cup C)$ en fonction de $\text{Card}(A)$, $\text{Card}(B)$, $\text{Card}(C)$, $\text{Card}(A \cap C)$, $\text{Card}(A \cap B)$, $\text{Card}(B \cap C)$, $\text{Card}(A \cap B \cap C)$.
3. Un autre club de sport propose trois sports (et pas plus) : du basket, du football et du badminton. 25 adhérents font du basket, 28 du football, 21 du badminton, 12 font du basket et du badminton, 14 font du basket et du football, 13 font du badminton et du football, et enfin 3 font les trois sports. Combien d'adhérents compte ce club ?

Exercice 22.3.5 – Le digicode

Pour entrer dans sa maison, Arthur doit entrer un digicode composé de quatre chiffres compris entre 0 et 9, qu'il a bien évidemment oublié. Il entre donc des combinaisons au hasard.

1. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?
2. Arthur est sûr que la combinaison ne contient aucun 1. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?
3. Après quelques essais infructueux, Arthur se souvient que la combinaison comporte au moins un 2. Combien reste-t-il de combinaisons possibles ?
4. Arthur se rappelle aussi que la combinaison comporte aussi au moins un 5. Combien reste-t-il de combinaisons ?
5. Arthur se rappelle à présent que la combinaison ne comporte qu'un seul 2, et que celui est le premier chiffre à entrer. Combien reste-t-il de combinaisons ?
6. Les deux chiffres manquant sont 3 et 7, mais Arthur ne se rappelle plus de l'ordre de ces chiffres, à part le 2 qui est en première position. Combien y a-t-il alors de combinaisons possibles ?

Exercice 22.3.6

En permutant les lettres d'un mot donné, on obtient un *anagramme* de ce mot (dans cet exercice, cet anagramme n'est pas censé avoir un sens).

- | | | |
|--|--|---|
| 1. Combien d'anagrammes a le mot <i>fleur</i> ? | | tient pas compte de l'accent) |
| 2. Combien d'anagrammes a le mot <i>penser</i> ? | | 4. Combien d'anagrammes a le mot <i>affectif</i> ? |
| 3. Combien d'anagrammes a le mot <i>créer</i> ? (on ne | | 5. Combien d'anagrammes a le mot <i>anagramme</i> ? |

Correction. 1. Les lettres du mot *fleur* étant deux-à-deux distinctes, il y a $5!$ anagrammes de ce mot.
 2. Il s'agit de construire une 6-liste de $\{p, e, n, s, r\}$ dans laquelle e apparaît deux fois et les autres lettres une seule fois.
 On place d'abord les deux e : il y a $\binom{6}{2}$ façons de le faire. On place alors les 4 lettres suivantes : il y a $4!$ façons de le faire. Il y a donc $\binom{6}{2} 4! = 360$ anagrammes de *penser*.

3. On place d'abord les deux e : $\binom{5}{2}$ façons de le faire. On place ensuite les deux r (mais il ne reste plus que 3 emplacements disponibles) : $\binom{3}{2}$ façons de le faire. Le c ne peut alors aller que dans une seule position. Le nombre d'anagrammes de *créer* (sans tenir compte de l'accent) est donc

$$\binom{5}{2} \binom{3}{2} = \frac{5!}{2!3!} \frac{3!}{2!1!} = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

4. Avec le même raisonnement que ci-dessus, on trouve

$$\underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{On place les trois } f} \times \underbrace{5!}_{\text{On place les autres lettres}} = \frac{8!}{3!5!} 5! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

5. On obtient

$$\underbrace{\binom{9}{3}}_{\text{On place les 3 } a} \underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{On place les 2 } m} \underbrace{4!}_{\text{On place les autres lettres}} = \frac{9!}{3!6!} \frac{6!}{2!4!} 4! = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2}$$

c'est-à-dire 30240.

Exercice 22.3.7

Calculer :

1. $\binom{5}{4}$
2. $\binom{90}{89}$

3. $\binom{8}{4}$

Exercice 22.3.8

Montrer que pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 22.3.9

Calculer :

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \times 3^{n-k}$;

2. $(1+x)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$;

3. $(1+\sqrt{2})^4 + (1-\sqrt{2})^4$;

4. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$;

5. $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 22.3.10

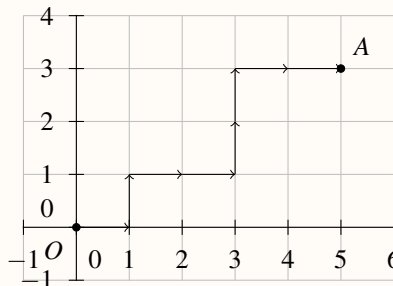
Dans un jeu de 32 cartes, une main est composée de 6 cartes.

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> Combien y a-t-il de mains possibles ? Combien de mains ne contiennent que du trèfle ? Combien de mains ne contiennent que du trèfle ou que du cœur ? Combien de mains contiennent au moins un as ? Combien de mains contiennent exactement un as ? Combien de mains contiennent au moins deux | <ol style="list-style-type: none"> rois ? Combien de mains contiennent exactement deux rois ? Combien de mains ne contiennent aucun roi ? Combien de mains ne contiennent aucune paire d'as ? Combien de mains ne contiennent pas de cartes de mêmes valeurs ? |
|--|---|

Exercice 22.3.11

On considère une grille représentée par un repère orthonormé, d'origine O . En partant de O , et en se déplaçant de un carreau vers la droite ou de un carreau vers le haut, on doit atteindre le point A de coordonnées $(5; 3)$. Ci-dessous, un exemple de déplacement.

- Combien y a-t-il de chemins possibles reliant O à A ?
- On place B de coordonnées $(4; 2)$. Combien y a-t-il de chemins reliant O à A passant par B ?
- On place C de coordonnées $(2; 1)$. Combien y a-t-il de chemins reliant O à A passant par B et C ?

**Exercice 22.3.12**

Soit E un ensemble à n éléments.

- Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$?
- Combien y a-t-il de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B et C sont deux-à-deux disjoints et $A \cup B \cup C = E$?

Correction. 1. Choisir un tel couple revient à choisir une partie B de E puis poser $A = \overline{B}$, seule façon d'avoir $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$. Le cardinal cherché est donc le nombre de parties de E , c'est-à-dire 2^n .

2. **Première version (il y a une deuxième version plus simple ensuite) :** posons

$$\mathcal{C} = \left\{ (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, A, B \text{ et } C \text{ sont deux-à-deux disjoints}, A \cup B \cup C = E \right\}$$

et pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\mathcal{C}_k = \{ (A, B, C) \in \mathcal{C}, \text{Card}(C) = k \}$$

Les $(\mathcal{C}_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont deux-à-deux disjoints et leur réunion est \mathcal{C} , de sorte que

$$\text{Card}(\mathcal{C}) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(\mathcal{C}_k)$$

Remarquons aussi que, pour tout triplet $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$:

$$(A, B, C) \in \mathcal{C} \iff A \cup B = \overline{C} \text{ et } A \cap B = \emptyset$$

En effet :

- Supposons que $(A, B, C) \in \mathcal{C}$. A , B et C sont alors deux-à-deux disjoints donc en particulier $A \cap B = \emptyset$. De plus, pour tout $x \in E$:
 - Si $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$ donc x ne peut pas être dans C puisque A et C d'une part et B et C d'autre part sont disjoints. Ainsi $x \in \overline{C}$.
 - Si $x \in \overline{C}$, alors $x \in A \cup B$ puisque $x \in E = A \cup B \cup C$.
 On a donc bien $A \cup B = \overline{C}$ par double inclusion.
- Réciproquement, si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \overline{C}$, alors $A \cup B \cup C = \overline{C} \cup C = E$. De plus, $A \cap C \subset (A \cup B) \cap C = \overline{C} \cap C = \emptyset$ et de même $B \cap C = \emptyset$. Le triplet (A, B, C) est donc bien dans \mathcal{C} .

Revenons à notre dénombrement. Fixons $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et cherchons le cardinal de \mathcal{C}_k . Construire un élément de \mathcal{C}_k revient à :

- Choisir une partie C de E à k éléments : il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire.
- Déterminer deux parties A et B de E telles que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \overline{C}$. Puisque \overline{C} est de cardinal $n - k$, il y a 2^{n-k} façons de le faire.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\mathcal{A}) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 1^k \\ &= 3^n \end{aligned}$$

Deuxième version : construire un tel triplet (A, B, C) revient à décider, pour chaque élément de E , si on place celui-ci dans A , dans B ou dans C . Il y a donc 3 choix possibles pour chaque élément de E : le cardinal cherché est bien 3^n .

Exercice 22.3.13

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

1. Combien peut-on trouver de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B \subset E$?
2. Soient A et B deux parties de E . Montrer que $A \cup B = E \iff \overline{A} \subset B \subset E$ (où \overline{A} est le complémentaire de A dans E).
3. Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cup B = E$?
4. Montrer que le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $A \cup B \cup C = E$ est 7^n .

Correction. 1. Notons $\mathcal{A} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \subset E\}$: on cherche ici le cardinal de \mathcal{A} .

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, posons $\mathcal{A}_k = \{(A, B) \in \mathcal{A}, \text{Card}(B) = k\}$.

Les $(\mathcal{A}_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont deux-à-deux disjoints et leur réunion est \mathcal{A} : on a donc $\text{Card}(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(\mathcal{A}_k)$.

Fixons $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Pour construire un élément de \mathcal{A}_k , il faut et il suffit de :

- Choisir une partie B de E à k éléments : il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire.
- Choisir une partie A de B : il y a 2^k façons de le faire.

On a donc $\text{Card}(\mathcal{A}_k) = \binom{n}{k} 2^k$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\mathcal{A}) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} \\ &= 3^n \end{aligned}$$

2. — Supposons que $A \cup B = E$. Il est clair que $B \subset E$: montrons que $\bar{A} \subset B$. Soit $x \in \bar{A}$: alors $x \in E = A \cup B$ mais $x \notin A$ donc $x \in B$. Ainsi $\bar{A} \subset B$.
 — Réciproquement, supposons que $\bar{A} \subset B \subset E$. Il est clair que $A \cup B \subset E$, montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$. Sinon, $x \in \bar{A} \subset B$ donc $x \in B$. Dans les deux cas, on a bien $x \in A \cup B$, de sorte que $E \subset A \cup B$.

On a donc bien montré l'équivalence voulue.

3. Puisque choisir une partie A de E revient à choisir son complémentaire dans E , il y a d'après la question précédente autant de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cup B = E$ qu'il y a de couples $(A', B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A' \subset B \subset E$ (on poserait alors $A = \bar{A}'$). Le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cup B = E$ est donc 3^n .
 4. Notons $\mathcal{C} = \{(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, A \cup B \cup C = E\}$ et, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, posons $\mathcal{C}_k = \{(A, B, C) \in \mathcal{C}, \text{Card}(C) = k\}$. Les $(\mathcal{C}_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont deux-à-deux disjoints et leur réunion est \mathcal{C} .

Fixons $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$: on cherche alors le cardinal de \mathcal{C}_k . Or pour construire un élément de \mathcal{C}_k , il faut et il suffit de :

- Choisir une partie C de E à k éléments : il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire.
- Choisir une partie D de E telle que $D \cup C = E$, c'est-à-dire telle que $\bar{D} \subset C \subset E$, puis deux parties A et B de E telles que $D = A \cup B$. Or, pour tout $d \in \llbracket 0; k \rrbracket$, il y a $\binom{k}{d}$ façons de choisir une partie D de E telle que $\bar{D} \subset C \subset E$ et $\text{Card}(\bar{D}) = d$. Une fois une telle partie D choisie, qui est donc de cardinal $n - d$, il y a d'après la question précédente 3^{n-d} couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $D = A \cup B$.

Le nombre de possibilités pour cette étape est donc $\sum_{d=0}^k \binom{k}{d} 3^{n-d}$.

Finalement, le cardinal cherché est :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\mathcal{A}) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{d=0}^k \binom{k}{d} 3^{n-d} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{d=0}^k \binom{k}{d} 3^{n-k+k-d} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} \sum_{d=0}^k \binom{k}{d} 3^{k-d} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} 4^k \\ &= 7^n \end{aligned}$$

Chapitre 23

Intégration sur un segment

23.1	Fonctions en escalier	706
23.1.1	Définitions	706
23.1.2	Intégration et fonctions en escalier	709
23.2	Fonctions continues	711
23.2.1	Définition	711
23.2.2	Propriétés essentielles	712
23.2.3	Sommes de Riemann	716
23.3	Intégration et dérivation	720
23.3.1	Théorème fondamental de l'analyse	720
23.3.2	Parité et périodicité	722
23.3.3	Valeur moyenne d'une fonction	723
23.3.4	Formules de Taylor	724
23.4	Extension aux fonctions à valeurs complexes	727
23.5	Exercices	727

Le but de ce chapitre est de donner plus de sens à la notion d'intégrale, et d'en comprendre l'essentiel de sa construction¹. Pour ce faire, nous commencerons avec des fonctions très simples : les *fonctions en escalier*. Nous utiliserons alors ces fonctions en escalier pour définir la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

23.1 Fonctions en escalier

23.1.1 Définitions

Définition 23.1.1 – Subdivision

Soient a et b deux réels avec $a < b$. On appelle *subdivision* de $[a; b]$ toute partie finie de $[a; b]$ contenant a et b . On peut alors noter $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Le *pas* de la subdivision S de $[a; b]$ est alors le nombre

$$\max_{i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} (x_{i+1} - x_i)$$

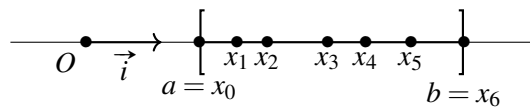


FIGURE 23.1 – Exemple de subdivision de $[a, b]$ à 7 éléments.

Définition 23.1.2 – Fonction en escalier

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Une *fonction en escalier* sur $[a; b]$ est une fonction $\varphi \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ pour laquelle il existe une subdivision $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a; b]$, avec

$$a = x_0 < \dots < x_n = b$$

telle que, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, φ est constante sur $]x_k; x_{k+1}[$.

On dit alors que la subdivision S de $[a; b]$ est *adaptée* à la fonction en escalier φ .

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$.

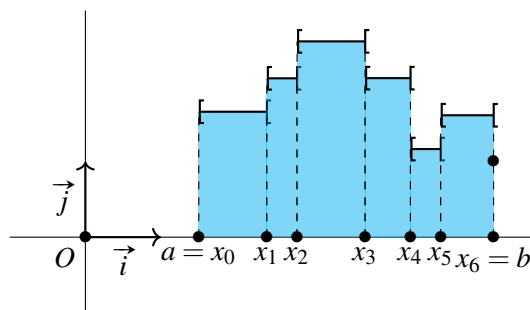


FIGURE 23.2 – Une fonction en escalier. Nous allons définir (voir 23.1.6) son intégrale comme étant la somme des aires de chacun des rectangles.

1. Ou plutôt de l'une de ces constructions : il existe plusieurs théories de l'intégration.

Exemple 23.1.3

- La fonction partie entière est une fonction en escalier sur $[0; 3.5]$. Une subdivision adaptée est alors $\{0, 1, 2, 3, 3.5\}$.
- Les fonctions constantes sur un segment contenant au moins deux points sont en escalier.

Propriété 23.1.4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\varphi \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ une fonction en escalier sur $[a; b]$. Soit S une subdivision adaptée à φ .

- Pour tout $t \in [a; b]$, $S \cup \{t\}$ est une subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ .
- Pour toute partie finie T de $[a; b]$, $S \cup T$ est une subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ .

Démonstration. Soit $t \in [a; b]$.

Si $t \in S$, alors $S \cup \{t\} = S$ et le résultat est immédiat. On supposera donc que $t \notin S$. $S \cup \{t\}$ est une partie finie de $[a; b]$ contenant a et b : c'est donc bien une subdivision de $[a; b]$.

Notons $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$a = x_0 < \dots < x_n = b$$

Puisque $t \notin S$, il existe un unique $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $t \in]x_p; x_{p+1}[$. On a alors

$$a = x_0 < \dots < x_p < t < x_{p+1} < \dots < x_n = b$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ et tout $k \in \llbracket p+1; n-1 \rrbracket$, φ est bien constante sur $[x_k; x_{k+1}]$ puisque S est adaptée à φ . De plus, φ est constante sur $]x_p; x_{p+1}[$ donc sur $]x_p; t[$ et $]t; x_{p+1}[$. La subdivision $S \cup \{t\}$ de $[a; b]$ est donc bien adaptée à φ .

Le deuxième point s'obtient alors du premier par récurrence immédiate sur le nombre d'éléments de T . \square

Propriété 23.1.5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Démonstration. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a; b], \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[a; b]}$. En effet :

- Il est clair que $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{[a; b]}$.
- La fonction nulle est constante et est donc en escalier (n'importe quelle subdivision de $[a; b]$ lui est adaptée).
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$. Soit S (respectivement T) une subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ (respectivement ψ). Alors, d'après 23.1.4, $S \cup T$ est une subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ , mais aussi à ψ . En notant $S \cup T = \{x_0, \dots, x_n\}$ avec $a = x_0 < \dots < x_n = b$, φ et ψ sont constantes sur chacun des intervalles $]x_k; x_{k+1}[$, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$: il en est donc de même pour $\lambda\varphi + \mu\psi$, qui est donc bien en escalier.

\square

Définition 23.1.6 – Intégrale d'une fonction en escalier

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$, et S une subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ . On note $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ avec $a = x_0 < \dots < x_n = b$.

L'intégrale de φ sur $[a; b]$ est alors ^a :

$$\int_{[a; b]} \varphi(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k$$

où, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, c_k est la valeur prise par φ sur $]x_k; x_{k+1}[$.

Ce nombre ne dépend pas de la subdivision S choisie ^b (tant qu'elle est adaptée à φ).

^a. Voir la figure 23.2 : il s'agit bien de la somme des aires des rectangles.

^b. Heureusement, sinon cette définition n'aurait aucun sens !

Remarque 23.1.7

On note aussi (lorsque $a < b$) :

$$\int_{[a;b]} \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt$$

Démonstration. Pour toute subdivision $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a; b]$ adaptée à φ , avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = x_0 < \dots < x_n = b$, on note

$$I_S(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k$$

où pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, c_k est la valeur prise par φ sur $]x_k; x_{k+1}[$.

Soit alors $t \in [a; b]$. On a déjà vu que $S \cup \{t\}$ est une subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ . De plus, $I_{S \cup \{t\}}(\varphi) = I_S(\varphi)$. En effet :

- Si $t \in S$, alors $S \cup \{t\} = S$ et $I_S(\varphi) = I_{S \cup \{t\}}(\varphi)$.
- Supposons que $t \notin S$. Il existe alors un unique $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $x_j < t < x_{j+1}$, de sorte que

$$a = x_0 < \dots < x_j < t < x_{j+1} < \dots < x_n = b$$

Remarquons que, φ étant constante sur $]x_j; x_{j+1}[$, φ prend la même valeur c_j sur $]x_j; t[$ et $]t; x_{j+1}[$. On a alors :

$$\begin{aligned} I_{S \cup \{t\}} &= \sum_{k=0}^{j-1} (x_{k+1} - x_k) c_k + (t - x_j) c_j + (x_{j+1} - t) c_j + \sum_{k=j+1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} (x_{k+1} - x_k) c_k + (x_{j+1} - x_j) c_j + \sum_{k=j+1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k \\ &= I_S(\varphi) \end{aligned}$$

On ne change donc pas la valeur de la somme en ajoutant un élément de $[a; b]$ à une subdivision adaptée à φ . Par récurrence immédiate, si T est une partie finie de $[a; b]$, alors $I_{S \cup T}(\varphi) = I_S(\varphi)$.

Si T est une autre subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ , on a donc :

$$I_S(\varphi) = I_{S \cup T}(\varphi) = I_T(\varphi)$$

La valeur de l'intégrale, telle que définie dans l'énoncé, ne dépend donc pas du choix de la subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ choisie. □

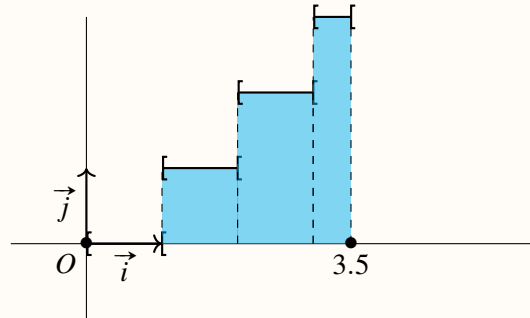
Exemple 23.1.8

- Soit φ une fonction constante, égale à $c \in \mathbb{R}$, sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} avec $a < b$. Alors $\{a, b\}$ est une subdivision adaptée à φ et

$$\int_a^b \varphi(t) dt = (b - a) c$$

- Puisque $\{0, 1, 2, 3.5\}$ est une subdivision de $[0; 3.5]$ adaptée à la fonction partie entière restreinte à cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{3.5} [t] dt &= (1-0) \times 0 + (2-1) \times 1 + (3-2) \times 2 + (3.5-3) \times 3 \\ &= 4.5\end{aligned}$$



23.1.2 Intégration et fonctions en escalier

Nous allons voir les propriétés essentielles (la liste qui suit n'est pas exhaustive) concernant l'intégration des fonctions en escalier, dans le but de les généraliser ensuite aux fonctions continues sur un segment.

Linéarité

Propriété 23.1.9 – Linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b (\lambda \varphi(t) + \mu \psi(t)) dt = \lambda \int_a^b \varphi(t) dt + \mu \int_a^b \psi(t) dt$$

Démonstration. Soit S une subdivision de $[a; b]$ simultanément adaptée à φ et ψ (il suffit de réunir une subdivision adaptée à φ avec une subdivision adaptée à ψ , comme vu précédemment). Notons $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ avec $a = x_0 < \dots < x_n = b$, et notons, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, c_k (respectivement d_k) la valeur prise par φ (respectivement ψ) sur $]x_k; x_{k+1}[$. Alors S est aussi adaptée à $\lambda \varphi + \mu \psi$ et :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda \varphi(t) + \mu \psi(t)) dt &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) (\lambda c_k + \mu d_k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k + \mu \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) d_k \\ &= \lambda \int_a^b \varphi(t) dt + \mu \int_a^b \psi(t) dt\end{aligned}$$

□

Relation de Chasles

Propriété 23.1.10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$. Alors :

$$\forall c \in]a; b[, \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^c \varphi(t) dt + \int_c^b \varphi(t) dt$$

Démonstration. Soit $c \in]a; b[$.

Soit S une subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ . On peut supposer que S contient c (quitte à ajouter ce dernier à S). Notons alors $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ avec

$$a = x_0 < \dots < x_{j-1} < \underbrace{c}_{x_j} < x_{j+1} < \dots < x_n = b$$

avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, et posons $x_j = c$. Comme précédemment, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on note c_k la valeur prise par φ sur $]x_k; x_{k+1}[$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t) dt &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} (x_{k+1} - x_k) c_k + \sum_{k=j}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k \\ &= \int_a^c \varphi(t) dt + \int_c^b \varphi(t) dt \end{aligned}$$

puisque $\{x_0, \dots, x_j\}$ (respectivement $\{x_j, \dots, x_n\}$) est une subdivision de $[a; c]$ (respectivement $[c; b]$) adaptée à $\varphi|_{[a; b]}$ (respectivement $\varphi|_{[c; b]}$). \square

Positivité

Propriété 23.1.11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ à **valeurs positives**. Alors :

$$\int_a^b \varphi(t) dt \geq 0$$

Démonstration. Soit $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ , avec $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$a = x_0 < \dots < x_n = b$$

En particulier, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $x_{k+1} - x_k > 0$.

Pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on note c_k la valeur de φ sur $]x_k; x_{k+1}[$.

Puisque φ est à valeurs positives, on a $c_k \geq 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, ainsi :

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{>0} \underbrace{c_k}_{\geq 0} \geq 0$$

\square

23.2 Fonctions continues

23.2.1 Définition

La transition entre les fonctions en escalier et les fonctions continues repose sur le théorème (admis) suivant :

Théorème 23.2.1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue.

Alors il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a; b]$ telle que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies (\forall t \in [a; b], |f(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon)$$

ce qui revient à dire que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \implies \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon$$

ou encore que

$$\sup_{t \in [a; b]} |f(t) - f_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

■ *Démonstration.* Admis. □

Remarque 23.2.2

— Ce type de convergence (de la suite (f_n) vers f) porte un nom : lorsque

$$\sup_{t \in [a; b]} |f(t) - f_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

on dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$.

— On note aussi

$$\sup_{t \in [a; b]} |f(t) - f_n(t)| = \sup_{[a; b]} |f - f_n|$$

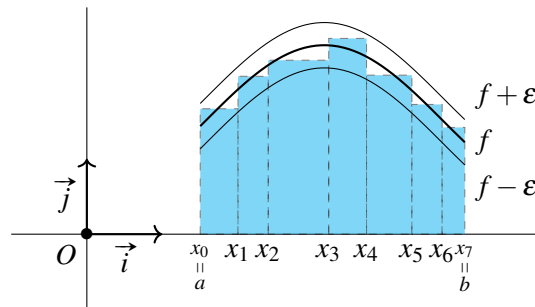


FIGURE 23.3 – Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier comprise entre $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.

Définition 23.2.3 – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier sur $[a; b]$ telle que $\sup_{t \in [a; b]} |f(t) - f_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors la suite $\left(\int_a^b f_n(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel, appelé *intégrale de f sur $[a; b]$* . On note alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{[a; b]} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

Cette limite ne dépend pas du choix de la suite (f_n) .

■ *Démonstration.* Admis. □

On peut prolonger cette définition aux cas où $a = b$ ou $a > b$.

Définition 23.2.4 – Prolongement de la définition précédente

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a, b \in I$. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue.

- Si $a = b$, on pose $\int_a^a f(t) dt = 0$.
- Si $a > b$, on pose $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$

Remarque 23.2.5

Ces choix sont compatibles avec la linéarité de l'intégrale et la relation de Chasles, que nous (re)verrons plus loin.

23.2.2 Propriétés essentielles

Linéarité

Propriété 23.2.6 – Linéarité de l'intégrale

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soient $a, b \in I$ et $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continues. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

Démonstration. Si $a = b$, l'égalité est triviale (tous les termes sont nuls).

Supposons que $a < b$. Il existe alors une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (respectivement $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$) de fonctions en escalier sur $[a; b]$ telle que $\sup_{[a; b]} |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (respectivement $\sup_{[a; b]} |g - g_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$).

On va montrer que

$$\sup_{t \in [a; b]} |\lambda f(t) + \mu g(t) - (\lambda f_n(t) + \mu g_n(t))| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (*)$$

Admettons le temporairement. Puisque $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier, on aura alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\lambda f_n(t) + \mu g_n(t)) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda \int_a^b f_n(t) dt + \mu \int_a^b g_n(t) dt && \text{d'après 23.1.9} \\ &= \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

Montrons que (\star) est vraie. Pour tout $t \in [a; b]$, on a d'après l'inégalité triangulaire sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} |\lambda f(t) + \mu g(t) - (\lambda f_n(t) + \mu g_n(t))| &= |\lambda(f(t) - f_n(t)) + \mu(g(t) - g_n(t))| \\ &\leq |\lambda| |f(t) - f_n(t)| + |\mu| |g(t) - g_n(t)| \\ &\leq |\lambda| \sup_{[a;b]} |f - f_n| + \mu \sup_{[a;b]} |g - g_n| \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in [a; b]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [a;b]} |\lambda f(t) + \mu g(t) - (\lambda f_n(t) + \mu g_n(t))| \\ \leq |\lambda| \sup_{[a;b]} |f - f_n| + \mu \sup_{[a;b]} |g - g_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve bien (\star) , et achève la démonstration dans le cas où $a < b$.

Enfin, si $a > b$, il suffit d'utiliser le cas précédent sur l'intervalle $[b; a]$ (et de tout multiplier par -1). □

Relation de Chasles

Propriété 23.2.7 – Relation de Chasles

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue. Alors pour tout $a, b, c \in I$, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Remarque 23.2.8

Remarquons qu'il n'est ici pas nécessaire que c soit entre a et b , ni même que $a < b$.

Démonstration. Soient $a, b, c \in I$. Si $a = b$, alors $\int_a^b f(t) dt = 0$ et $\int_a^c f(t) dt = -\int_c^a f(t) dt$: la formule voulue est triviale. Il en est de même si $a = c$ ou $b = c$.

On suppose donc que a, b et c sont deux-à-deux distincts.

— Commençons par traiter le cas où $a < c < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers sur $[a; b]$ telle que $\sup_{[a;b]} |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En particulier, la suite $(f_n|_{[a;c]})$ est une suite de fonctions en escalier sur $[a; c]$ qui converge uniformément vers $f|_{[a;c]}$. Il en est de même pour $(f_n|_{[c;b]})$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b f_n(t) dt = \int_a^c f_n(t) dt + \int_c^b f_n(t) dt \quad \text{d'après 23.1.10}$$

et par passage à la limite, on obtient bien :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

— Supposons maintenant que $c < a < b$. Le même raisonnement que ci-dessus (mais cette fois, sur l'intervalle $[c; b]$) donne

$$\int_c^b f(t) dt = \int_c^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt$$

donc

$$\int_a^b f(t) dt = -\int_c^a f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \int_c^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

— Les cas restants sont tous similaires et laissés en exercice. □

Par récurrence, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 23.2.9

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in I$. Alors

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$$

Positivité et croissance de l'intégrale

Propriété 23.2.10 – Positivité de l'intégrale

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue et **positive** sur $[a; b]$. Alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Remarque 23.2.11

Attention : ici, il faut avoir $a < b$ (les bornes de l'intégrale doivent être « dans le bon sens »).

Démonstration. On va approcher f par une suite de fonctions en escalier **positives**.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier sur $[a; b]$ telle que $\sup_{[a; b]} |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de fonctions en escalier vérifiant $\sup_{[a; b]} |f - |f_n|| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n|$ est bien en escalier (f_n est constante sur chacun des intervalles ouverts définis par une subdivision adaptée de $[a; b]$: il en est de même pour $|f_n|$), et pour tout $t \in [a; b]$, sachant que f est à valeurs positives et d'après l'inégalité triangulaire :

$$|f(t) - |f_n(t)|| = ||f(t)| - |f_n(t)|| \leq |f(t) - f_n(t)| \leq \sup_{[a; b]} |f - f_n|$$

Ceci étant valable pour tout $t \in [a; b]$, on obtient

$$\sup_{[a; b]} |f - |f_n|| \leq \sup_{[a; b]} |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\sup_{[a; b]} |f - |f_n|| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Enfin, d'après 23.1.11, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b |f_n(t)| dt \geq 0$$

et par passage à la limite :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |f_n(t)| dt \geq 0$$

□

Propriété 23.2.12 – Croissance de l'intégrale

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, et $f, g \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continues. On suppose que

$$\forall t \in [a; b], f(t) \leq g(t)$$

Alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Démonstration. Le cas $a = b$ est évident. On suppose que $a < b$.

Pour tout $t \in [a; b]$, on a $g(t) - f(t) \geq 0$. La positivité de l'intégrale donne alors $\int_a^b (g(t) - f(t)) dt \geq 0$ ou encore, par linéarité

$$\int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt \geq 0$$

ce qui donne bien le résultat escompté. □

Exercice 23.2.13

Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} F &: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_1^x e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

est majorée.

Propriété 23.2.14

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue **et positive** sur $[a; b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \implies f \text{ est nulle sur } [a; b]$$

Démonstration. Supposons que f n'est pas la fonction nulle sur $[a; b]$: il existe donc $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) > 0$. f étant en particulier continue en α , on a $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) - \frac{f(\alpha)}{2} = f(\alpha) - f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{f(\alpha)}{2} > 0$ donc $x \mapsto f(x) - \frac{f(\alpha)}{2}$ est (strictement) positive au voisinage de α .

Il existe donc $c, d \in [a; b]$, avec $c < d$ et $\alpha \in [c; d]$, tels que

$$\forall t \in [c; d], f(t) - \frac{f(\alpha)}{2} \geq 0$$

ou encore

$$\forall t \in [c; d], f(t) \geq \frac{f(\alpha)}{2}$$

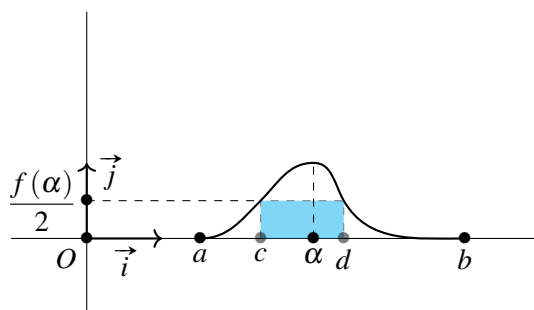
On a donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_c^d f(t) dt \geq \int_c^d \frac{f(\alpha)}{2} dt = \frac{f(\alpha)}{2} (d - c) > 0$$

D'après la relation de Chasles, on obtient alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \underbrace{\int_a^c f(t) dt}_{\geq 0} + \underbrace{\int_c^d f(t) dt}_{> 0} + \underbrace{\int_d^b f(t) dt}_{\geq 0} > 0$$

Par contraposée, on a bien montré que $\int_a^b f(t) dt = 0 \implies f$ est nulle sur $[a; b]$. □

FIGURE 23.4 – Si f , continue positive, est strictement positive en α , alors elle l'est aussi sur un voisinage de α .

Inégalité triangulaire

Propriété 23.2.15

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue. Alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Démonstration. Pour tout $t \in [a; b]$, on a

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

Par croissance de l'intégrale, et puisque $a \leq b$, on obtient

$$-\int_a^b |f(t)| dt = \int_a^b -|f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

ou encore

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

□

Remarque 23.2.16

Attention : il est ici primordial que $a \leq b$!

23.2.3 Sommes de Riemann**Propriété 23.2.17 – Somme de Riemann - rectangles à gauche**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue.

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \int_a^b f(t) dt$$

Remarque 23.2.18

Remarquons que $a_0 = a$, que $a_n = b$ et que

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$$

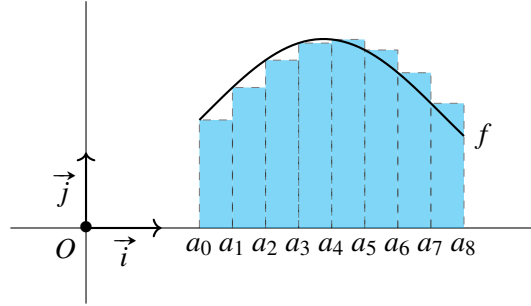


FIGURE 23.5 – Pour cette fonction positive, pour tout $k \in \llbracket 0; 7 \rrbracket$, $\frac{b-a}{n} f(a_k)$ est l'aire du rectangle bleu de base $[a_k; a_{k+1}]$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ et $I = \int_a^b f(t) dt$.

Nous allons traiter le cas où f est M -lipschitzienne, avec $M \in \mathbb{R}_+$. On suppose donc que

$$\forall x, y \in [a; b], |f(y) - f(x)| \leq M |y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt$$

et que, d'après Chasles :

$$I = \int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |S_n - I| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k) - f(t)) dt \right| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(t)| dt \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} M |a_k - t| dt \text{ car } f \text{ est } M\text{-lipschitzienne} \end{aligned}$$

Cependant, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a :

$$\forall t \in [a_k; a_{k+1}], |a_k - t| = t - a_k \leq a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 |S_n - I| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} M \frac{b-a}{n} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) M \frac{b-a}{n} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \\
 &= n \times M \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \\
 &= M \times \frac{(b-a)^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I$. □

On a aussi le résultat suivant, qui peut se déduire du précédent.

Propriété 23.2.19 – Somme de Riemann - rectangles à droite

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue.

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) = \int_a^b f(t) dt$$

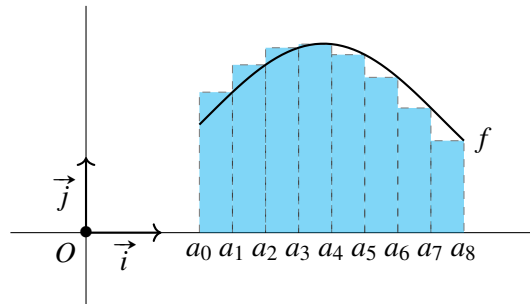


FIGURE 23.6 – Rectangles à droite

■ *Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned}
 \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \\
 &= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) - f(a_0) + f(a_n) \right) \\
 &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) - \frac{b-a}{n} f(a_0) + \frac{b-a}{n} f(a_n) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt
 \end{aligned}$$

□

Pour les deux exercices qui suivent, on admettra que si $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ est continue et admet F pour primitive, alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ (ce qui sera expliqué un peu plus loin avec le théorème fondamental de l'analyse).

Exercice 23.2.20

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{2k}{n}}$$

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{2k}{n}} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{a + k \frac{b-a}{n}}$$

avec $a = 1$ et $b = 3$. Puisque la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[1; 3]$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{2k}{n}} = \int_1^3 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{2}{3} (3^{\frac{3}{2}} - 1)$$

Exercice 23.2.21

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
 &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)
 \end{aligned}$$

avec $a = 0, b = 1$ et $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ continue sur $[0; 1]$. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

Remarque 23.2.22 : Un mot sur la méthode des trapèzes

Que ce soit par la gauche ou la droite, l'erreur commise en approchant une intégrale par une somme de Riemann est en $O\left(\frac{1}{n}\right)$, où n est le nombre de rectangles considérés.

On peut améliorer cette précision via la *méthode des trapèzes*, en montrant (sous les mêmes hypothèses que les résultats précédents) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$$

L'erreur commise est alors en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui est déjà plus efficace !

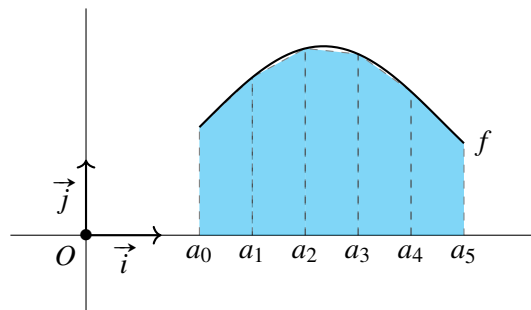


FIGURE 23.7 – Méthode des trapèzes, ces derniers remplaçant les rectangles. $\frac{b-a}{n} \times \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$ est l'aire du trapèze basé sur $[a_k; a_{k+1}]$. Avec 5 trapèzes, sur cet exemple, il semble bien que l'aire totale des trapèzes donne une meilleure approximation de $\int_a^b f(t) dt$ que par les sommes de Riemann.

23.3 Intégration et dérivation

23.3.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 23.3.1 – Théorème fondamental de l'analyse

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue. Soit $a \in I$. Alors

$$\begin{aligned} F &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Remarque 23.3.2

En particulier, f étant continue, F est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Démonstration. Il est clair que

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

Soit $c \in I$ et $x \in I \setminus \{c\}$, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et intéressons-nous au taux d'accroissement. Supposons d'abord que $x > c$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| &= \left| \frac{1}{x - c} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \right) - f(c) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt - \frac{1}{x - c} \int_c^x f(c) dt \right| \text{ d'après Chasles} \\ &= \frac{1}{|x - c|} \left| \int_c^x (f(t) - f(c)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x - c} \int_c^x |f(t) - f(c)| dt \text{ par inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

f étant continue en c , il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in I, |t - c| \leq \eta \implies |f(t) - f(c)| \leq \varepsilon$$

Supposons donc que $|x - c| \leq \eta$. Pour tout $t \in [c; x]$, on a alors

$$t - c = |t - c| \leq |x - c| \leq \eta$$

donc $|f(t) - f(c)| \leq \varepsilon$. Ainsi :

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq \frac{1}{x - c} \int_c^x \varepsilon dt = \frac{1}{x - c} (x - c) \varepsilon = \varepsilon$$

Si $x < c$, le raisonnement est similaire, en gardant le même η mais en étant prudent avec l'inégalité triangulaire. Si $|x - c| \leq \eta$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| &= \frac{1}{|x - c|} \left| \int_c^x (f(t) - f(c)) dt \right| \\ &= \frac{1}{c - x} \left| \int_x^c (f(t) - f(c)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{c - x} \int_x^c |f(t) - f(c)| dt \text{ par inégalité triangulaire avec } x < c \\ &\leq \frac{1}{c - x} \int_x^c \varepsilon dt \\ &\leq \frac{1}{c - x} (c - x) \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I \setminus \{c\}, |x - c| \leq \eta \implies \left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq \varepsilon$$

autrement dit que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$$

F est donc bien une primitive de f sur I , et on a vu que F s'annule en a . Il reste à montrer que F est la **seule** primitive de f s'annulant en a . Supposons que G soit une primitive de f s'annulant en a : F et G diffèrent d'une constante, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, F(x) = G(x) + k$. Avec $x = a$, on obtient $0 = 0 + k$ donc $k = 0$ et $F = G$. \square

Propriété 23.3.3

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction continue. Alors f admet une primitive^a sur I et pour tout $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

^a. Il y en a même une infinité.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ quelconque.

Le théorème fondamental de l'analyse assure que $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est une (la) primitive de f s'annulant en x_0 . D'après Chasles, pour tout $a, b \in I$, on a alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^b f(t) dt = -\int_{x_0}^a f(t) dt + \int_{x_0}^b f(t) dt = -F(a) + F(b)$$

□

Exercice 23.3.4

Étudier la fonction

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

On retrouve alors les résultats déjà vus sur le calcul d'intégrales : changement de variable, intégration par parties...

23.3.2 Parité et périodicité**Propriété 23.3.5 – Fonctions paires, fonctions impaires**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{F}([-a; a], \mathbb{R})$ continue.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$ et $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(t) dt = -\int_0^a f(t) dt$ et $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

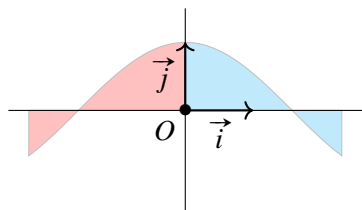


FIGURE 23.8 – Fonction paire

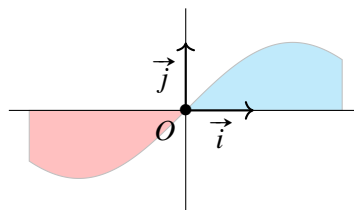


FIGURE 23.9 – Fonction impaire

Démonstration. Ces résultats peuvent être obtenus par le changement de variable $t \mapsto -t$, mais en voici une autre preuve. On se place dans le cas où f est impaire, l'autre cas étant laissé en exercice. Soit

$$\begin{aligned} F &: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

l'unique primitive de f qui s'annule en 0 (d'après le théorème fondamental de l'analyse). Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto F(x) - F(-x)$. φ est alors dérivable sur $[-a; a]$ et pour tout $x \in [-a; a]$:

$$\varphi'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0$$

puisque f est impaire. φ est donc constante, or $\varphi(0) = F(0) + F(0) = 0$ donc pour tout $x \in [-a; a]$, on a $F(x) = -F(-x)$. c'est-à-dire $\int_0^x f(t) dt = -\int_0^{-x} f(t) dt = \int_{-x}^0 f(t) dt$. Cela reste vrai, en particulier, pour $x = a$.

La seconde égalité est une conséquence directe de la relation de Chasles. □

Propriété 23.3.6

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue et T -périodique, avec $T \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

Démonstration. Posons $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, unique primitive de f s'annulant en 0, d'après le théorème de l'analyse. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi : x \mapsto F(x+T) - F(x)$.

φ est alors dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

par T -périodicité de f . φ est donc constante, or $\varphi(0) = F(T) - F(0) = \int_0^T f(t) dt$.

On a bien montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

□

23.3.3 Valeur moyenne d'une fonction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue.

On cherche une fonction constante, égale à $m \in \mathbb{R}$, dont l'intégrale sur $[a; b]$ vaut celle de f . Cela donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b m dt &= \int_a^b f(t) dt \iff m(b-a) = \int_a^b f(t) dt \\ &\iff m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

On aboutit alors à la notion de *valeur moyenne* :

Définition 23.3.7 – Valeur moyenne d'une fonction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ continue. La *valeur moyenne de f sur $[a; b]$* est le nombre

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

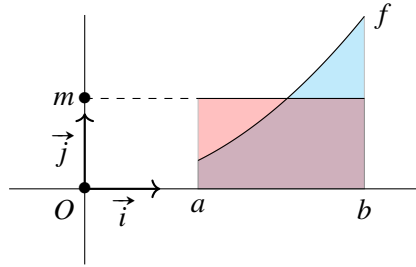


FIGURE 23.10 – L'aire en rouge et l'aire en bleu sont identiques.

23.3.4 Formules de Taylor

Théorème 23.3.8 – Égalité de Taylor avec reste intégral (non exigible)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Alors pour tout $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur n .

— Posons $n = 0$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ (f' est donc continue sur I). Pour tout $a, x \in I$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour $n = 0$.

— Supposons la formule vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{R})$ et $a, x \in I$.

L'idée consiste à intégrer $\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$ par parties. Cette intégrale est d'ailleurs bien définie puisque $f^{(n+1)}$ est par hypothèse continue sur I .

Pour tout $t \in I$, posons :

$$\begin{aligned} u(t) &= f^{(n+1)}(t) & v'(t) &= \frac{(x-t)^n}{n!} \\ u'(t) &= f^{(n+2)}(t) & v(t) &= \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur I , donc par hypothèse de récurrence et en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
 & f(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x - \int_a^x f^{(n+2)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} dt
 \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. □

Théorème 23.3.9 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Alors :

$$\forall a, x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

Démonstration. Soient $a, x \in I$.

— Supposons que $a \leq x$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\begin{aligned}
 \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| &= \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| \\
 &\leq \int_a^x \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \right| dt \text{ par inégalité triangulaire} \\
 &= \int_a^x \underbrace{\frac{|f^{(n+1)}(t)|}{n!}}_{\leq \frac{M}{n!}} \underbrace{(x-t)^n}_{\geq 0} dt \\
 &\leq \int_a^x \frac{M}{n!} (x-t)^n dt \text{ par croissance de l'intégrale} \\
 &= \frac{M}{n!} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^x \\
 &= \frac{M}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}
 \end{aligned}$$

On a pu utiliser l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale car $a \leq x$.

— Supposons que $x < a$. Le calcul devient :

$$\begin{aligned}
 \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| &= \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| \\
 &= \left| - \int_x^a \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| \\
 &= \left| \int_x^a \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| \\
 &\leq \int_x^a \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \right| dt \text{ par inégalité triangulaire} \\
 &= \int_x^a \underbrace{\frac{|f^{(n+1)}(t)|}{n!}}_{\leq \frac{M}{n!}} \underbrace{|x-t|^n}_{\geq 0} dt \\
 &\leq \int_x^a \frac{M}{n!} |x-t|^n dt \text{ par croissance de l'intégrale}
 \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [x; a]$, on a $x - t < 0$ donc :

$$\begin{aligned}
 \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| &\leq \int_x^a \frac{M}{n!} (t-x)^n dt \text{ par croissance de l'intégrale} \\
 &= \frac{M}{n!} \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} \right]_a^x \\
 &= \frac{M}{(n+1)!} (a-x)^{n+1} = \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}
 \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a bien l'inégalité voulue. □

Exercice 23.3.10

Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour montrer que

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Correction. La fonction $\varphi : x \mapsto e^x$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$, on a

$$|\varphi^{(n+1)}(x)| = |e^x| \leq e$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$, on a alors

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} |x-0|^{n+1}$$

ou encore

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Avec $x = 1$, on obtient donc

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e.$

23.4 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 23.4.1

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ continue. Pour tout $a, b \in I$, on définit l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ en posant

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f) dt$$

On retrouve alors certains des résultats précédents. Restent valables :

- La linéarité, la relation de Chasles.
- L'inégalité triangulaire.
- Le théorème fondamental de l'analyse.
- La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange.

23.5 Exercices

Exercice 23.5.1

Déterminer les limites des suites suivantes :

1.

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} e^{t^2} \cos\left(\frac{t}{n}\right) dt$$

2.

$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{1+nt} dt$$

3.

$$u_n = \int_0^1 t^n e^{\frac{t}{n}} dt$$

4.

$$u_n = \int_n^{2n} \frac{1}{1+t^2} \cos\left(\frac{t}{n}\right) dt$$

5.

$$u_n = \int_0^1 t \arctan(nt) dt$$

6.

$$u_n = \int_0^1 \sin^n(t) dt$$

Exercice 23.5.2

Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ continue. Montrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

Exercice 23.5.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Étudier le signe et le sens de variation de la suite (I_n) .
2. Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

4. Déterminer la limite de I_n puis un équivalent de I_n (on pourra utiliser la question 2)).

Exercice 23.5.4

Soit $f \in \mathcal{C}([0;2], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^2 f(t) dt = 2$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 23.5.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

1. Calculer I_0 .

2. Déterminer un lien entre I_n et I_{n+1} . En déduire I_n en fonction de n .

Exercice 23.5.6

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$e^\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice 23.5.7

Montrer que

$$-\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

Exercice 23.5.8

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 23.5.9

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(2n-k)}}$$

Exercice 23.5.10

Déterminer la limite des suites suivantes :

1.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{k/n}}{n}$$

2.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{\sqrt{n(2n+2k)}}$$

3.

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2n-k}$$

4.

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)}{n}$$

Exercice 23.5.11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

Déterminer^a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. On pourra poser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$.

a. Si vous souhaitez utiliser une somme de Riemann, la prudence est (comme toujours) de mise !

Exercice 23.5.12

1. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{nx^2 e^{-x} - x}{n+x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = I$.

Exercice 23.5.13

Montrer que

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 23.5.14

Dresser le tableau de variation de

$$F : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} dt$$

Correction. Pour la limite en $+\infty$, on pourra s'intéresser à $F(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$.

Exercice 23.5.15

Soit F la fonction définie par

$$F(0) = 0, F(1) = \ln 2 \text{ et } \forall x \in D =]0; 1[\cup]1; +\infty[, F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

1. Vérifier que F est bien définie sur \mathbb{R}_+ et que

$$\forall x \in D, \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln(2)$$

2. Montrer que : $\forall x \in]0; 1[, x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$ puis que $\forall x \in]1; +\infty[, x \ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$.
En déduire que F est continue sur \mathbb{R}_+ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
3. (a) Montrer que F est dérivable sur D et calculer $F'(x)$ pour $x \in D$.
(b) En déduire que F est dérivable sur \mathbb{R}_+ et que F' est continue sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 23.5.16

Étudier

$$f : x \mapsto \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t}) \, dt + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t}) \, dt$$

Chapitre 24

Séries numériques

24.1	Définitions	732
24.1.1	Notion de série numérique	732
24.1.2	Premiers exemples	735
24.2	Séries à termes positifs	737
24.2.1	Le cadre des séries à termes positifs	737
24.2.2	Comparaison par encadrement	738
24.2.3	Comparaison par domination	739
24.2.4	Comparaison par équivalence	739
24.2.5	Comparaison série-intégrale	740
24.2.6	Séries de Riemann	741
24.3	Convergence absolue	742
24.4	Exercices	743
24.5	DM conducteur	747

Dans son salon, le petit Martin joue avec ses cubes, qu'il empile les uns sur les autres. Le premier cube a une hauteur (en décimètres) de 1, le second une hauteur de $\frac{1}{2}$, et ainsi de suite : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le n -ième cube a une hauteur de $\frac{1}{n}$.

Disposant d'une infinité de cubes, Martin finira-t-il par crever le plafond ? Autrement dit, quel est le comportement asymptotique de la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$? Nous allons voir que $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ (et donc que Martin finira bien par dépasser le plafond, peu importe la hauteur de celui-ci).

Cependant, la surface apparente d'une pile de N cubes est définie par $T_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ et il se trouve que la suite (T_N) est alors convergente. Ainsi, bien que la hauteur de la pile de cube tende vers $+\infty$, la surface apparente reste bornée !

Les suites (S_N) et (T_N) ont donc un comportement bien différent. Mais elles présentent aussi un point commun : pour passer du terme de rang $N-1$ au terme de rang N , on ajoute un terme ($\frac{1}{N}$ dans le cas de (S_N) , $\frac{1}{N^2}$ pour (T_N)). Le terme ajouté étant positif, ces deux suites sont donc croissantes. De plus, dans les deux cas, le terme ajouté tend vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Ce qui explique le comportement asymptotique différent de ces deux suites, c'est la vitesse de convergence du terme ajouté vers 0 : $\left(\frac{1}{N}\right)$ tend vers 0 moins vite que $\left(\frac{1}{N^2}\right)$, qui converge vers 0 suffisamment vite pour compenser le fait qu'on « ajoute une infinité de termes ».

Les suites (S_N) et (T_N) sont des exemples de *séries* : leur étude fait l'objet de ce chapitre.

24.1 Définitions

24.1.1 Notion de série numérique

Définition 24.1.1 – Série numérique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On appelle *série de terme général* u_n la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

Cette série est notée $\sum u_n$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est la *somme partielle de rang N de la série* $\sum u_n$.

Remarque 24.1.2

- Ainsi, $\sum u_n$ désigne en réalité une **suite**, et pas une somme !
- Dans cette définition, la série commence au rang 0. Mais on peut très bien définir une série commençant à un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ quelconque : si $(u_n)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}}$ est une suite de complexes, la série de terme général u_n sera noté $\sum_{n \geq n_0} u_n$.
Les résultats qui suivent s'adaptent alors sans difficulté.

Exemple 24.1.3

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont les deux séries citées en introduction.

Une série étant un cas particulier de suite, on peut facilement définir la notion de convergence.

Définition 24.1.4 – Série convergente

Une série numérique $\sum u_n$ est dite *convergente* lorsque la suite de ses sommes partielles converge, c'est-à-dire lorsque la suite $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est alors appelée *somme de la série* $\sum u_n$ et on la note

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, le *reste d'ordre N de la série* $\sum u_n$ est alors

$$R_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

Une série numérique non convergente est dite *divergente*.

Remarque 24.1.5

- Le nombre $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, s'il existe, n'est donc pas une somme à proprement parler : c'est une limite !
- Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\left(\sum_{n=n_0}^N u_n\right)_{\substack{N \in \mathbb{N} \\ N \geq n_0}}$ converge. En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq n_0$, on a

$$\sum_{n=0}^N u_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n}_{\text{constante}} + \sum_{n=n_0}^N u_n$$

Exemple 24.1.6

Ce n'est pas encore prouvé, mais l'introduction indique que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente vers $+\infty$ et que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Propriété 24.1.7 – Linéarité de la somme

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Alors la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration. On passe aux sommes partielles. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, et par linéarité des sommes finies :

$$\sum_{n=0}^N (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^N u_n + \mu \sum_{n=0}^N v_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

puisque $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

La série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est donc bien convergente et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

□

Propriété 24.1.8 – Condition nécessaire de convergence

Soit $\sum u_n$ une série numérique.

Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ la somme partielle de rang N de la série $\sum u_n$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$S_N - S_{N-1} = \sum_{n=0}^N u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n = u_N$$

Or (S_N) et (S_{N-1}) convergent vers la même limite l . On en déduit que

$$u_N = S_N - S_{N-1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} l - l = 0$$

□

Remarque 24.1.9

Il s'agit bien d'une condition nécessaire, et pas **suffisante** ! Nous verrons par exemple que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, alors que

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Définition 24.1.10 – Divergence grossière

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ *diverge grossièrement*.

Exercice 24.1.11

La série $\sum n^2 \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right)$ est-elle convergente ?

24.1.2 Premiers exemples

Séries télescopiques

Propriété 24.1.12 –

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

La suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont alors de même nature : si l'une converge, l'autre aussi.

Dans le cas où (u_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$, on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = l - u_0$.

Démonstration. On passe aux sommes partielles. Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$$

qui converge si et seulement si (u_{N+1}) converge, ce qui revient à dire que (u_n) converge.

De plus, si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$, un passage à la limite donne directement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = l - u_0$$

□

Exercice 24.1.13

Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge et déterminer sa somme.

Séries géométriques

Définition 24.1.14 – Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. On appelle *série géométrique de raison q* la série $\sum q^n$.

Propriété 24.1.15 – Convergence des séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum q^n$ converge si et seulement $|q| < 1$, et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration. Si $|q| \geq 1$, la suite (q^n) ne converge pas vers 0 : la série $\sum q^n$ n'est donc pas convergente.

Supposons donc que $|q| < 1$ et passons aux sommes partielles. Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - q}$$

puisque (q^{N+1}) converge alors vers 0. On a donc bien montré que $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. □

Exemple 24.1.16

Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, la série $\sum \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Par contre, $\sum (-1)^n$ diverge puisque $|-1| = 1 \geq 1$.

Exercice 24.1.17

Étudier la convergence et, le cas échéant, préciser la somme de la série

$$\sum \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^n} \right)$$

Séries exponentielles**Propriété 24.1.18 – Séries exponentielles**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Démonstration. Posons

$$\begin{array}{ccc} f & : & [0; 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{tz} \end{array}$$

f est de classe \mathcal{C}^∞ et pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; 1]$, on a $f^{(N)}(t) = z^N e^{tz}$. Nous allons appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f : pour cela, il nous faut majorer $|f^{(N+1)}|$ sur $[0; 1]$. Or, en notant $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$, et pour tout $t \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} |f^{(N+1)}(t)| &= |z|^{N+1} |e^{tz}| \\ &= |z|^{N+1} |e^{t(a+ib)}| \\ &= |z|^{N+1} e^{at} \\ &\leq |z|^{N+1} e^{|a|} \end{aligned}$$

En effet, si $a \geq 0$, alors $t \mapsto e^{at}$ est croissante et $e^{at} \leq e^a$. Sinon, $e^{at} \leq a^0 = 1 \leq e^{|a|}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| f(1) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (1-0)^n \right| \leq \frac{|z|^{N+1} e^{|a|}}{(N+1)!} (1-0)^{N+1}$$

ou encore

$$\left| e^z - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} e^{|a|}$$

Enfin, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} = 0$. En effet, en notant k_0 le plus petit entier naturel tel que $k_0 > |z|$, et avec $N \geq k_0$:

$$\begin{aligned} \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} &= \prod_{k=1}^{N+1} \frac{|z|}{k} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{k_0} \frac{|z|}{k} \right) \left(\prod_{k=k_0+1}^{N+1} \frac{|z|}{k} \right) \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^{k_0} \frac{|z|}{k} \right) \times \left(\frac{|z|}{k_0} \right)^{N-k_0+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

puisque $\left| \frac{|z|}{k_0} \right| < 1$.

On a donc bien $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} = e^z$. □

Exercice 24.1.19

Montrer que $\sum \frac{(3+i)^{n+1}}{(n+1)!}$ converge et déterminer sa somme.

24.2 Séries à termes positifs

24.2.1 Le cadre des séries à termes positifs

Au delà des exemples de séries vus ci-dessus, il serait intéressant d'avoir des outils plus généraux pour étudier la convergence d'une série. Les séries à termes positifs offrent un cadre des plus pratiques pour cela : la suite des sommes partielles est alors croissante, et nous pouvons alors utiliser le théorème de la limite monotone.

Définition 24.2.1 – Série à termes positif

On dit qu'une série $\sum u_n$ est à termes positifs si (u_n) est une suite de réels positifs.

Propriété 24.2.2

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors la suite $(S_N) = \left(\sum_{n=0}^N u_n \right)$ de ses sommes partielles est croissante.

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$S_{N+1} - S_N = \sum_{n=0}^{N+1} u_n - \sum_{n=0}^N u_n = u_{N+1} \geq 0$$

□

Le théorème de la limite monotone donne alors immédiatement :

Propriété 24.2.3

Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
Dans le cas contraire, la série diverge vers $+\infty$.

Remarque 24.2.4

- Ce résultat peut permettre de montrer qu'une série converge, mais il ne donne pas la valeur de sa somme.
- Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

24.2.2 Comparaison par encadrement**Propriété 24.2.5 – Comparaison par encadrement**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration. Supposons que $\sum v_n$ converge. La suite $\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$ est donc majorée par un réel M . En sommant l'inégalité de l'hypothèse, on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n \leq M$$

La série à termes positifs $\sum u_n$ voit donc sa suite des sommes partielles majorée : cette série est convergente, ce qui prouve le premier point. L'inégalité est obtenue par passage à la limite.

Le second point est la contraposée du premier. □

Remarque 24.2.6

D'après la remarque 24.1.5, ce résultat reste vrai si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang (et pas forcément à partir du rang 0).

Exercice 24.2.7

Sachant que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge (voir l'exercice 24.1.13), montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

24.2.3 Comparaison par domination

Propriété 24.2.8 – Comparaison par domination

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$. Alors :

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration. Ces séries étant à termes positifs, et puisque $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand :

$$0 \leq u_n \leq Mv_n$$

Or, $\sum v_n$ converge donc, par linéarité, $\sum Mv_n$ converge. D'après 24.2.5, $\sum u_n$ est alors convergente.

Le second point est la contraposée du premier. □

Remarque 24.2.9

- Si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, alors $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ et le résultat précédent s'applique bien.
- D'après la remarque 24.1.5, ce résultat reste vrai si (u_n) et (v_n) sont positives à partir d'un certain rang.

Exercice 24.2.10

Montrer que $\sum \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n^2 + 1}$ converge.

24.2.4 Comparaison par équivalence

Propriété 24.2.11 – Comparaison par équivalence

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature : si l'une converge, l'autre aussi ^a

a. Ce qui ne veut pas dire qu'elles ont la même somme !

Démonstration. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ et $v_n = O_{n \rightarrow +\infty}(u_n)$: il ne reste plus qu'à appliquer la propriété 24.2.8. □

Remarque 24.2.12

De nouveau, d'après la remarque 24.1.5, ce résultat reste vrai si (u_n) et (v_n) sont positives à partir d'un certain rang.

Exercice 24.2.13

Étudier la convergence de $\sum \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$.

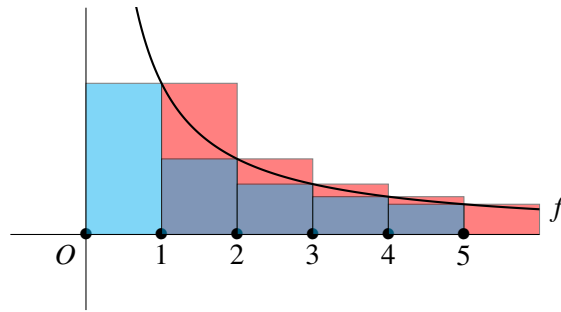


FIGURE 24.1 – Comparaison série-intégrale. L'aire en bleu représente $\sum_{n=1}^N f(n)$ (avec $N = 5$ sur ce dessin). Cette aire vaut

donc $f(1) + \sum_{n=2}^N f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(t) dt$. L'aire rouge est la même que l'aire en bleu, mais on peut aussi la découper de cette façon : $\sum_{n=1}^N f(n) = \sum_{n=1}^{N-1} f(n) + f(N) \geq \int_1^N f(t) dt + f(N)$.

24.2.5 Comparaison série-intégrale

Propriété 24.2.14 – Comparaison série intégrale (à savoir refaire !)

Soit $f :]0; +\infty[$ une fonction continue, positive et décroissante.

Alors la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ et la suite $\left(\int_1^N f(t) dt \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ sont de même nature.

De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^N f(t) dt + f(N) \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(t) dt$$

Démonstration. f étant décroissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [n; n+1], f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt = f(n)$$

En sommant et par la relation de Chasles, on obtient alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \leq \int_1^N f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^N f(n) - f(1) \leq \int_1^N f(t) dt \leq \sum_{n=1}^N f(n) - f(N)$$

ce qui donne bien

$$\int_1^N f(t) dt + f(N) \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(t) dt$$

De plus, si $\left(\int_1^N f(t) dt\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est majorée et il en est de même pour la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} f(n)$: cette dernière est convergente.

Au contraire, si $\left(\int_1^N f(t) dt\right)_{N \in \mathbb{N}}$ diverge, alors en tant que suite croissante (f étant positive) elle tend vers $+\infty$. L'inégalité de gauche donne alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N f(u_n) = +\infty$: $\sum_{n \geq 1} f(u_n)$ diverge. \square

24.2.6 Séries de Riemann

Définition 24.2.15 – Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle *série de Riemann de paramètre α* la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Théorème 24.2.16 – Convergence des séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Si $\alpha < 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ne converge pas vers 0 et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement. Dans la suite, on suppose donc que $\alpha > 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est alors continue, positive et décroissante sur $]0; +\infty[$. Par comparaison série-intégrale, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et la suite $\left(\int_1^N \frac{1}{t^\alpha} dt\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ sont donc de même nature.

— Supposons que $\alpha \neq 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_1^N \frac{1}{t^\alpha} dt &= \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^N \\ &= \frac{N^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

qui converge lorsque N tend vers $+\infty$ si et seulement si $1 - \alpha < 0$ c'est-à-dire $1 < \alpha$.

— Pour $\alpha = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^N \frac{1}{t} dt &= \int_1^N \frac{1}{t} dt \\ &= [\ln(t)]_1^N \\ &= \ln(N) \end{aligned}$$

et cette quantité diverge lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Conclusion : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. \square

Exemple 24.2.17

En particulier, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Cette série s'appelle la *série harmonique*.

Par contre, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Exercice 24.2.18

Étudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{n}$

2. $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

24.3 Convergence absolue

Définition 24.3.1

Une série numérique $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si $\sum |u_n|$ converge.

Dans ce cas, on dit aussi que la suite (u_n) est *sommable*.

Propriété 24.3.2

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si cette série converge absolument, alors elle converge, et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration. On suppose que $\sum |u_n|$ converge.

— Supposons tout d'abord que la série $\sum u_n$ est à termes réels. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \geq 0 \\ -u_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.

Puisque $\sum |u_n|$ converge, les deux séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$u_n = u_n^+ - u_n^-$: par linéarité, $\sum u_n$ converge.

— Passons maintenant au cas plus général d'une série à termes complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$. Par comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum |\operatorname{Re}(u_n)|$ et $\sum |\operatorname{Im}(u_n)|$ sont donc

convergentes. D'après le premier cas, il en est de même pour $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$. Finalement, par linéarité,

$\sum u_n = \sum (\operatorname{Re}(u_n) + i\operatorname{Im}(u_n))$ converge.

Enfin, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et par inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=0}^N |u_n|$$

et un passage à la limite couplé avec la continuité de $x \mapsto |x|$ donne

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

□

Attention, la réciproque est fautive : une série convergente n'est pas forcément absolument convergente ! L'exercice suivant donne un contre-exemple.

Exercice 24.3.3 – Série harmonique alternée

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas absolument convergente.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$.

2. Montrer que les suites $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

De la comparaison par domination 24.2.8, on tire directement la propriété suivante :

Propriété 24.3.4

Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs. On suppose que $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Démonstration. En effet, le rapport $\left| \frac{u_n}{v_n} \right|$ est borné donc $|u_n| = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

□

24.4 Exercices

Exercice 24.4.1

Montrer que la série $\sum \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ est convergente et déterminer sa somme.

Exercice 24.4.2

Étudier la convergence des séries suivantes :

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $\sum \frac{3^n}{1+3^n}$ | 9. $\sum (e^{1/n^2} - 1)$ |
| 2. $\sum \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ | 10. $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \right)$ |
| 3. $\sum \sqrt{3n+2} - \sqrt{2n+1}$ | 11. $\sum \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right)^n$ |
| 4. $\sum \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$ | 12. $\sum e^{-n}$ |
| 5. $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ | 13. $\sum e^{-\sqrt{n}}$ |
| 6. $\sum \frac{1+n\sqrt{n}}{n^2}$ | 14. $\sum \frac{1}{n!}$ |
| 7. $\sum \frac{1}{n^{1/4}}$ | 15. $\sum \frac{1}{\sqrt{n!}}$ |
| 8. $\sum (e^{1/n} - 1)$ | |

Exercice 24.4.3

Soit S la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n-1}$ et notons (S_N) la suite des sommes partielles de S .

1. Montrer que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la série S converge.

Exercice 24.4.4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le but est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série de terme général $u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n^\alpha}$ converge.

1. Montrer que

$$\int_0^n \sqrt{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x} dx$$

2. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$. Conclure.

Exercice 24.4.5

Soit p un entier naturel fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

1. Montrer que si $p = 0$ ou $p = 1$, la série de terme général u_n diverge.
2. On suppose dans toute la suite que $p \geq 2$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.
 - (b) En déduire, par récurrence sur n , que

$$\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1})$$

- (c) Déterminer un équivalent simple de u_n en $+\infty$. En déduire la convergence de la série de terme général u_n et préciser la valeur de sa somme.

Exercice 24.4.6

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge et que $\sum v_n$ diverge. Que dire de $\sum u_n + v_n$?
2. Même question lorsque les deux séries divergent.

Exercice 24.4.7

Montrer que les séries de termes généraux $\frac{\cos(n)}{2^n}$ et $\frac{\sin(n)}{2^n}$ sont convergentes et calculer leur somme.

Exercice 24.4.8 – Série harmonique 1

On considère la série $\sum \frac{1}{n}$, appelée **série harmonique**. On pose donc $\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite (S_N) est croissante. On note l la limite de (S_N) .
2. Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, S_{2N} - S_N \geq \frac{1}{2}$.
3. Supposer que l est un réel fini et aboutir à une contradiction. Que peut-on en déduire ?

Exercice 24.4.9 – Série harmonique 2

On reprend les notations de l'exercice précédent.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N - 1 + \frac{1}{N+1} \leq \ln(N+1) \leq S_N$.
3. En déduire un équivalent de (S_N) .

Exercice 24.4.10

1. Calculer, pour $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)}$. On pourra montrer que $\frac{1}{n(n+1)}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ où a et b sont à déterminer.
2. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 24.4.11

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente.

Exercice 24.4.12

En comparant à une série géométrique, montrer $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n2^n}$ est une série convergente.

Exercice 24.4.13

On considère la série $\sum \frac{1}{n!}$, ainsi que les suites S et S' définies par

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \text{ et } S'_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} + \frac{1}{N!}.$$

Montrer que S et S' sont deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire sur la série $\sum \frac{1}{n!}$? D'après le cours, que vaut sa somme?

Exercice 24.4.14

On considère la série $S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et (S_N) la suite de ses sommes partielles.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2 \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \right).$$

2. En déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, 2 \left(\sqrt{N+1} - 1 \right) \leq S_N \leq 2\sqrt{N}.$$

3. Qu'en déduit-on sur la série S ?

Exercice 24.4.15

Via une comparaison série/intégrale, étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln(n)}$.

Exercice 24.4.16

1. Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et décroissante. Montrer que

$$\sum f(n) \text{ converge, si et seulement si, } \left(\int_0^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

2. Soit maintenant $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et décroissante telle que $\sum f(n)$ diverge. On pose $I_n = \int_0^n f(t) dt$.

(a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + f(n+1) \leq \sum_{k=0}^n n f(k) \leq f(0) + I_n$.

(b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et vérifier que $I_n \sim \sum_{k=0}^n n f(k)$.

Exercice 24.4.17

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{(1+2+3+\dots+n)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 24.4.18

1. Soit $\beta > 1$. Avec une comparaison à une série de Riemann, montrer que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^\beta}$ est convergente.
2. Considérons la série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que pour $\alpha \leq 0$, cette série diverge.
 - (b) Pour $\alpha > 0$, la série est-elle convergente ?
 - (c) Donner une CNS de convergence pour cette série.

Exercice 24.4.19

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de $\sum_{n \geq 1} u_n$ de terme général $u_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ est convergente.
2. Est-elle absolument convergente ?
3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ de terme général $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ est divergente.
4. Vérifier cependant que $u_n \sim v_n$.

Exercice 24.4.20

Montrer que la série de $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^3}$ est convergente.

24.5 DM conducteur**Exercice 69 – Étudier la convergence de séries**

Étudier la convergence des séries suivantes :

$$1. \sum \frac{1}{n^2 + 1} \quad \text{PTS } 1$$

$$2. \sum \frac{\cos(\frac{1}{n}) - 1}{n} \quad \text{PTS } 1$$

$$3. \sum \frac{e^n}{1 + e^n} \quad \text{PTS } 1$$

$$4. \sum (\cos(n) - \cos(n+1)) \quad \text{PTS } 1$$

$$5. \sum \left(\frac{\sin(n)}{n} - \frac{\sin(n+3)}{n+3} \right) \quad \text{PTS } 1.5$$

Correction. 1. $\frac{1}{n^2 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente. La série $\sum \frac{1}{n^2 + 1}$ est donc convergente.

2. On a

donc

$$\frac{\cos(\frac{1}{n}) - 1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{-1}{n^2}}{n} = \frac{-1}{n^3}$$

$$- \frac{\cos(\frac{1}{n}) - 1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$$

Cependant, $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série à termes positifs convergente (c'est une série de Riemann de paramètre $3 > 1$).

Ainsi $\sum -\frac{\cos(\frac{1}{n}) - 1}{n}$ converge donc $\sum \frac{\cos(\frac{1}{n}) - 1}{n}$ converge aussi par linéarité.

3. On a

$$\frac{e^n}{1+e^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{e^n} = 1$$

donc $\sum \frac{e^n}{1+e^n}$ diverge grossièrement.

4. $\sum (\cos(n+1) - \cos(n))$ est une série télescopique divergente car la suite $(\cos(n))$ diverge. Ainsi $\sum \cos(n) - \cos(n+1)$ diverge par linéarité.

5. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ avec $N \geq 4$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\sin(n)}{n} - \frac{\sin(n+3)}{n+3} \right) &= \sum_{n=1}^N \frac{\sin(n)}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{\sin(n+3)}{n+3} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\sin(n)}{n} - \sum_{n=4}^{N+4} \frac{\sin(n)}{n} \\ &= \sum_{n=1}^3 \frac{\sin(n)}{n} + \sum_{n=4}^N \frac{\sin(n)}{n} \\ &\quad - \left(\sum_{n=4}^N \frac{\sin(n)}{n} + \sum_{n=N+1}^{N+4} \frac{\sin(n)}{n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^3 \frac{\sin(n)}{n} \\ &\quad - \frac{\sin(N+1)}{N+1} - \frac{\sin(N+2)}{N+2} \\ &\quad - \frac{\sin(N+3)}{N+3} - \frac{\sin(N+4)}{N+4} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^3 \frac{\sin(n)}{n} \end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum \left(\frac{\sin(n)}{n} - \frac{\sin(n+3)}{n+3} \right)$ converge.

On peut aussi remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(n)}{n} - \frac{\sin(n+3)}{n+3} &= \frac{\sin(n)}{n} - \frac{\sin(n+1)}{n+1} \\ &\quad + \frac{\sin(n+1)}{n+1} - \frac{\sin(n+2)}{n+2} \\ &\quad + \frac{\sin(n+2)}{n+2} - \frac{\sin(n+3)}{n+3} \end{aligned}$$

On se ramène ainsi à la somme de trois séries télescopiques convergentes (puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$) et on aboutit alors à la même conclusion.

Exercice 70 – Intégration

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\arctan(t)} dt \end{aligned}$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Étudier la parité de f . *On pourra utiliser le changement de variable $t \mapsto -t$.*
3. (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
 (b) Montrer que f est croissante sur \mathbb{R}_+^* . *On pourra étudier la fonction $x \mapsto 2 \arctan(x) - \arctan(2x)$.*
 (c) Montrer que f' admet une limite finie en 0 et la déterminer.

Dans la suite, on se focalise sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. Montrer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{x}{\arctan(2x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\arctan(x)}$$

5. En déduire la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

6. Montrer que

$$\forall t \in]0; 1[, 0 < t - t^2 \leq \arctan(t) \leq t + t^2$$

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange avec la fonction \arctan sur l'intervalle $[0; 1]$.

7. En déduire que

$$\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[, \int_x^{2x} \frac{1}{t+t^2} dt \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t-t^2} dt$$

8. Montrer que f admet une limite finie en 0, que l'on déterminera.
9. Pour finir, justifier que f se prolonge en une fonction \tilde{f} de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser $\tilde{f}'(0)$.

Correction. 1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

- Si $x > 0$, alors $x < 2x$ et $t \mapsto \frac{1}{\arctan(t)}$ est continue sur $[x; 2x]$: $f(x)$ est alors bien défini.
 - Si $x < 0$, alors $2x < x$ et $t \mapsto \frac{1}{\arctan(t)}$ est continue sur $[2x; x]$: $f(x)$ est alors bien défini.
- f est donc bien définie sur \mathbb{R}^* .

2. Soit $x \in \text{set } \mathbb{R}^*$. La fonction $\varphi : t \mapsto -t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , donc sur $[x; 2x]$ (si $x > 0$) ou $[2x; x]$ (si $x < 0$), ce

qui justifie le changement de variable à venir. On a alors :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\arctan(t)} dt \\
 &= \int_{\varphi(-x)}^{\varphi(-2x)} \frac{1}{\arctan(t)} dt \\
 &= \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\arctan(\varphi(t))} \varphi'(t) dt \\
 &= \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\arctan(-t)} \times (-1) dt \\
 &= \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{-\arctan(t)} \times (-1) dt \\
 &= \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\arctan(t)} dt \\
 &= f(-x)
 \end{aligned}$$

f est donc paire.

3. (a) Soit $\psi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{\arctan(t)}$. ψ est continue sur $] -\infty; 0[$ (respectivement sur $] 0; +\infty[$) donc (d'après le théorème fondamental de l'analyse) admet une primitive F_1 (respectivement F_2) sur $] -\infty; 0[$ (respectivement $] 0; +\infty[$).

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors :

$$f(x) = F_2(2x) - F_2(x)$$

or $x \mapsto 2x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , et F_2 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2F_2'(2x) - F_2'(x) \\
 &= \frac{2}{\arctan(2x)} - \frac{1}{\arctan(x)}
 \end{aligned}$$

De la même façon, avec F_1 , on montre que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_-^* et que la formule précédente reste vraie. Finalement, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{2}{\arctan(2x)} - \frac{1}{\arctan(x)}$$

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'(x) = \frac{2 \arctan(x) - \arctan(2x)}{\arctan(2x) \arctan(x)}$$

Puisque $\arctan(2x) \arctan(x) > 0$ pour tout $x > 0$, il suffit d'étudier le signe de $g : x \mapsto 2 \arctan(x) - \arctan(2x)$ sur \mathbb{R}_+ .

g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+(2x)^2} \\
 &= 2 \times \frac{1+4x^2-1-x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)} \\
 &= \frac{6x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $g'(x) > 0$ pour tout $x > 0$: g est donc strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Or $g(0) = 0$ et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 2 \arctan(x) - \arctan(2x) > 0$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) > 0$ et f est donc (strictement) croissante sur \mathbb{R}_+^* (et par parité, (strictement) décroissante sur \mathbb{R}_-^*).

(c) On peut utiliser le développement limité de \arctan en 0 :

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} 2 \arctan(x) - \arctan(2x) &= 2 \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right) \\ &\quad - \left(2x - \frac{1}{3}(2x)^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right) \\ &= 2x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \arctan(x) - \arctan(2x)}{\arctan(2x) \arctan(x)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x^3}{2x \times x} = x \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$.

4. Soit $x \in]0; +\infty[$. Alors, pour tout $t \in]x; 2x[$, on a par croissante de \arctan :

$$0 < \arctan(x) \leq \arctan(t) \leq \arctan(2x)$$

donc

$$\frac{1}{\arctan(2x)} \leq \frac{1}{\arctan(t)} \leq \frac{1}{\arctan(x)}$$

puis en intégrant entre x et $2x$ (sachant ici que $x \leq 2x$ puisque $x > 0$) :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\arctan(2x)} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\arctan(t)} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\arctan(x)} dt$$

ou encore

$$(2x - x) \times \frac{1}{\arctan(2x)} \leq f(x) \leq (2x - x) \times \frac{1}{\arctan(x)}$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{\arctan(2x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\arctan(x)}$$

5. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$. On a donc

$$\frac{x}{\arctan(2x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2x}{\pi} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\arctan(x)}$$

Par encadrement, on a donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

6. Attention : dans l'énoncé original, t variait dans $[0; 1]$. Cependant, pour $t = 0$ ou $t = 1$, on a $t - t^2 = 0 \dots$ arctan est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0; 1]$ et pour tout $t \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned}\arctan'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \\ \arctan''(t) &= \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\end{aligned}$$

et donc

$$|\arctan''(t)| = \frac{2t}{(1+t^2)^2} \leq 2$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a alors :

$$\forall a, t \in [0; 1], \left| \arctan(t) - \left(\arctan(a) + \frac{1}{1+a^2}(t-a) \right) \right| \leq \frac{2}{2!} |t-a|^2$$

et avec $a = 0$, on obtient, pour tout $t \in [0; 1]$:

$$|\arctan(t) - t| \leq t^2$$

ou encore

$$-t^2 \leq \arctan(t) - t \leq t^2$$

ou enfin

$$t - t^2 \leq \arctan(t) \leq t + t^2$$

En particulier, si $t \in]0; 1[$, on a $t - t^2 > 0$ et

$$0 < t - t^2 \leq \arctan(t) \leq t + t^2$$

7. Soit $x \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[$. Pour tout $t \in [x; 2x]$, on a alors $t \in]0; 1[$ donc d'après la question précédente et en passant à l'inverse :

$$\frac{1}{t+t^2} \leq \frac{1}{\arctan(t)} \leq \frac{1}{t-t^2}$$

et par croissance de l'intégrale :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+t^2} dt \leq f(t) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t-t^2} dt$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{1}{t+t^2} dt &= \int_x^{2x} \frac{1}{t(1+t)} dt \\ &= \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= [\ln(t) - \ln(1+t)]_x^{2x} \\ &= \left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) \right]_x^{2x} \\ &= \ln\left(\frac{2x}{1+2x}\right) - \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2x}{1+2x} \times \frac{1+x}{x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2(1+x)}{1+2x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(2)\end{aligned}$$

De la même façon, on montre que $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{1}{t-t^2} dt = \ln(2)$, ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(2)$$

9. La fonction \tilde{f} suivante prolonge f par continuité sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \ln(2) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

\tilde{f} est donc continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* (puisque f l'est).

De plus, d'après la question 3, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}'(x) = 0$. D'après le prolongement de la dérivée, \tilde{f} est alors de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $\tilde{f}'(0) = 0$.

Exercice 71 – Séries et suites

On définit une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n(2u_n^2 + u_n - u_{n-1} + 2)}{2(u_n^2 + 1)}$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n - u_{n-1})}{2(u_n^2 + 1)}$$

PTS 1

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2} |u_n - u_{n-1}|$$

PTS 0.5 et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n} |u_1 - u_0|$$

PTS 1

3. En déduire que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi. **PTS 1.5**

Correction. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n(2u_n^2 + u_n - u_{n-1} + 2)}{2(u_n^2 + 1)} - u_n \\ &= u_n \left(\frac{2u_n^2 + u_n - u_{n-1} + 2}{2(u_n^2 + 1)} - 1 \right) \\ &= u_n \frac{2u_n^2 + u_n - u_{n-1} + 2 - 2u_n^2 - 2}{2(u_n^2 + 1)} \\ &= u_n \times \frac{u_n - u_{n-1}}{2(u_n^2 + 1)} \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= \left| \frac{u_n}{2(u_n^2 + 1)} (u_n - u_{n-1}) \right| \\ &= \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{|u_n|}{u_n^2 + 1}}_{\leq 1} |u_n - u_{n-1}| \\ &\leq \frac{1}{2} |u_n - u_{n-1}| \end{aligned}$$

Montrons maintenant par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n} |u_1 - u_0|$$

— C'est trivial pour $n = 0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n} |u_1 - u_0|$. Alors :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} |u_1 - u_0| = \frac{1}{2^{n+1}} |u_1 - u_0|$$

ce qui achève la récurrence.

3. $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente (sa raison est $\frac{1}{2}$ et $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$). Par linéarité, $\sum \frac{1}{2^n} |u_1 - u_0|$ est alors convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ est alors convergente.

Ainsi, $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument donc converge. Il s'agit donc d'une série **télescopique** convergente : la suite (u_n) est donc convergente.

Exercice 72

1. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\frac{k}{n} + 1}}{k}$$

2. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi \tan\left(\frac{\pi k}{4n}\right)}{4n \tan^2\left(\frac{\pi k}{4n}\right) + 4n}$$

Correction. 1. Une jolie division par 0 dans l'énoncé original ! La vraie somme est $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\frac{k}{n} + 1}}{k}$ (ou $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{\frac{k}{n} + 1}}{k}$, qui mènera au même résultat).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\frac{k}{n} + 1}}{k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\frac{k}{n} + 1}}{\frac{k}{n}} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{x} \end{cases}$$

Cependant, on ne peut pas passer à la limite via une somme de Riemann : f n'est pas continue sur $[0; 1]$ (elle l'est sur $]0; 1]$).

En fait, il y a beaucoup plus simple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\frac{k}{n} + 1}}{k} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

puisque la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est une série à termes positifs divergente. Finalement, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\frac{k}{n} + 1}}{k} = +\infty$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)}{4n \tan^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right) + 4n} &= \frac{\pi}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right) + 1} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{\pi}{4} \\ f : x \mapsto \frac{\tan(x)}{\tan^2(x) + 1} \end{cases}$$

Cette fois, f est bien continue sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc la limite cherchée est $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(t)}{\tan^2(t) + 1} dt$ avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(t)}{\tan^2(t) + 1} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(t)}{\frac{1}{\cos^2(t)}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t) \sin(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Chapitre 25

Matrices et applications linéaires

25.1	Matrices de vecteurs dans une base donnée	758
25.1.1	Matrices d'un vecteur dans une base donnée	758
25.1.2	Matrices d'une famille de vecteurs dans une base donnée	762
25.2	Matrices d'une application linéaire dans des bases données	762
25.2.1	Définition	762
25.2.2	Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$	765
25.2.3	Matrice d'une rotation, d'une homothétie	767
25.3	Utilisations pratiques d'une matrice d'application linéaire	767
25.3.1	Calcul d'images et composition	767
25.3.2	Noyau, image et rang d'une matrice	771
25.4	Changement de bases	776
25.4.1	Matrice de passage d'une base à une autre	776
25.4.2	Formule de changement de bases pour une application linéaire	777
25.4.3	Matrices semblables	778
25.5	Systèmes et matrices	780
25.6	Exercices	781

25.1 Matrices de vecteurs dans une base donnée

25.1.1 Matrices d'un vecteur dans une base donnée

Définition

Définition 25.1.1 – Matrice d'un vecteur dans une base

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n , \mathcal{B} une base de E et $x \in E$.

Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) le n -uplet des coordonnées de x dans la base \mathcal{B} .

On appelle **matrice des coordonnées de x dans la base \mathcal{B}** (ou **matrice de x dans \mathcal{B}**) la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Remarque 25.1.2

- Il ne s'agit finalement que d'une réécriture sous la forme d'une matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Quand \mathcal{B} est la base canonique de E , pour tout $x \in E$, on dit que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est la matrice **canoniquement associée à x** .

Exemple 25.1.3

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ la base canonique de E et $x = (3, -5, 2)$.

Alors $x = 3 \cdot (1, 0, 0) + (-5) \cdot (0, 1, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1)$ donc x a pour coordonnées $(3, -5, 2)$ dans la base \mathcal{B} , ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.1.4

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$.

1. Montrer que \mathcal{B} est une base de E .
2. Soit $x = (3, -5, 2)$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Correction. 1. E est de dimension 3 et \mathcal{B} est formée de 3 vecteurs : pour montrer que \mathcal{B} est une base de E , il suffit donc de prouver que \mathcal{B} est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \cdot (0, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (1, 0, 1) + \lambda_3 (1, 1, 0) = (0, 0, 0)$. Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned}
 (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0) &\iff \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
 \end{aligned}$$

donc \mathcal{B} est libre et est une base de E .

2. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} . On a donc

$$\begin{aligned}
 x_1 \cdot (0, 1, 1) + x_2 \cdot (1, 0, 1) + x_3 \cdot (1, 1, 0) = x &\iff (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2) = (3, -5, 2) \\
 &\iff \begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = -5 \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ -x_2 + x_3 = -7 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ -x_2 + x_3 = -7 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ 2x_3 = -4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 = -7 \\ x_2 = 7 - x_3 = 9 \\ x_3 = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc x a pour coordonnées $(-7, 9, -2)$ dans la base \mathcal{B} , ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.1.5

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, 1 + X, 1 + X^2)$.

1. Montrer que \mathcal{B} est une base de E .
2. Soit $P = 1 + 3X - X^2$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$.

Correction. 1. $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E) = 3$ donc il suffit de montrer que \mathcal{B} est génératrice de E pour montrer que \mathcal{B} est une base de E . Or :

$$\begin{aligned}\text{Vect}(1, 1+X, 1+X^2) &= \text{Vect}(1, X, X^2) \quad (c_2 \leftarrow c_2 - c_1, c_3 \leftarrow c_3 - c_1) \\ &= \mathbb{R}_2[X] = E\end{aligned}$$

donc \mathcal{B} est bien une base de E .

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées de P dans la base \mathcal{B} . Alors :

$$\begin{aligned}a \cdot 1 + b \cdot (1+X) + c \cdot (1+X^2) &= P \iff a + b + c + bX + cX^2 = 1 + 3X - X^2 \\ &\iff \begin{cases} a + b + c = 1 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 - b - c = -1 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

donc P a pour coordonnées $(-1, 3, -1)$ dans la base \mathcal{B} , ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Isomorphisme entre E et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

La définition 25.1.1 conduit au théorème suivant :

Théorème 25.1.6 – Isomorphisme entre E et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n . Soit \mathcal{B} une base de E . Alors l'application

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}} &: E \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Montrons que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ est une application linéaire. Soient $x, y \in E$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées respectives de x et y dans \mathcal{B} . Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

On a

$$\begin{aligned}\lambda x + \mu y &= \lambda \sum_{i=1}^n x_i e_i + \mu \sum_{i=1}^n y_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) e_i\end{aligned}$$

donc $\lambda x + \mu y$ a pour coordonnées $(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$ dans la base \mathcal{B} , ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + \mu y) &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}(E, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.

Montrons alors que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ est bijective. Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $x \in E$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = C \iff x = \sum_{j=1}^n c_j e_j$$

donc $\sum_{j=1}^n c_j e_j$ est l'unique antécédent de C par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$, qui est bien bijective. □

Exemple 25.1.7

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 4 et \mathcal{B} une base de E .

Soit $x \in E$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $y \in E$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix}$. x et y existent et sont uniques puisque

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme.

De plus, par linéarité de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(4 \cdot x + 2 \cdot y) &= 4 \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + 2 \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) \\ &= 4 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -4 \\ 1 + \pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque 25.1.8

On remarque que les calculs de l'exemple 25.1.7 sont réalisés sans même connaître la nature des objets de E ni même la base \mathcal{B} utilisée.

C'est tout l'enjeu de ce chapitre : les matrices vont nous donner un moyen universel de représenter des vecteurs (et, comme nous le verrons plus loin, des applications linéaires) en dimension finie, quelle que soit la nature de ces vecteurs.

25.1.2 Matrices d'une famille de vecteurs dans une base donnée**Définition 25.1.9 – Matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n , et \mathcal{B} une base de E .

Soit $V = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **matrice de la famille V dans la base de \mathcal{B}** la matrice notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(V)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont, pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, la j -ième colonne est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_j)$.

Exemple 25.1.10

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et \mathcal{B} une base de E . Soient v_1, v_2, v_3, v_4 les vecteurs de E tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

25.2 Matrices d'une application linéaire dans des bases données**25.2.1 Définition****Définition 25.2.1 – Matrice d'une application linéaire relativement à des bases données**

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **matrice de f relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F** la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$

Remarque 25.2.2

- En reprenant les notations de la définition 25.2.1, si on note n la dimension de E et p la dimension de F , alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est une matrice à p lignes et n colonnes.
- Quand \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F sont les bases canoniques respectives de E et F , alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est la **matrice canoniquement associée à f** .

Il existe un cas particulier de cette définition, plus adaptée aux endomorphismes.

Définition 25.2.3 – Matrice d’un endomorphisme par rapport à une base donnée

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle **matrice de f relativement à la base \mathcal{B}** la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$

Remarque 25.2.4

En reprenant les notations de la définition 25.2.3, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.

Propriété 25.2.5 – Cas de l’identité

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et \mathcal{B} une base de E . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$$

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\text{Id}_E(e_j) = e_j = \sum_{i=1}^n \delta_{i,j} e_i$$

où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E(e_j)) = \begin{pmatrix} \delta_{1,j} \\ \delta_{2,j} \\ \vdots \\ \delta_{n,j} \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \begin{pmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \dots & \delta_{1,n} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta_{n-1,n} \\ \delta_{n,1} & \dots & \delta_{n,n-1} & \delta_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

□

Exemple 25.2.6

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x+y, x-y, 3x-12y) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminons $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$.

Avant tout, il faut s’assurer que f est bien une application linéaire. Soient $X = (x, y)$ et $Y = (x', y')$ deux vecteurs de

\mathbb{R}^2 , et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), 3(\lambda x + \mu x') - 12(\lambda y + \mu y')) \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y', 3\lambda x + 3\mu x' - 12\lambda y - 12\mu y') \\ &= (\lambda(x+y) + \mu(x'+y'), \lambda(x-y) + \mu(x'-y'), \lambda(3x-12y) + \mu(3x'-12y')) \\ &= \lambda(x+y, x-y, 3x-12y) + \mu(x'+y', x'-y', 3x'-12y') \\ &= \lambda f(X) + \mu f(Y) \end{aligned}$$

donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

On sait déjà que \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des bases respectives de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Enfin :

$$\text{— } f(1, 0) = (1, 1, 3) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1) \text{ donc}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(1, 0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{— } f(0, 1) = (1, -1, -12) = 1 \cdot (1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 1, 0) + (-12) \cdot (0, 0, 1) \text{ donc}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(0, 1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.2.7

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x+y, x-y, 3x-12y) \end{aligned}$$

l'application linéaire de l'exemple précédent.

Soit $\mathcal{B} = ((0, 1), (1, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$.

1. Montrer que \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des bases respectives de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 25.2.8

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X^2)$. On a vu dans l'exercice 25.1.5 que \mathcal{B} est une base de E .

Soit

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ P &\mapsto XP' - P \end{aligned}$$

Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

25.2.2 Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

Voyons tout d'abord un résultat classique concernant les applications linéaires :

Théorème 25.2.9 – Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p .

Soient \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F des bases respectives de E et F .

Alors l'application

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Montrons que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est une application linéaire. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Par définition, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la j -ième colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda f + \mu g)$ est $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}((\lambda f + \mu g)(e_j))$. Or :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}((\lambda f + \mu g)(e_j)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\lambda f(e_j) + \mu g(e_j)) \\ &= \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_j)) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g(e_j)) \end{aligned}$$

d'après le théorème 25.1.6. Or $\lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_j)) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g(e_j))$ est aussi la j -ième colonne de $\lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g)$.

Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est une application linéaire.

Montrons maintenant que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est bijective. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et notons, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, C_j la j -ième colonne de A et v_j le vecteur de F tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v_j) = C_j$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = A &\iff \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_j)) = C_j = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v_j) \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, u(e_j) = v_j \end{aligned}$$

$(e_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ étant une base de E , le cours sur les applications linéaires assure bien l'existence d'une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant cette dernière condition : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est bien bijective. \square

Remarque 25.2.10

Ainsi, en reprenant les notations de ce théorème, à chaque matrice A de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ correspond une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = A$.

Exercice 25.2.11

Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 et \mathcal{B}' la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^2 telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x, y, z)$.

Corollaire 25.2.12 – Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p . Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à np .

Démonstration. $\mathcal{L}(E, F)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie égale à np . \square

Corollaire 25.2.13 – Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et \mathcal{B} une base de E . Alors l'application

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 25.2.9 et de la remarque 25.2.4 □

Exercice 25.2.14

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X^2)$. On a déjà vu que \mathcal{B} est une base de E .

Soit φ l'endomorphisme de E tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer, de deux manières différentes, que pour tout $P \in E$: $\varphi(P) = P'$.

Correction. Méthode 1 : Considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi &: E \rightarrow E \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

ψ est un endomorphisme de E et :

- $\psi(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+X) + 0 \cdot (1+X^2)$
- $\psi(1+X) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+X) + 0 \cdot (1+X^2)$
- $\psi(1+X^2) = 2X = (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (1+X) + 0 \cdot (1+X^2)$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

Ainsi ψ et φ ont même matrice dans la base \mathcal{B} : on a donc $\varphi = \psi$ par injectivité de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$. Ainsi, pour tout $P \in E$, on a bien $\varphi(P) = \psi(P) = P'$.

Méthode 2 : Notons $P_1 = 1$, $P_2 = 1+X$ et $P_3 = 1+X^2$, de sorte que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$.

Par définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, on a :

- $\varphi(P_1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+X) + 0 \cdot (1+X^2) = 0 = P_1'$
- $\varphi(P_2) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+X) + 0 \cdot (1+X^2) = 1 = P_2'$
- $\varphi(P_3) = (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (1+X) + 0 \cdot (1+X^2) = 2X = P_3'$

Soit maintenant $P \in E$. Puisque (P_1, P_2, P_3) est une base de E , il existe trois coefficients réels a , b et c tels que $P = a \cdot P_1 + b \cdot P_2 + c \cdot P_3$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \varphi(a \cdot P_1 + b \cdot P_2 + c \cdot P_3) \\ &= a\varphi(P_1) + b\varphi(P_2) + c\varphi(P_3) \text{ par linéarité de } \varphi \\ &= aP_1' + bP_2' + cP_3' \\ &= P' \end{aligned}$$

Exercice 25.2.15

Reprendre l'exercice précédent, mais où \mathcal{B} est la base canonique de E .

25.2.3 Matrice d'une rotation, d'une homothétie

Soit $z = x + iy$ un point du plan complexe, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Soient $\theta, \lambda \in \mathbb{R}$. Le point obtenu par rotation du point d'affixe z , d'angle θ et de centre l'origine, a pour affixe

$$ze^{i\theta} = (x + iy)(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) + i(x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

Le point obtenu par l'homothétie de centre l'origine et de rapport λ appliquée au point d'affixe z a pour affixe

$$\lambda z = \lambda x + i\lambda y$$

On en déduit qu'en tant qu'applications de \mathbb{R}^2 vers lui-même, cette rotation et cette homothétie peuvent être représentées par les applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} r_\theta : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_\lambda : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

Si \mathcal{B} est la base canonique de \mathbb{R}^2 , on vérifie alors que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2$$

25.3 Utilisations pratiques d'une matrice d'application linéaire

25.3.1 Calcul d'images et composition

Propriété 25.3.1 – Calcul de l'image d'un vecteur

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soit \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

Démonstration. Reprenons les notations et hypothèse de l'énoncé. Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_p)$. Notons également

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Alors pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{i,j} f_i$.

Soit x dans E et notons $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a alors $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^p a_{i,j} f_i \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p x_j a_{i,j} f_i \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n x_j a_{i,j} f_i \text{ (ces sommes étant finies)} \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right) f_i \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{p,j} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

□

Exemple 25.3.2

Soit $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 1))$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^2 . \mathcal{B}' est libre (car ses deux vecteurs ne sont pas proportionnels) et est donc une base de \mathbb{R}^2 puisque $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminons $f(3, -2, 1)$. Pour commencer, nous avons $(3, -2, 1) = 3 \cdot (1, 0, 0) + (-2) \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1)$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((3, -2, 1)) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après la propriété 25.3.1, on a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(3, -2, 1)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}((3, -2, 1)) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(3, -2, 1) = 13 \cdot (0, 1) + 14 \cdot (1, 1) = (14, 27)$$

Exercice 25.3.3

Reprendre l'exemple 25.3.2 et calculer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Propriété 25.3.4 – Matrice d'une composée d'applications linéaires

Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soient $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et \mathcal{B}_G des bases respectives de E, F et G .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$$

Démonstration. Soit n la dimension de E , p la dimension de F et q la dimension de G .

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Pour tout $x \in E$, on a d'après 25.3.1 :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_G}(g(f(x))) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \end{aligned}$$

Avec $x = e_1$, on obtient donc la relation

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f)$ ont la même première colonne.

Avec $x = e_2$, on montre aussi que ces deux matrices ont la même deuxième colonne, et ainsi de suite jusqu'à la n -ième. On a donc bien

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f)$$

□

Remarque 25.3.5

La propriété 25.3.4 dit que "la matrice d'une composée est le produit des matrices" (cette formulation étant bien sûr très grossière).

C'est une des raisons pour laquelle le produit matriciel est ainsi défini.

Exercice 25.3.6

Soient

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ (a, b) &\mapsto aX^3 - bX^2 + a - b \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P' + 3P'' \end{aligned}$$

Déterminer la matrice canoniquement associée à $g \circ f$.

Corollaire 25.3.7

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, et soit \mathcal{B} une base de E .
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de 25.3.4. □

Corollaire 25.3.8

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et \mathcal{B} une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$$

a

a. On rappelle que, par convention, $f^0 = \text{Id}_E$ et pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^0 = I_n$

Démonstration. Raisonnons par récurrence :

- Pour $k = 0$, c'est vrai puisque : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^0$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{k+1}) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k \circ f) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ d'après 25.3.7} \\ &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{k+1} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. □

Corollaire 25.3.9 – Inversibilité et isomorphisme

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension finie non nulle n . Soient \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F des bases respectives de E et F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors :

$$u \text{ est un isomorphisme} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \text{ est inversible}$$

De plus, si l'une des conditions précédentes est vérifiée, alors

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1})$$

Démonstration. — Supposons que u soit un isomorphisme. Alors u admet une réciproque, et on a alors :

$$I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(u^{-1} \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1}) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$$

et de même

$$I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F}(\text{Id}_F) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F}(u \circ u^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1})$$

ce qui prouve que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ est inversible d'inverse $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1})$ (ce qui prouve la dernière formule de l'énoncé).

- Supposons que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ soit inversible. Soit $v \in \mathcal{L}(F, E)$ l'application linéaire telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)^{-1}$. v existe et est unique d'après le théorème 25.2.9. On a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(v) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(\text{Id}_E)$$

donc $v \circ u = \text{Id}_E$, encore d'après le théorème 25.2.9. De même :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F}(u \circ v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(v) = I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F}(\text{Id}_F)$$

donc $u \circ v = \text{Id}_F$. u est donc bien bijective, de réciproque v . □

Exercice 25.3.10

On considère l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P + P' \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice canoniquement associée à φ .
2. Montrer que φ est un automorphisme.

Propriété 25.3.11 – Un inverse à droite ou à gauche est un inverse

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible.
2. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$ (A est dite *inversible à droite*).
3. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $BA = I_n$ (A est dite *inversible à gauche*).

Dans les deux derniers cas, B est alors l'inverse de A .

Démonstration. L'implication (1) \implies (2) est immédiate.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et u, v les endomorphismes de \mathbb{K}^n dont les matrices relativement à la base canonique \mathcal{B} sont respectivement A et B .

Montrons que (2) \implies (3) et supposons que $AB = I_n$: on a donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n})$ donc $u \circ v = \text{Id}_E$. v est donc un inverse à droite de u . D'après le cours sur les applications linéaires, u est alors bijective de réciproque v donc A est inversible d'inverse $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = B$.

Le raisonnement est le même pour montrer que (3) \implies (1). □

25.3.2 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 25.3.12 – Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^p \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

est une application linéaire appelée *application linéaire canoniquement associée à A* .

Remarque 25.3.13

Dans cette définition, on identifie (c'est fréquemment le cas) \mathbb{K}^p (respectivement \mathbb{K}^n) à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

Démonstration. Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a en effet :

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda X + \mu Y) &= A(\lambda X + \mu Y) \\ &= \lambda AX + \mu AY \\ &= \lambda \varphi_A(X) + \mu \varphi_A(Y)\end{aligned}$$

□

Définition 25.3.14 – Noyau et image d'une matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

— Le *noyau* de A et on note $\text{Ker}(A)$ le noyau de φ_A :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0\}$$

— L'*image* de A et on note $\text{Im}(A)$ l'image de φ_A :

$$\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$$

Remarque 25.3.15

- $\text{Ker}(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n et $\text{Im}(A)$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p .
- On remarquera que $\text{Ker}(A)$ n'est autre que l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Propriété 25.3.16

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

En notant $A = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)$ les colonnes de A , alors

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

En particulier, les opérations élémentaires sur les colonnes de A ne modifient pas $\text{Im}(A)$.

Démonstration. $(E_1, E_2, \dots, E_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ étant une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(\varphi_A(E_1), \varphi_A(E_2), \dots, \varphi_A(E_n)) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

puisque pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\varphi_A(E_k) = AE_k = C_k$.

□

On a alors la définition suivante :

Définition 25.3.17 – Rang d'une matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Le rang de A est noté $\text{rg}(A)$ et est défini par :

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = \text{rg}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

où C_1, C_2, \dots, C_n désignent les colonnes de A .

Remarque 25.3.18

— En particulier, le théorème du rang s'applique à f_A et donne

$$n = \dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A)$$

— Les opérations élémentaires sur les colonnes de A ne modifient pas son rang (puisqu'elles ne modifient pas son image).

Propriété 25.3.19 – Opérations élémentaires sur les lignes et noyau

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Les opérations élémentaires sur les lignes de A ne modifient pas son noyau.

Démonstration. En effet, une opération élémentaire sur les lignes de A se traduit par le produit par la gauche de A par une matrice d'opération élémentaire P , qui est donc inversible.

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} (PA)X = 0 &\iff P(AX) = 0 \\ &\iff P^{-1}P(AX) = 0 \\ &\iff AX = 0 \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(PA) = \text{Ker}(A)$. □

Théorème 25.3.20 – Rang et transposition (admis)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$$

Remarque 25.3.21

Quitte à passer par la transposée, les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes de A ne changent donc pas son rang.

Exercice 25.3.22

Calculer

$$\text{rg} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.3.23

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le rang de $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Même question si $a \in \mathbb{C}$.

Propriété 25.3.24 – Égalité entre le rang d'une famille de vecteurs et d'une matrice la représentant

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n , \mathcal{B} une base de E et (v_1, v_2, \dots, v_p) des vecteurs de E . Alors

$$\text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_p))$$

Démonstration. Par définition :

$$\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_p)) = \dim(\text{Vect}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1), \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_2), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_p)))$$

Notons $G = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ et $H = \text{Vect}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1), \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_2), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_p))$. Il s'agit de montrer que G et H ont même dimension. Montrons pour cela que G et H sont isomorphes.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi &: G \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ x &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{aligned}$$

D'après le théorème 25.1.6, φ est injective.

De plus (v_1, v_2, \dots, v_p) est une famille génératrice de G donc :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi) &= \text{Vect}(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_p)) \\ &= \text{Vect}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1), \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_2), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_p)) \\ &= H \end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &: G \rightarrow H \\ x &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{aligned}$$

est donc un isomorphisme, et G et H ont bien même dimension. □

Propriété 25.3.25 – Égalité entre le rang d'une application linéaire et le rang d'une matrice la représentant

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soit \mathcal{B}_E une base de E , \mathcal{B}_F une base de F . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u))$$

Démonstration. D'après 25.3.24 :

$$\begin{aligned} \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u)) &= \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))) \\ &= \text{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) = \text{rg}(u) \end{aligned}$$

où (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base de E . □

Corollaire 25.3.26 – Critère d'inversibilité d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$A \text{ est inversible} \iff \text{Ker}(A) = \{0\} \iff \text{Im}(A) = \mathbb{K}^n \iff \text{rg}(A) = n$$

Remarque 25.3.27

À nouveau, on identifie \mathbb{K}^n avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration. On applique la propriété 25.3.9 à l'application f_A canoniquement associée à A . Puisque f_A est ici un endomorphisme de \mathbb{K}^n , qui est de dimension finie, f_A est bijective si et seulement si f_A est injective (c'est-à-dire $\text{Ker}(f_A) = \{0\}$) si et seulement si f_A est surjective (c'est-à-dire $\text{Im}(f_A) = \text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$ ou encore $\text{rg}(A) = n$ puisque $\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n). \square

Corollaire 25.3.28 – Critères pour qu'une famille soit une base

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n . Soit \mathcal{B} une base de E .

Soit $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E . Alors les points suivants sont équivalents :

1. \mathcal{C} est une base de E .
2. $\text{rg}(\mathcal{C}) = n$.
3. $\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) = n$.
4. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.

Démonstration. L'équivalence (1) \iff (2) est une conséquence directe du chapitre sur la dimension finie, puisque $\text{Card}(\mathcal{C}) = n = \dim(E)$.

L'équivalence (2) \iff (3) est une conséquence directe de 25.3.24.

Enfin, (3) \iff (4) est une conséquence directe de 25.3.26. \square

Exercice 25.3.29

Montrer, le plus rapidement possible, que $\mathcal{C} = ((1, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 2, 4))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Correction. Notons \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Alors :

$$\begin{aligned} \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

car, en tant que matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible. \mathcal{B} est donc bien une base de \mathbb{R}^3 .

25.4 Changement de bases

25.4.1 Matrice de passage d'une base à une autre

On considère un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie non nulle. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et $x \in E$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E(x)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)\end{aligned}$$

Ainsi, si l'on connaît les coordonnées de x dans la base \mathcal{B}' , c'est-à-dire si l'on connaît $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, alors avec une simple multiplication par $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ on obtient les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} . La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ permet donc de "passer d'une base à une autre", et est appelée **matrice de passage**.

Définition 25.4.1 – Matrice de passage

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . On appelle **matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'** et note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Attention !

Attention à ne pas intervertir \mathcal{B} et \mathcal{B}' ! Pour ne pas se tromper, l'idéal est de refaire le raisonnement ci-dessus.

Remarque 25.4.2

Pour construire $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, il suffit de trouver les coordonnées de chaque vecteur de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .

Exemple 25.4.3

Soit $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, -1))$. \mathcal{B} est la base canonique de \mathbb{R}^2 et \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^2 puisque ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires et car $\text{Card } \mathcal{B}' = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Déterminons $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$:

$$\text{— } (1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) \text{ donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}}((1, 1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{— } (1, -1) = 1 \cdot (1, 0) + (-1) \cdot (0, 1) \text{ donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}}((1, -1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.4.4

Reprendre l'énoncé de l'exemple 25.4.3 et déterminer $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

Propriété 25.4.5 – Inverse d'une matrice de passage

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et soient \mathcal{B} , \mathcal{B}' deux bases de E .

Alors $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible et

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$$

Démonstration. Id_E est un automorphisme, donc d'après le corollaire 25.3.9, la matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ est inversible et :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$$

□

Formule de changement de base pour un vecteur

Propriété 25.4.6 – Changement de base pour un vecteur

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .
Soit $x \in E$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$$

Démonstration. Le raisonnement a été fait juste avant la définition 25.4.1

□

25.4.2 Formule de changement de bases pour une application linéaire

Propriété 25.4.7 – Formule de changement de bases pour une application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soient $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E , et $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}'_E}(u) = P_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_E}(u) P_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E} = P_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}(u) P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}^{-1}$$

Démonstration. Remarquons que $u = \text{Id}_F \circ u \circ \text{Id}_E$, ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}'_E}(u) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F}(\text{Id}_F \circ u \circ \text{Id}_E) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F}(\text{Id}_F) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}(\text{Id}_E) \\ &= P_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}(u) P_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E} \end{aligned}$$

De plus, $P_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E} = P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}^{-1}$ d'après 25.4.5.

□

Très souvent, cette propriété est utilisée pour des endomorphismes, pour passer d'une base à une autre.

Corollaire 25.4.8 – Changement de base simplifié

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$$

Exemple 25.4.9

Reprenons les bases $\mathcal{B} = ((1,0), (0,1))$ et $\mathcal{B}' = ((1,1), (1,-1))$ de \mathbb{R}^2 vues dans l'exemple 25.4.3. On a vu que

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'inverse de cette matrice est

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On considère l'endomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (2x-y, x+3y) \end{aligned}$$

Alors :

- $u(1,0) = (2,1) = 2 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$.
- $u(0,1) = (-1,3) = (-1) \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$.

Ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Or, par changement de base, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$$

donc

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$$

et finalement

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

25.4.3 Matrices semblables**Définition 25.4.10 – Matrices semblables**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A et B sont **semblables** si et seulement si

Propriété 25.4.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

Alors A et B sont semblables si et seulement si il existe un endomorphisme u de E et deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E tels que

$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

Remarque 25.4.12

Autrement dit, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme, mais dans deux bases éventuellement différentes.

Démonstration. — Supposons A et B semblables. Il existe donc $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Soit \mathcal{B} une base quelconque de E et \mathcal{B}' la famille de vecteurs de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P$. \mathcal{B}' contient donc n vecteurs et $\text{rg}(\mathcal{B}') = \text{rg}(P)$ d'après 25.3.24. Or P est inversible donc d'après le corollaire 25.3.9, $\text{rg}(P) = n$. Ainsi \mathcal{B}' est une base de E .

Soit alors u l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

L'égalité $A = PBP^{-1}$ donne alors

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \end{aligned}$$

par la formule de changement de bases.

— Supposons l'existence de $u \in \mathcal{L}(E)$ et de deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E telles que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Par la formule de changement de bases, on a :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = PBP^{-1}$$

en posant $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ donc A et B sont semblables. □

Propriété 25.4.13 – Matrices semblables et rang

Soient A et B deux matrices semblables. Alors A et B ont même rang.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , u un endomorphisme de E et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E telles que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

D'après 25.3.25, on a alors

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(u) = \text{rg}(B)$$
□

Corollaire 25.4.14 – Matrices semblables et inversibilité

Soient A et B deux matrices semblables.

Alors A est inversible si et seulement si B est inversible.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la propriété précédente et de 25.3.9. □

Exercice 25.4.15

On considère l'endomorphisme

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y, \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, -1))$.

1. Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^2 .
On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.
2. Calculer A et D .
3. Justifier que A et D sont semblables. Déterminer $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer, le plus simplement possible, que $(A - 3I_2)(2I_2 + A) = 0$.
5. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
6. Montrer que u est un isomorphisme et déterminer sa réciproque.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n et u^n .

25.5 Systèmes et matrices

Définition 25.5.1

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Le *rang* du système linéaire homogène $AX = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est le rang de A .

Le théorème du rang et la définition du noyau de A donne alors le résultat suivant.

Propriété 25.5.2

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, est le noyau de A .

De plus, le rang de ce système est $n - \dim(\text{Ker}(A))$.

Remarque 25.5.3

Le rang de A étant la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes, mais aussi (par transposition) par ses lignes, on retrouve le fait que la dimension de l'espace des solutions de $AX = 0$ est le nombre de « degrés de libertés » (le nombre d'inconnues n) diminué du « nombre de contraintes » (le rang de A) :

$$\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rg}(A)$$

Par définition de l'image de A , on a alors le résultat suivant :

Propriété 25.5.4

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX = B$ est *compatible*^a si et seulement si $B \in \text{Im}(A)$.

^a. Admet au moins une solution

Définition 25.5.5 – Système de Cramer

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, alors pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet pour unique solution $X = A^{-1}B$.

Un tel système est dit *de Cramer*.

Exercice 25.5.6

À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ a^2x + y + az = 0 \\ ax + a^2y + z = 0 \end{cases} \quad (*)$$

est-il de Cramer ?

25.6 Exercices**Exercice 25.6.1**

Déterminer la matrice de $f : E \rightarrow F$ relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F dans les cas suivants :

1. $E = F = \mathbb{R}^3$, $f : (x, y, z) \mapsto (-x + y - z, 3x - y + z, 3x)$, \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F sont la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, x + z)$, $\mathcal{B}_E = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$, \mathcal{B}_F est la base canonique de \mathbb{R}^2 .
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_3[X]$, $f : P \mapsto (X - 1)P' + P$, \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F sont la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f : M \mapsto {}^t M$, \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F sont la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 25.6.2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (4x + y - 3z, -3x - y + 2z, 4x + y - 3z)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((-1, 1, -1), (1, -2, 1), (1, 1, 2))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer A , la matrice de f dans \mathcal{B} .
3. Calculer A^3 . Qu'en déduit-on sur f ?

Exercice 25.6.3

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P' + P \end{aligned}$$

Calculer $(\varphi - \text{Id})^3$. Montrer que φ est inversible et déterminer φ^{-1} .

Exercice 25.6.4

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto 2(X + 1)P - X^2P' \end{aligned}$$

1. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$.
2. En déduire que $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

3. Montrer que

$$\begin{aligned}\psi &: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto 2(X+1)P - X^2P'\end{aligned}$$

est un endomorphisme.

4. Déterminer la matrice A de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

5. Calculer $(A - 2I_3)^3$.

6. ψ est-il un automorphisme ? Quel est sa réciproque ? Que vaut A^{-1} ?

Exercice 25.6.5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 .

2. En déduire un polynôme annulateur de A .

3. A est-elle inversible ? Expliciter le cas échéant son inverse.

Exercice 25.6.6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^2 - 2A + I_3 = 0$.

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X + 1$.

3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n .

Exercice 25.6.7

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (4x - y + z, 3x + z, -x + y + 2z)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.

2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, 2, -1), (1, 1, -1), (1, 1, 0))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

3. Montrer que la matrice A de f dans la base \mathcal{B} est diagonale.

4. En déduire l'expression de $f^n(x, y, z)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercice 25.6.8

Soit

$$\begin{aligned}f &: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AM - MA\end{aligned}$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Déterminer $\text{Ker}(f)$.
4. En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A .

Exercice 25.6.9

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1. Soit $u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 + e_3$ et $u_3 = e_2 + e_3$. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E .
2. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 25.6.10

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x - 3y - 3z, 3x - 4y - 3z, -3x + 3y + 2z)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre le système $AX = \lambda X$, où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On montrera en effet que pour deux valeurs bien précises de λ à déterminer, l'ensemble des solutions de ce système est un sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non réduit à zéro. On obtient ainsi deux sev notés F et F' de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base \mathcal{B} de F et une base \mathcal{B}' de F' .
4. Montrer que la réunion de \mathcal{B} et \mathcal{B}' forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire une base \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 .
5. Donner la matrice de f dans la base \mathcal{D} .

Exercice 25.6.11

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 canoniquement associé à A .

1. Soit $x = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $f(x)$, $f \circ f(x)$, puis $f \circ f \circ f(x)$ et $f \circ f \circ f \circ f(x)$ et de manière générale, $f^n(x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire A^n , où $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer le rang de f . A est-elle inversible ?

Exercice 25.6.12

Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Soit φ l'endomorphisme de E tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ fixés.

Soit $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3)$.

1. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E .
2. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Exercice 25.6.13

Déterminer le rang de A dans les cas suivants :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.6.14

Déterminer la matrice dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_3[X]$ de

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP' \end{aligned}$$

En déduire $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.

Exercice 25.6.15

Soit φ l'application qui à tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $X + X^2$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, où \mathcal{B} est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.

Correction. 1. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Le reste dans la division euclidienne de P par $X + X^2$ est dans $\mathbb{R}_1[X]$ donc dans $\mathbb{R}_3[X]$: φ va donc bien de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même. De plus, pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a, en notant U_1 (respectivement U_2) le quotient dans la division de P (respectivement Q) par $X + X^2$:

$$\begin{aligned} \lambda P + \mu Q &= \lambda((X + X^2)U_1 + \varphi(P)) + \mu((X + X^2)U_2 + \varphi(Q)) \\ &= (X + X^2)(\lambda U_1 + \mu U_2) + \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q) \end{aligned}$$

avec $\lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q) \in \mathbb{R}_1[X]$: c'est donc le reste dans la division euclidienne de $\lambda P + \mu Q$ par $X + X^2$, de sorte que

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$$

Finalement, on a bien $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

2. On a :

- $1 = 0 \times (X + X^2) + 1$ et $1 \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $\varphi(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$.
- $X = 0 \times (X + X^2) + X$ et $X \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $\varphi(X) = X = 0 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$.
- $X^2 = 1 \times (X + X^2) - X$ et $-X \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $\varphi(X^2) = -X = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$.
- $X^3 = (X - 1) \times (X + X^2) + X$ (en posant la division euclidienne) et $X \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $\varphi(X^3) = X = 0 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$.

On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors :

$$P \in \text{Ker}(\varphi) \iff \varphi(P) = 0$$

$$\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b - c + d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ c = b + d \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi) &= \{bX + (b+d)X^2 + dX^3, b, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b(X + X^2) + d(X^2 + X^3), b, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(X + X^2, X^2 + X^3) \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi) &= \text{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) \\ &= \text{Vect}(1, X, -X, X) \\ &= \text{Vect}(1, X) \\ &= \mathbb{R}_1[X] \end{aligned}$$

Exercice 25.6.16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Déterminer la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & \mathbb{K}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

2. Montrer que la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

est inversible et déterminer son inverse.

Correction. 1. Pour tout $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(X^j) &= (X+1)^j \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) &= \left(\binom{j}{i} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ \binom{0}{1} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{0}{n-1} & \binom{1}{n-1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n-1}{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} \\ &= A\end{aligned}$$

où \mathcal{B} est la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et A la matrice définie dans la question suivante.

2. Montrer que A est inversible revient à montrer que φ est bijective, ce qui est trivial. En effet, φ admet pour réciproque :

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} &: \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P &\mapsto P(X-1)\end{aligned}$$

On a alors

$$A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1})$$

Or, pour tout $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(X^j) &= (X-1)^j \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}
 & A^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} \binom{0}{0}(-1)^{0-0} & \binom{1}{0}(-1)^{1-0} & \dots & \binom{n-1}{0}(-1)^{n-1-0} \\ \binom{0}{1}(-1)^{0-1} & \binom{1}{1}(-1)^{1-1} & \dots & \binom{n-1}{1}(-1)^{n-1-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{0}{n-1}(-1)^{0-(n-1)} & \binom{1}{n-1}(-1)^{1-(n-1)} & \dots & \binom{n-1}{n-1}(-1)^{n-1-(n-1)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \dots & (-1)^{n-1} \binom{n-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\binom{n-1}{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} \\
 &= \left((-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}
 \end{aligned}$$

Exercice 25.6.17

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Déterminer le rang de la matrice $M(p, n)$ où

$$M(p, n) = \begin{pmatrix} p^2 & (p+1)^2 & \dots & (p+n-1)^2 \\ (p+1)^2 & (p+2)^2 & \dots & (p+n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (p+n-1)^2 & (p+n)^2 & \dots & (p+2n-2)^2 \end{pmatrix}$$

Chapitre 26

Probabilités sur un univers fini

26.1	Espaces probabilisés	790
26.1.1	Espaces probabilisables	790
26.1.2	Notion de probabilité	792
26.1.3	Probabilités conditionnelles	795
26.1.4	Indépendance d'événements	799
26.2	Variables aléatoires	802
26.2.1	Loi d'une variable aléatoire	802
26.2.2	Loi usuelles sur un univers fini	803
26.2.3	Loi d'une variable aléatoire conditionnée par un événement	806
26.2.4	Couples de variables aléatoires	806
26.2.5	Indépendance de variables aléatoires	807
26.2.6	Lemme des coalitions	810
26.3	Exercices	811

26.1 Espaces probabilisés

26.1.1 Espaces probabilisables

Il est essentiel de bien assimiler le vocabulaire des probabilités : heureusement, des exemples permettent de mettre en place ce vocabulaire de façon concrète.

Par exemple, imaginons qu'une personne lance, une fois, un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 et observe le numéro affiché sur la face supérieure. Cette personne gagne 2 euros si le chiffre obtenu est pair, et perd 3 euros sinon.

Nous avons alors une *expérience aléatoire*, qui consiste à lancer le dé et observer le chiffre de la face supérieure. Les *issues* peuvent donc être représentées par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. L'*univers* est l'ensemble de ces issues.

De plus, deux *événements* sont cités : « obtenir un chiffre pair » d'une part, et « obtenir un chiffre impair » d'autre part. L'événement « obtenir un chiffre pair », que nous noterons A , est *réalisé* pour les issues 2, 4 et 6 : mathématiquement, A est littéralement l'ensemble $\{2, 4, 6\}$ des issues qui le réalisent. De la même façon, l'événement B : « on obtient un chiffre impair » est $B = \{1, 3, 5\}$.

Enfin, le gain du joueur est une *variable aléatoire* : c'est une fonction, ici notée G , qui à chaque issue associe un réel, défini comme suit :

$$G : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{-3, 2\}$$

$$\omega \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } \omega \in \{2, 4, 6\} \\ -3 & \text{si } \omega \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

Remarque 26.1.1

Avec ces informations, il ne faut pas penser que le jeu est forcément défavorable au joueur : le dé peut très bien être truqué en sa faveur ! En réalité, pour le moment, nous n'avons pas commencé à calculer la moindre probabilité...

Définition 26.1.2 – Univers fini et vocabulaire

Un *univers fini* est un ensemble fini non vide Ω . Relativement à cet univers fini :

- Les éléments de Ω sont appelés les *issues*.
- On appelle *événement* toute partie de Ω .
Un événement est donc un ensemble d'issues. $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements.
- Si A est un événement, l'*événement contraire* de A est $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
- On appelle *variable aléatoire* toute fonction de Ω vers E , où E est un ensemble quelconque.
- L'événement \emptyset est l'*événement impossible*, et l'événement Ω est l'*événement certain*.
- Les singletons^a de Ω sont appelés *événements élémentaires*.

a. Partie de Ω ne contenant qu'un seul élément.

Exercice 26.1.3

Un joueur lance 5 fois une pièce de monnaie^a et gagne 2 euros pour chaque Pile obtenu.

1. Proposer un univers fini et une variable aléatoire G représentant ce jeu.
2. Comment écrire les événements A : « le joueur n'obtient que des Piles » et B : « le joueur obtient exactement 4 Piles » ?
3. Que représente l'événement $G^{-1}(\{8, 9, 10\})$?

a. On ne précise pas si elle truquée ou non : il n'est ici pas question de calculer des probabilités.

Notation

Soit X une variable aléatoire sur un univers fini Ω , à valeurs dans un ensemble E . Soit B une partie de E .

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$$

est l'événement formé des issues pour lesquelles X est dans B .

On note (indifféremment) :

$$X^{-1}(B) = \{X \in B\} = (X \in B) = [X \in B]$$

Exemple 26.1.4

Dans l'exercice 26.1.3, l'événement « Le gain du joueur est un multiple de 3 » s'écrit aussi

$$G^{-1}(\{0,6\}) = \{G \in \{0,6\}\} = (G \in \{0,6\}) = [G \in \{0,6\}]$$

Définition 26.1.5 – Événements incompatibles

Soit Ω un univers fini.

- Soient A et B deux événements de cet univers. A et B sont dit *incompatibles* ou *disjoints* lorsque $A \cap B = \emptyset$.
- Une famille finie $(A_i)_{i \in I}$ d'événements de cet univers est formée d'événements *deux-à-deux disjoints* lorsque

$$\forall i, j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

Exemple 26.1.6

Dans l'exercice 26.1.3, les événements $\{X \in \{3,6\}\}$ et $\{X \leq 2\}$ sont incompatibles.

Exercice 26.1.7

Dans l'exercice 26.1.3, on note, pour tout $i \in \llbracket 1;5 \rrbracket$, A_i l'événement « le joueur obtient Pile lors du i -ième lancer ».

1. Écrire, de deux façons et en fonction des $(A_i)_{i \in \llbracket 1;5 \rrbracket}$, l'événement C : « le joueur obtient au moins un Pile ».
2. Même question pour D : « le joueur n'obtient aucun Pile ».

Remarque 26.1.8

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'événement dans un univers fini Ω , alors :

- $\bigcup_{i \in I} A_i$ est l'événement réalisé lorsqu'**au moins** un des A_i est réalisé. L'événement contraire est

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

Cet événement contraire est réalisé lorsqu'**aucun** des A_i n'est réalisé.

- $\bigcap_{i \in I} A_i$ est l'événement réalisé lorsque **tous** les A_i sont réalisés. L'événement contraire est

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

Cet événement contraire est réalisé lorsqu'**au moins un** des A_i n'est pas réalisé.

Définition 26.1.9 – Système complet d'événements

Soit Ω un univers fini.

Relativement à cet univers, un *système complet d'événements* est une famille finie d'événements $(A_i)_{i \in I}$ d'événements deux-à-deux incompatibles et dont la réunion est Ω , c'est-à-dire telle que :

1. $\forall (i, j) \in I^2, A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

Exercice 26.1.10

Donner un système complet d'événement pour l'exercice 26.1.3.

26.1.2 Notion de probabilité

Définir une *probabilité* revient à associer à chaque événement un réel de l'intervalle $[0; 1]$ vérifiant certaines conditions supplémentaires, précisées dans la définition suivante.

Définition 26.1.11 – Probabilité sur un univers fini

Soit Ω un univers fini. Une *probabilité* sur Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0; 1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ disjoints, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(Ω, P) est alors un *espace probabilisé fini*.

Propriété 26.1.12 – Probabilité et opérations ensemblistes

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

1. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$$

En particulier, si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

3. **Croissance** : Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $A \subset B$, on a

$$0 \leq P(A) \leq P(B) \leq 1$$

4. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Pour toute famille finie $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(\Omega)^I$ d'événements **deux-à-deux incompatibles** :

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

■ *Démonstration.* 1. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. On remarque que $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$ et que $(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$. Par

union disjointe :

$$P(B) = P((B \setminus A) \cup (A \cap B)) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$$

et il ne reste plus qu'à soustraire $P(A \cap B)$.

De plus, si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

2. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. D'après le point précédent, et puisque $A \subset \Omega$, on a

$$P(\overline{A}) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$$

3. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $A \subset B$. Alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ donc

$$P(B) = \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} + P(A) \geq P(A)$$

Par définition de P , on sait aussi que $P(B)$ et $P(A)$ sont dans $[0; 1]$.

4. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. On remarque que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et que $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Par union disjointe :

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. On raisonne par récurrence sur le cardinal de I .

— Si I est vide ou de cardinal 1, la formule est triviale.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la formule établie pour toute famille de n événements deux-à-deux incompatibles. Soit

$(A_i)_{i \in I}$ une famille de $n+1$ événements deux-à-deux incompatibles, et soit $i_0 \in I$. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i = \left(\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i \right) \cup$

A_{i_0} et $\left(\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i \right) \cap A_{i_0} = \emptyset$ donc par union disjointe :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i\right) + P(A_{i_0}) \\ &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} P(A_i) + P(A_{i_0}) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{i \in I} P(A_i) \end{aligned}$$

On a pu utiliser l'hypothèse de récurrence puisque $(A_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ est bien une famille de n événements deux-à-deux incompatibles. □

Détermination d'une probabilité

Définition 26.1.13 – Distribution de probabilité

On appelle *distribution de probabilité* toute famille finie $(p_j)_{j \in \Omega}$, où Ω est un ensemble fini non vide, de réels positifs dont la somme vaut 1.

Théorème 26.1.14 – Une probabilité est caractérisée par une distribution

Soit $(p_j)_{j \in \Omega}$ une distribution de probabilité. Alors il existe une unique probabilité P sur Ω vérifiant

$$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$$

De plus :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Démonstration. On raisonne par analyse-synthèse.

— Supposons qu’une telle probabilité P existe. Alors pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

car la famille finie d’événements $(\{\omega\})_{\omega \in A}$ est formée d’événements deux-à-deux incompatibles. P est donc entièrement caractérisée (et la dernière formule est démontrée).

— Réciproquement, considérons l’application

$$\begin{array}{ccc} P & : & \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ & & A \mapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega \end{array}$$

Montrons que P convient.

— Soit $\omega \in \Omega$. On a par définition de P :

$$P(\{\omega\}) = p_\omega$$

— Il reste à montrer que P est bien une probabilité sur Ω . Tout d’abord :

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

puisque $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilité. De plus, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$0 \leq P(A) = \sum_{\omega \in A} \underbrace{p_\omega}_{\geq 0} \leq \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

Enfin, si A et B sont deux événements incompatibles dans Ω :

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p_\omega = \sum_{\omega \in A} p_\omega + \sum_{\omega \in B} p_\omega = P(A) + P(B)$$

P est donc bien une probabilité. □

Exemple 26.1.15

On lance un dé à 6 faces **non truqué**. Un espace probabilisé convenable est alors (Ω, P) où $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et P est définie par le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$P(\{k\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On dit alors que P est la *probabilité uniforme* sur $\llbracket 1; 6 \rrbracket$ (voir la définition 26.1.18).

Exercice 26.1.16

On veut truquer un dé à 6 faces de sorte que, pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, la probabilité d'obtenir le chiffre k soit λk , où λ est un réel fixé. Déterminer λ .

Exercice 26.1.17

On reprend l'exercice 26.1.3 : un joueur lance 5 fois une pièce de monnaie, que l'on suppose équilibrée, et gagne 2 euros pour chaque Pile obtenu. On note G le gain du joueur.

1. Proposer un espace probabilisé (Ω, P) convenable.
2. On considère les événements A : « le joueur n'obtient que des Piles », B : « le joueur gagne exactement 8 euros », C : « le joueur obtient au moins un Pile » et D : « le joueur ne gagne rien ». Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$.

Définition 26.1.18 – Probabilité uniforme

Soit Ω un univers fini. La *probabilité uniforme* sur Ω est la probabilité P définie par

$$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

En particulier, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{« Nombre d'issues réalisant } A \text{ »}}{\text{« Nombre total d'issues »}}$$

26.1.3 Probabilités conditionnelles

Définition 26.1.19 – Probabilité conditionnelle

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle^a.

L'application

$$\begin{aligned} P_B &: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1] \\ A &\mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω , appelée *probabilité conditionnée par B* .

^a. On dit que B est *non-négligeable*, mais ce vocabulaire est surtout utilisé dans des espaces probabilisés non finis, ce qui sort du cadre de ce chapitre.

Remarque 26.1.20

— $P_B(A)$ est parfois noté $P(A|B)$ et se lit « probabilité de A sachant B ». Ce nombre représente la probabilité que A se réalisant **en supposant que B est déjà réalisé**. On remarque d'ailleurs que

$$P_B(B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

— Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a donc $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que P_B est une probabilité.

— Tout d'abord :

$$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

— De plus, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $P(B) > 0$ et $A \cap B \subset B$ donc

$$0 \leq P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

— Enfin, si $A, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont incompatibles :

$$P_B(A \cup C) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (C \cap B))}{P(B)}$$

Or $A \cap B$ et $C \cap B$ sont incompatibles. En effet :

$$(A \cap B) \cap (C \cap B) = \underbrace{(A \cap C)}_{=\emptyset} \cap B = \emptyset$$

On obtient donc bien

$$P_B(A \cup C) = \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = P_B(A) + P_B(C)$$

□

Formule des probabilités composées

Théorème 26.1.21 – Formule des probabilités composées

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une famille d'événements. On suppose que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors, pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. De plus :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration. Pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a $A_1 \cap \dots \cap A_n \subset A_1 \cap \dots \cap A_k$ donc

$$0 < P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq P(A_1 \cap \dots \cap A_k)$$

De plus :

$$\begin{aligned} P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) &= P(A_1) \prod_{k=1}^{n-1} P_{A_1 \cap \dots \cap A_k}(A_{k+1}) \\ &= P(A_1) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1})}{P(A_1 \cap \dots \cap A_k)} \\ &= P(A_1) \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1)} \\ &= P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

par produit télescopique.

□

Exercice 26.1.22

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules bleues. On y effectue 4 tirages successifs de la façon suivante : après tirage, on remet la boule obtenue dans l'urne et on enlève de l'urne une boule de l'autre couleur. Déterminer la probabilité d'obtenir 4 boules rouges.

Formule des probabilités totales**Théorème 26.1.23 – Formule des probabilités totales**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, et $(B_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements sur Ω .

Alors pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i)$$

De plus, si les $(B_i)_{i \in I}$ sont tous de probabilité non nulle :

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) P_{B_i}(A)$$

Démonstration. Puisque $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, ceux-ci sont deux-à-deux incompatibles et $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) \\ &= P\left(A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)\right) \\ &= \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) \end{aligned}$$

car les événements $(A \cap B_i)_{i \in I}$ sont deux-à-deux incompatibles : en effet, pour tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$, on a

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap \underbrace{(B_i \cap B_j)}_{=\emptyset} = \emptyset$$

ce qui démontre la première formule.

De plus, si les $(B_i)_{i \in I}$ sont tous de probabilité non nulle, alors on a $P(A \cap B_i) = P(B_i) P_{B_i}(A)$ pour tout $i \in I$, ce qui prouve la seconde formule. \square

Remarque 26.1.24

En pratique, si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P) , et si $P(B) = 0$, on pose $P(B) P_B(A) = 0$ et la formule ci-dessus reste bien définie.

Exercice 26.1.25

On lance une pièce de monnaie équilibrée. Si on obtient Pile, on lance un dé à 6 faces non truqué. Sinon, on lance un dé à 4 faces non truqué. Dans tous les cas, on observe le numéro affiché par le dé lancé. Quelle est la probabilité que celui-ci soit pair ?

Exercice 26.1.26

Une urne contient N boules, numérotées de 1 à N . Chacun leur tour, les K étudiants d'une classe tirent une boule de l'urne, la remet dans l'urne et en retire toutes les boules portant un numéro strictement supérieur à celui de la boule tirée.

Par exemple, si le premier étudiant tire la boule 5, il la remet et en retire les boules 6, 7, ..., N . L'urne contient alors les boules 1, 2, 3, 4 et 5. Si le second étudiant tire la boule 3, l'urne ne contiendra ensuite que les boules 1, 2 et 3.

Le gagnant est le premier joueur obtenant la boule 1.

Pour tout $k \in \llbracket 1; K \rrbracket$, on note X_k le numéro de la boule obtenu par le k -ième étudiant et on pose

$$U_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \\ \vdots \\ P(X_k = N) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer U_1 .
2. Déterminer une matrice A telle que

$$\forall k \in \llbracket 1; K-1 \rrbracket, U_{k+1} = AU_k$$

3. On fixe $N = 4$ et $K \geq 3$. Déterminer la probabilité que le premier étudiant soit le gagnant. Même question pour le second et le troisième étudiant (en supposant que $K \geq 3$).

Formule de Bayes**Théorème 26.1.27 – Formule de Bayes**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ de probabilités non nulles. Alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$$

Remarque 26.1.28

$P(B)$ est souvent calculé avec la formule des probabilités totales.

Démonstration. On a directement

$$P(A)P_A(B) = P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$$

et il reste à diviser par $P(B)$. □

Exercice 26.1.29

Un bac contient 500 dés à 6 faces. 400 d'entre eux sont équilibrés, les autres sont truqués et peuvent donner 1, 2, 3, 4 ou 5 avec une probabilité de $\frac{1}{10}$ et 6 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

On choisit un dé au hasard, on le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé utilisé soit truqué ?

Remarque 26.1.30

La formule de Bayes permet de « remonter le temps » ou d'inverser « la cause et la conséquence ». Dans l'exercice précédent, sachant que l'on a obtenu un 6, on cherche en effet à savoir ce qu'il s'est passé avant (c'est-à-dire quel type de dé a été utilisé).

Exercice 26.1.31 – Un classique : le test de détection de maladie

Une maladie touche une personne sur 1000. Un laboratoire met au point un test de détection de celle-ci.

Sur une personne effectivement malade, le test a 99% de chances d'être positif.

Sur une personne saine, le test a 99% de chances d'être négatif.

1. Une personne effectue ce test, qui renvoie un résultat positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit réellement malade ?
2. Une personne effectue ce test, qui renvoie un résultat négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit saine ?
3. Plus généralement, lorsqu'une personne se teste, quelle est la probabilité que ce test donne un résultat erroné ?

26.1.4 Indépendance d'événements**Définition 26.1.32 – Événements indépendants**

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements dans un espace probabilisé fini (Ω, P) .

On dit que les $(A_i)_{i \in I}$ sont *indépendants* lorsque pour tout $J \subset I$, on a^a

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

a. Avec les conventions $\prod_{j \in \emptyset} P(A_j) = 1$ et $\bigcap_{j \in \emptyset} A_j = \Omega$

Remarque 26.1.33

- On dit aussi que les $(A_i)_{i \in I}$ sont *mutuellement indépendants*.
- Deux événements A_1 et A_2 sont donc indépendants si et seulement si $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$.
- Pour que (A_1, A_2, \dots, A_n) soient indépendants, il ne suffit pas d'avoir

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

ni que les $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ soient deux-à-deux indépendants.

Il faut bien que

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

pour toute partie J de I .

- Si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P) avec $P(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ c'est-à-dire si et seulement si

$$P(B)P_B(A) = P(A)P(B)$$

ou encore $P(A) = P_B(A)$.

Autrement dit, A et B sont indépendants lorsque le fait de savoir que B est vrai n'apporte rien quant à la probabilité de A .

Exercice 26.1.34

On lance deux fois un dé à 6 faces non truqué. On note A : « Le premier chiffre obtenu est pair », B : « Le second chiffre obtenu est impair » et C : « La somme des deux chiffres obtenus est paire ».

A , B et C sont-ils indépendants ? Deux-à-deux indépendants ?

Propriété 26.1.35 – Indépendance et complémentaires

Soient A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé fini (Ω, P) . Alors A et \bar{B} sont indépendants.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A \setminus B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(\bar{B}) \end{aligned}$$

donc A et B sont indépendants. □

Propriété 26.1.36 – Indépendance et complémentaires

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Dans celui-ci, on considère une famille finie d'événements indépendants $(A_i)_{i \in I}$ et une famille d'événements $(B_i)_{i \in I}$ telle que

$$\forall i \in I, B_i = A_i \text{ ou } \bar{A}_i$$

Alors les $(B_i)_{i \in I}$ sont indépendants.

Exemple 26.1.37

Si (A_1, A_2, A_3) sont des événements indépendants dans un même espace probabilisé fini, alors $(A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$ sont aussi indépendants.

Démonstration. On note $n = \text{Card}(I)$. On va raisonner par récurrence forte sur le nombre de B_i égaux à \bar{A}_i .

Pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on considère donc la propriété \mathcal{P}_p : « Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements indépendants, pour toute famille $(B_i)_{i \in I}$ telle que, pour tout $i \in I$, $B_i = A_i$ ou \bar{A}_i et telle que $p = \text{Card}(\{i \in I, B_i = \bar{A}_i\})$, les $(B_i)_{i \in I}$ sont indépendants ».

— Si $p = 0$ et si $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ sont des familles vérifiant les conditions énoncées dans \mathcal{P}_0 , alors $B_i = A_i$ pour tout $i \in I$ et on a, pour toute partie J de I :

$$P\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j) = \prod_{j \in J} P(B_j)$$

puisque les $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants. \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— Soit $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et supposons $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_p$ vraies. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements indépendants et soit $(B_i)_{i \in I}$ avec, pour tout $i \in I$, $B_i = A_i$ ou \bar{A}_i , et telle que $\text{Card}(C) = p+1$ où $C = \{i \in I, B_i = \bar{A}_i\}$. C n'est donc pas vide : on en considère un élément c fixé.

Soit J une partie de I .

On a alors :

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) &= P\left(\left(\bigcap_{j \in J \cap \bar{C}} B_j\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J \cap C} B_j\right)\right) \\
 &= P\left(\left(\bigcap_{j \in J \cap \bar{C}} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J \cap C} \bar{A}_j\right)\right) \\
 &= P\left(\left(\bigcap_{j \in J \cap \bar{C}} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{j \in (J \cap C) \setminus \{c\}} \bar{A}_j\right) \cap \bar{A}_c\right) \\
 &= P\left(\left(\left(\bigcap_{j \in J \cap \bar{C}} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{j \in (J \cap C) \setminus \{c\}} \bar{A}_j\right)\right) \setminus A_c\right) \\
 &= P\left(\left(\bigcap_{j \in J \cap \bar{C}} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{j \in (J \cap C) \setminus \{c\}} \bar{A}_j\right)\right) \\
 &\quad - P\left(\left(\bigcap_{j \in J \cap \bar{C}} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{j \in (J \cap C) \setminus \{c\}} \bar{A}_j\right) \cap A_c\right) \\
 &= P\left(\left(\bigcap_{j \in J \cap \bar{C}} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{j \in (J \cap C) \setminus \{c\}} \bar{A}_j\right)\right) \\
 &\quad - P\left(\left(\bigcap_{j \in (J \cap \bar{C}) \cup \{c\}} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{j \in (J \cap C) \setminus \{c\}} \bar{A}_j\right)\right)
 \end{aligned}$$

Or $(J \cap C) \setminus \{c\}$ est de cardinal inférieur ou égal à p : par hypothèse de récurrence, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) &= \left(\prod_{j \in J \cap \bar{C}} P(A_j)\right) \left(\prod_{j \in (J \cap C) \setminus \{c\}} P(\bar{A}_j)\right) \\
 &\quad - P(A_c) \left(\prod_{j \in J \cap \bar{C}} P(A_j)\right) \left(\prod_{j \in (J \cap C) \setminus \{c\}} P(\bar{A}_j)\right) \\
 &= \left(\prod_{j \in J \cap \bar{C}} P(A_j)\right) \left(\prod_{j \in (J \cap C) \setminus \{c\}} P(\bar{A}_j)\right) (1 - P(A_c)) \\
 &= \left(\prod_{j \in J \cap \bar{C}} P(A_j)\right) \left(\prod_{j \in (J \cap C) \setminus \{c\}} P(\bar{A}_j)\right) P(\bar{A}_c) \\
 &= \left(\prod_{j \in J \cap \bar{C}} P(A_j)\right) \left(\prod_{j \in J \cap C} P(\bar{A}_j)\right) \\
 &= \prod_{j \in J} P(B_j)
 \end{aligned}$$

et les $(B_j)_{j \in J}$ sont bien indépendants.

□

26.2 Variables aléatoires

Pour rappel :

Définition 26.2.1 – Variable aléatoire sur un univers fini

Une *variable aléatoire* sur un univers fini Ω est une fonction allant de Ω vers E , où E est un ensemble quelconque.

Remarque 26.2.2

À chaque issue, une variable aléatoire associe donc un élément de E .

Exemple 26.2.3

Par exemple, si $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sont les n élèves d'une classe Ω dont on choisit un étudiant au hasard :

- On peut définir une variable aléatoire T égale à la taille en centimètres de l'étudiant choisi : on obtient ainsi une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} .
- On peut définir une variable aléatoire G égale à la somme des deux chiffres de l'âge de l'étudiant : on obtient alors une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .
- On pourrait aussi associer à chaque étudiant ω le couple $(T(\omega), G(\omega))$: on obtient alors une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

26.2.1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 26.2.4 – Loi d'une variable aléatoire

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω , à valeurs dans un ensemble E .

On appelle *loi de X* l'application

$$\begin{aligned} P_X : \mathcal{P}(E) &\rightarrow [0; 1] \\ A &\mapsto P(X \in A) \end{aligned}$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que P_X est une probabilité sur E .

- Il est clair que P_X est à valeurs dans $[0; 1]$.
- On a

$$P_X(E) = P(X \in E) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in E\}) = P(\Omega) = 1$$

- Soient A, B deux parties disjointes de E . Alors :

$$\begin{aligned} P_X(A \cup B) &= P(X \in A \cup B) \\ &= P(X^{-1}(A \cup B)) \\ &= P(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)) \\ &= P(X^{-1}(A)) + P(X^{-1}(B)) \end{aligned}$$

par union disjointe (pour tout $\omega \in \Omega$, on ne peut pas avoir simultanément $\omega \in X^{-1}(A)$ (c'est-à-dire $X(\omega) \in A$) et $\omega \in X^{-1}(B)$ (c'est-à-dire $X(\omega) \in B$) puisque A et B sont incompatibles).

On obtient donc bien

$$P_X(A \cup B) = P_X(A) + P_X(B)$$

□

Remarque 26.2.5

- P_X étant une probabilité, la loi de X est donc entièrement caractérisée par la famille $(P(X = x))_{x \in E}$.
Déterminer la loi de X revient donc à calculer $P(X = x)$ pour tout $x \in E$. Pour toute partie A de E , on a alors

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

- Si deux variables aléatoires X et Y ont même loi (c'est-à-dire si $P_X = P_Y$), on note $X \sim Y$.

Exemple 26.2.6

Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7. Un joueur tire une boule au hasard : si le numéro obtenu est pair, le gain en euros du joueur est égal à deux fois le numéro porté par la boule. Sinon, le « gain » du joueur est en fait une perte égale au numéro affiché par la boule.

1. On note G le gain du joueur. Déterminer la loi de G .
2. Quelle est la probabilité que G soit pair ?

Exercice 26.2.7

Un joueur choisit simultanément deux lettres au hasard parmi les lettres « A », « B », « C », « D » et « E ». Il gagne 3 euros s'il obtient une voyelle et une consonne, et perd 2 euros sinon.

Déterminer la loi du gain G du joueur.

Propriété 26.2.8 – Loi de $f(X)$

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, P) , à valeurs dans un ensemble E . Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ où F est un ensemble quelconque.

Alors $f(X) = f \circ X$ est une variable aléatoire sur F . De plus, pour toute partie A de F , on a :

$$P_{f(X)}(A) = P(f(X) \in A) = P(X \in f^{-1}(A)) = P_X(f^{-1}(A)) = \sum_{x \in f^{-1}(A)} P(X = x)$$

Démonstration. En effet, pour tout partie A de F , $f^{-1}(A)$ est une partie de E . □

Exercice 26.2.9

On lance simultanément une pièce de monnaie équilibrée et un dé à 6 faces équilibré. On note $X = 0$ si la pièce est tombée sur Pile, et $X = 1$ sinon. On note également Y le numéro affiché par le dé.

Déterminer la loi de $X + Y$.

26.2.2 Loi usuelles sur un univers fini**Loi uniforme****Définition 26.2.10 – Loi uniforme sur E**

Soit E un ensemble fini non vide, (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur cet espace probabilisé.

On dit que X suit la *loi uniforme sur E* lorsque :

$$\forall k \in E, P_X(\{k\}) = P(X = k) = \frac{1}{\text{Card}(E)}$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Démonstration. Les réels de la famille $\left(\frac{1}{\text{Card}(E)}\right)_{x \in E}$ sont positifs et leur somme vaut

$$\sum_{x \in E} \frac{1}{\text{Card}(E)} = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(E)} = 1$$

Cette famille définit donc bien une loi de probabilité. □

Remarque 26.2.11

En reprenant les notations précédentes, on a alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X = k) = \sum_{k \in A} \frac{1}{\text{Card}(E)} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$$

Exemple 26.2.12

On lance un dé à n faces **non truqué** et on note X le chiffre obtenu : X suit alors une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ (autrement dit, $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$).

Loi de Bernoulli

Définition 26.2.13 – Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0; 1]$ et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, P) . On dit que X suit une *loi de Bernoulli de paramètre p* si :

- X est à valeurs dans $\{0, 1\}$.
- $P(X = 1) = p$.

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Démonstration. p et $1 - p$ sont positifs et de somme 1 : la famille $(p, 1 - p)$ définit donc bien une loi de probabilité. □

Remarque 26.2.14

Avec les mêmes notations, on a alors $P(X = 0) = P(\overline{\{X = 1\}}) = 1 - P(X = 1) = 1 - p$.

Définition 26.2.15 – Variable aléatoire indicatrice d'un événement

Soit A un événement dans un espace probabilisé (Ω, P) . Alors la variable aléatoire

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\rightarrow \{0, 1\} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est appelée *variable aléatoire indicatrice de l'événement A* .

$\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.

Remarque 26.2.16

$\mathbb{1}_A$ est donc la variable aléatoire valant 1 lorsque A est réalisé, et 0 sinon.

Exercice 26.2.17

On lance un dé à 4 faces et on note X le numéro obtenu. Le dé est truqué et on donne :

x	1	2	3	4
X	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

On pose alors $Y = 1$ si X est pair et $Y = 0$ sinon. Déterminer la loi de Y .

Loi binomiale**Définition 26.2.18 – Loi binomiale**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé fini (Ω, P) suit une *loi binomiale de paramètres n et p* lorsque :

- X est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$.
- $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration. Les réels de la famille $\left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont positifs et leur somme est

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

d'après la formule du binôme.

Cette famille définit donc bien une loi de probabilité. □

Remarque 26.2.19

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$.

On considère une expérience aléatoire représentée par un espace probabilisé fini. On fixe un événement A de probabilité $P(A) = p$, et l'on répète n fois, de manière indépendante, cette expérience aléatoire.

On note X le nombre de succès obtenus (un succès étant une réalisation de l'expérience aléatoire pour laquelle A a été vérifié).

Alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (ce sera justifié rigoureusement après avoir vu la notion d'indépendance de variables aléatoires).

Exemple 26.2.20

On lance 10 fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X le nombre de Pile obtenus. Quelle est la loi de X ?

26.2.3 Loi d'une variable aléatoire conditionnée par un événement

Définition 26.2.21 – Loi d'une variable aléatoire conditionnée par un événement

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, P) , à valeurs dans un ensemble E .

Soit A un événement sur Ω , avec $P(A) > 0$.

La loi de X conditionnée par A est la probabilité qui, à toute partie F de E associe le nombre $P_A(X \in F)$.

Démonstration. La loi de X conditionnée par A est bien une probabilité : ce n'est autre que la loi de X pour la probabilité P_A (au lieu de P). \square

Exercice 26.2.22

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. Déterminer la loi de X conditionnée par l'événement $\{X \geq 2\}$.

26.2.4 Couples de variables aléatoires

Définition 26.2.23 – Couple de variables aléatoires

Un couple de variable aléatoires sur un univers fini Ω est un couple $Z = (X, Y)$ où X et Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Si X est à valeurs dans un ensemble E et Y est à valeurs dans un ensemble F , alors le couple (X, Y) est à valeurs dans $E \times F$.

Remarque 26.2.24

Un couple de variables aléatoires sur Ω est donc une variable aléatoire sur Ω à valeur dans un ensemble produit.

Exemple 26.2.25

On lance deux dés à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note X le numéro affiché par le premier dé et Y celui affiché par le second dé. Alors (X, Y) est un couple de variable aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1; 6 \rrbracket^2$.

Définition 26.2.26 – Loi conjointe

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé fini (Ω, P) . On suppose que X est à valeurs dans un ensemble E et que Y est à valeurs dans un ensemble F .

La loi du couple (X, Y) est appelée *loi conjointe de (X, Y)* . Elle est définie par :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(F), P_{(X,Y)}(A \times B) &= P((X, Y) \in A \times B) \\ &= P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) \end{aligned}$$

Remarque 26.2.27

La loi conjointe de (X, Y) est donc déterminée par la famille

$$(P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}))_{(x,y) \in E \times F}$$

Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on note aussi

$$P(X = x, Y = y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

Exercice 26.2.28

On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note X le numéro affiché par le premier dé, et Y le numéro affiché par le second dé.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .
2. On pose $Z = \max(X, Y)$. Déterminer la loi conjointe de (X, Z) .

Définition 26.2.29 – Lois marginales

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé fini (Ω, P) .

- La loi de X est appelée *première loi marginale du couple* (X, Y) .
- La loi de Y est appelée *seconde loi marginale du couple* (X, Y) .

On peut, à partir de la loi conjointe, obtenir les lois marginales.

Propriété 26.2.30

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé fini (Ω, P) .

- Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

- Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

Démonstration. $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements : ces événements sont clairement deux-à-deux incompatibles (Y ne peut prendre simultanément deux valeurs différentes) et leur réunion est $\bigcup_{y \in Y(\Omega)} \{Y = y\} =$

$\{Y \in Y(\Omega)\} = \Omega$.

D'après la formule des probabilités totales, on a alors pour tout $x \in X(\Omega)$:

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

Le deuxième point se montre de la même façon. □

Exercice 26.2.31

On reprend les notations de l'exercice 26.2.28. Déterminer la loi de Z .

26.2.5 Indépendance de variables aléatoires**Définition 26.2.32 – Variables aléatoires indépendantes**

Soient X et Y deux variables sur un espace probabilisé fini (Ω, P) . On dit que X et Y sont *indépendantes* si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants.

Autrement dit, X et Y sont indépendantes si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \forall B \in \mathcal{P}(Y(\Omega)), P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Propriété 26.2.33

Soient X et Y deux variables sur un espace probabilisé fini (Ω, P) . Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \quad (\star)$$

Démonstration. — Supposons que X et Y sont indépendantes. Soit $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$. Alors :

$$\begin{aligned} P(X = x, Y = y) &= P(\{X \in \{x\}\} \cap \{Y \in \{y\}\}) \\ &= P(X \in \{x\})P(Y \in \{y\}) \text{ car } X \perp\!\!\!\perp Y \\ &= P(X = x)P(Y = y) \end{aligned}$$

donc (\star) est vraie.

— Réciproquement, supposons (\star) vraie. Soient $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$. Alors :

$$\begin{aligned} P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) &= P\left(\bigcup_{(x,y) \in A \times B} \{X = x\} \cap \{Y = y\}\right) \\ &= \sum_{(x,y) \in A \times B} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \text{ par union disjointe} \\ &= \sum_{(x,y) \in A \times B} P(X = x)P(Y = y) \\ &= \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} P(X = x)P(Y = y) \\ &= \sum_{x \in A} P(X = x) \sum_{y \in B} P(Y = y) \\ &= P(X \in A)P(Y \in B) \end{aligned}$$

donc X et Y sont indépendantes. □

Remarque 26.2.34

Dans le cas où X et Y sont indépendantes, la loi conjointe de (X, Y) s'obtient donc directement à partir des lois de X et Y .

Propriété 26.2.35

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** sur un espace probabilisé fini (Ω, P) . Soit f une application définie sur $X(\Omega)$ et g une application définie sur $Y(\Omega)$.

Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{P}(f(X(\Omega)))$ et $B \in \mathcal{P}(g(Y(\Omega)))$. Alors :

$$\begin{aligned} P(\{f(X) \in A\} \cap \{g(Y) \in B\}) &= P(\{X \in f^{-1}(A)\} \cap \{Y \in g^{-1}(B)\}) \\ &= P(X \in f^{-1}(A))P(Y \in g^{-1}(B)) \end{aligned}$$

par indépendance de X et Y . On a donc bien

$$P(\{f(X) \in A\} \cap \{g(Y) \in B\}) = P(f(X) \in A)P(g(Y) \in B)$$

et $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. □

Définition 26.2.36 – Famille de variables aléatoires indépendantes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (X_1, X_2, \dots, X_n) une famille finie de variables aléatoires sur un espace probabilisé (Ω, P) .
On dit que X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes lorsque :

$$\forall A_1 \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)), \dots, \forall A_n \in \mathcal{P}(X_n(\Omega)), P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

Remarque 26.2.37

Comme pour deux variables aléatoires, dire que X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes revient à dire que

$$\forall x_1 \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)), \dots, \forall x_n \in \mathcal{P}(X_n(\Omega)), P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

Cas de la loi binomiale

Propriété 26.2.38

Soit $p \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n **indépendantes** sur un même espace probabilisé, suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p .

Alors

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Remarque 26.2.39

Si l'on répète n fois, de façon indépendante, une même expérience aléatoire menant à un succès ou un échec, et que l'on note, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_i = 1$ si la i -ième itération de l'expérience a donné un succès et 0 sinon, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ comptabilise le nombre de succès obtenus.

C'est le contexte « naturel » d'une loi binomiale. La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est donc la loi du nombre de succès obtenus lors de n répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire ayant une probabilité p de succès.

Démonstration. Les $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ étant à valeurs dans $\{0, 1\}$, il est clair que $\sum_{i=1}^n X_i$ est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et posons

$$A_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n, x_1 + \dots + x_n = k\}$$

On a alors $\text{Card}(A_k) = \binom{n}{k}$ (il s'agit d'attribuer la valeur 1 à k composantes parmi les n , et la valeur 0 aux autres).

Ainsi :

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) &= P((X_1, \dots, X_n) \in A_k) \\
&= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A_k} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}\right) \\
&= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A_k} \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) \\
&= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A_k} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ x_i=1}}^n \underbrace{P(X_i = x_i)}_{=p} \right) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ x_i=0}}^n \underbrace{P(X_i = x_i)}_{=1-p} \right) \\
&= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A_k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

l'avant-dernière ligne s'expliquant par le fait que puisque $(x_1, \dots, x_n) \in A_k$, k des x_i sont égaux à 1 et $n-k$ sont égaux à 0. □

26.2.6 Lemme des coalitions

Théorème 26.2.40 – Lemme des coalitions

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires **indépendantes** définies sur un espace probabilisé fini. Soit $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Soit f une application définie sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_p(\Omega)$ et g une application définie sur $X_{p+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$. Alors $f(X_1, X_2, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

■ *Démonstration.* Admis. □

Exemple 26.2.41

Si X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 sont des variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{R} , alors $X_1 - X_1 e^{X_2}$ est indépendante de $X_3 X_4 - \cos(X_5)$. De même, $X_2 - X_5$ est indépendante de $X_1 + X_3$ (car $\{2, 5\} \cap \{1, 3\} = \emptyset$). Par contre, rien ne permet d'affirmer que $X_1 X_2$ est indépendante de $X_2 X_3$ (puisque X_2 est dans ces deux expressions).

Théorème 26.2.42 – Lemme des coalitions - extension

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires **indépendantes** définies sur un espace probabilisé fini. Soient A_1, A_2, \dots, A_p des parties de $\llbracket 1; n \rrbracket$, formant une partition de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ^a. Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on considère une application f_i définie sur $\prod_{k \in A_i} X_k(\Omega)$. Alors les variables $(f_i((X_k)_{k \in A_i}))_{i \in I}$ sont indépendantes.

^a. Ces ensembles sont donc non vides, deux-à-deux disjoints et leur réunion vaut $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Exemple 26.2.43

Si X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 sont des variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{R} , alors $X_1 - X_1 e^{X_2}$, $X_3 X_4$ et $\cos(X_5)$ sont indépendantes.

26.3 Exercices**Exercice 26.3.1**

1. Soit X suivant une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{3}$. Déterminer la valeur de k pour laquelle $P(X = k)$ est maximale. (On pourra comparer $\frac{P(X = k+1)}{P(X = k)}$ à 1)
2. Même question mais où X suit une loi binomiale de paramètres n, p .

Exercice 26.3.2

La loi conjointe de deux v.a.r. discrètes X et Y est définie dans le tableau suivant :

(X, Y)	0	1
0	p	$1/3 - p$
1	$1/4 + p$	$5/12 - p$

1. A quel intervalle appartient p ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de p les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 26.3.3

Soit X une v.a.r. dont la loi est donnée par

x	-3	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$1/12$	$1/3$	$1/6$	$1/4$	$1/12$	$1/12$

1. Montrer que ce tableau définit bien une loi de probabilité.
2. Soit $Y = X^2$. Déterminer la loi conjointe de X et Y , puis la loi de Y .

Exercice 26.3.4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant :

1. une boule numérotée 1,
2. deux boules numérotées 2,
3. ...
4. n boules numérotées n .
 - (a) On tire une boule dans cette urne, on note X le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi de X
 - (b) On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise de la première boule tirée. On T_1 le numéro de la première boule et T_2 le numéro de la deuxième boule.
 - i. Déterminer la loi conjointe de T_1 et T_2 .
 - ii. En déduire les lois de T_1 et T_2 .
 - iii. T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 26.3.5

On se donne trois événements A, B, C d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) . Écrire en utilisant l'union, l'intersection et le complémentaire, les événements suivants :

1. Aucun des événements A, B et C n'est réalisé.
2. Tous les événements A, B et C sont réalisés.
3. Un et un seul événement parmi A, B et C est réalisé.
4. Exactement deux des événements A, B et C sont réalisés.
5. Un au plus des événements A, B et C est réalisé.

Exercice 26.3.6

On se donne une famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) . Écrire en utilisant l'union, l'intersection et le complémentaire, les événements suivants :

1. Tous les A_i sont réalisés.
2. Seul l'un des A_i est réalisé.
3. Un au plus des A_i est réalisé.
4. Un nombre fini de A_i est réalisé.
5. Une infinité de A_i sont réalisés.

Exercice 26.3.7

On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 non équilibré, et on sait que la probabilité de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. Déterminer la probabilité de tomber sur un nombre pair.

Exercice 26.3.8

On lance n fois un dé à 6 faces bien équilibré, et on note A_n l'événement "On obtient 6 pour la première fois au n -ième lancer" et B_n l'événement "On n'obtient aucun 6 lors des n lancers".

1. Quel est l'espace probabilisé associé à cette expérience ?
2. Déterminer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un 6 lors des n lancers.

Exercice 26.3.9

On choisit au hasard et de manière équiprobable un code à 5 chiffres de 0 à 9. Quelle est la probabilité que le produit des chiffres de ce code soit pair ?

Exercice 26.3.10

Un supermarché dispose de 150 packs de lait dont 50 avariés. Les clients prennent chacun un pack au hasard, dans l'ordre de leur arrivée. Voulez-vous être le 1er, le 2ème,... ou le 150ème acheteur ?

Exercice 26.3.11

[Le problème de Monty Hall] Ce problème s'inspire du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal* diffusé entre 1963 et 1977 et présenté par Monty Hall.

A la fin du jeu, un seul candidat reste en lice et celui-ci est face à 3 portes identiques. Derrière l'une d'entre elle se

trouve une voiture, et derrière les deux autres une chèvre. Le candidat choisit alors une porte, mais il ne l'ouvre pas tout de suite : il annonce d'abord son choix au présentateur.

Ce dernier, qui connaît l'emplacement de la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes de façon à révéler systématiquement une des chèvres. Après cela, il ne reste plus que deux portes, l'une contenant la voiture et l'autre une chèvre.

Le présentateur propose alors au candidat de modifier son choix et donc de changer de porte. Le candidat ouvre alors la porte choisie et remporte le lot caché derrière celle-ci.

A la place du candidat, changeriez-vous de porte ?

Exercice 26.3.12

$2n$ filles et $2n$ garçons se sont inscrits en CPGE. On les répartit au hasard et de façon équiprobable en deux classes de même effectif. Quelle est la probabilité que ces deux classes contiennent autant de filles que de garçons ?

Exercice 26.3.13

On mélange un jeu de 32 cartes. Dans le tas de cartes obtenu, quelle est la probabilité que :

1. Les quatre as soient consécutifs ?
2. Au moins trois as soient consécutifs ?
3. Exactement 3 as soient consécutifs ?

Exercice 26.3.14

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules de même parité lorsque :

1. On tire les deux boules simultanément.
2. On tire une boule, on ne la remet pas, on tire la deuxième boule.
3. On tire une boule, on la remet, on tire la deuxième boule.

Exercice 26.3.15

Trois étudiants passent une colle de maths, au début de laquelle les sujets sont choisis au hasard et de façon équiprobable par les étudiants. Supposons qu'un des trois sujets soit plus dur que les autres : vaut-il mieux laisser les autres choisir avant vous ?

Exercice 26.3.16

Chaque jour, un même bus scolaire a 1 chance sur 100 d'arriver en retard à sa destination.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement "Le bus est en retard le n -ième jour".

On suppose que les R_n sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que le bus soit à l'heure pour chacun des 25 premiers jours ?
2. A partir de combien de jours le bus a-t-il au moins une chance sur deux d'avoir été au moins une fois en retard ?

Exercice 26.3.17

Un tiroir contient 6 paires de chaussettes (ces paires étant deux-à-deux différentes). On tire au hasard 4 chaussettes. Quelle est la probabilité des événements suivants ?

1. On obtient exactement deux paires complètes.

2. On obtient au moins une paire complète.
3. On obtient exactement une paire complète.

Exercice 26.3.18

1. Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est p avec $p \in]0; 1[$. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, Face ne soit jamais suivi de Pile ?
2. Si on admet que la pièce peut être lancée indéfiniment, est-il possible que Face ne soit jamais suivi de Pile ?

Exercice 26.3.19

Pour entrer dans un club d'échec, Alice doit faire ses preuves : elle doit affronter et remporter la victoire sur deux adversaires, l'un étant plus fort que l'autre. Si on note p la probabilité qu'Alice a de gagner contre l'adversaire le plus faible, et q celle de gagner contre l'adversaire le plus fort, on a donc $p > q$.

Sachant qu'Alice a droit à 3 parties en tout, doit-elle commencer par l'adversaire le plus faible ou le plus fort pour maximiser ses chances d'admission ?

Exercice 26.3.20

Une enquête a été réalisée auprès de français s'étant rendus à Londres pour des raisons touristiques.

Cette enquête révèle que, pour se rendre dans la capitale anglaise,

- 30 % de ces touristes ont utilisé l'avion,
- 50 % ont utilisé le train passant par le tunnel sous la Manche
- et les autres touristes ont traversé la Manche par bateau.

Sur l'ensemble de tous les touristes interrogés, 40 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine.

Parmi les touristes interrogés ayant utilisé l'avion, 20 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine et parmi ceux qui ont choisi le train, 60 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine.

On interroge au hasard un touriste ayant répondu à l'enquête. On suppose que chaque touriste avait la même probabilité d'être choisi.

On note :

- A l'événement « Le touriste interrogé a voyagé en avion ».
- T l'événement « Le touriste interrogé a voyagé en train ».
- B l'événement « Le touriste interrogé a voyagé en bateau ».
- S l'événement « Le touriste interrogé est resté en Angleterre plus d'une semaine ».

1. Déterminer la probabilité que le touriste interrogé ait voyagé en bateau pour se rendre en Angleterre.
2. (a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $A \cap S$.
(b) Déterminer les probabilités $p(A \cap S)$ et $p(T \cap S)$.
3. Montrer que $P(B \cap S) = 0,04$.
4. Déterminer la probabilité que le touriste interrogé ait voyagé en bateau sachant qu'il est resté plus d'une semaine en Angleterre.
5. On interroge au hasard 3 touristes ayant répondu à l'enquête de façon indépendante. On suppose que le nombre de personnes ayant répondu à l'enquête est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard à un tirage avec remise.
Déterminer la probabilité que parmi ces trois touristes se trouve un seul touriste étant resté en Angleterre plus d'une semaine.

Exercice 26.3.21

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.

On prélève au hasard une boule de l'urne.

Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.

Si la première boule est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la boule tirée.

- (a) Quelle est la probabilité que les boules tirées soient rouges ?

- (b) Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.

Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher.

On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

La variable aléatoire X donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et p .

- (a) Donner l'expression de p en fonction de n .

- (b) Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$.

- (c) Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à 0,9999 ?

Exercice 26.3.22

On considère un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n . On y effectue n tirages sans remise, et on note :

— X le numéro du tirage qui a donné le jeton 1.

— Y le numéro du tirage qui a donné le jeton 2.

Dans cette expérience aléatoire, on appelle *issue* tout arrangement de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Combien y a-t-il d'issues telles que X soit égal à k ?
3. Déterminer la loi de X et la loi de Y .
4. Déterminer la loi conjointe de X et de Y . X et Y sont-elles indépendantes ?
5. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. Déterminer la loi conjointe de U et V .
6. En déduire la loi de U et la loi de V .

Chapitre 27

Espérance et variance

27.1	Notion d'espérance	818
27.1.1	Définition	818
27.1.2	Propriétés élémentaires	819
27.1.3	Lois usuelles	821
27.1.4	Variable aléatoire constante	821
27.1.5	Théorème de transfert	822
27.2	Variance, écart-type et covariance	824
27.2.1	Variance et écart-type	824
27.2.2	Variances pour les lois usuelles	826
27.2.3	Covariance	827
27.3	Inégalités probabilistes	830
27.4	Exercices	832

Dans ce chapitre, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

27.1 Notion d'espérance

27.1.1 Définition

Définition 27.1.1 – Espérance d'une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilité fini (Ω, P) , à valeurs dans \mathbb{K} .
L'espérance de X est le nombre

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$$

Remarque 27.1.2

Il s'agit donc de la moyenne des valeurs prises par X , coefficientées par la probabilité associée.

Exemple 27.1.3

Si X représente le lancé d'un dé non truqué à 6 faces, alors l'espérance de X est

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + \cdots + 6 \times P(X=6) \\ &= (1 + 2 + \cdots + 6) \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Définition 27.1.4 – Variable aléatoire centrée

Une variable aléatoire X sur un espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{K} est dite *centrée* si $E(X) = 0$.

Exercice 27.1.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit, au hasard et de manière équiprobable, l'une de racines n -ième de l'unité. On note X le complexe obtenu.
Calculer $E(X)$.

Propriété 27.1.6 – Une autre expression de $E(X)$

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilité fini (Ω, P) , à valeurs dans \mathbb{K} .
Alors

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} x P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} X(\omega) P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})
 \end{aligned}$$

puisque $(\{X=x\})_{x \in X(\Omega)} = (X^{-1}(\{x\}))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. □

27.1.2 Propriétés élémentaires

Propriété 27.1.7 – Linéarité

Soient X, Y deux variables, sur un même espace probabilisé, à valeurs dans \mathbb{K} . Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

■ *Démonstration.* Cela découle directement de la définition 27.1.1 et de la linéarité de la somme. □

Par récurrence immédiate, on obtient :

Propriété 27.1.8

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie de variables aléatoires sur un même espace probabilisé, à valeurs dans \mathbb{K} . Alors

$$E\left(\sum_{i \in I} X_i\right) = \sum_{i \in I} E(X_i)$$

Propriété 27.1.9 – Positivité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, à valeurs réelles. On suppose que X est à valeurs positives, c'est-à-dire que

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$$

Alors $E(X) \geq 0$.

■ *Démonstration.* Immédiat par positivité de la somme. □

Remarque 27.1.10

Bien sûr, la réciproque est fautive. Par exemple, si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket -1; 1 \rrbracket)$, alors

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = 0 \geq 0$$

alors que X prend aussi des valeurs négatives.

Exercice 27.1.11

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, à valeurs positives. Est-il vrai que

$$E(X) = 0 \implies (\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = 0)$$

?

Propriété 27.1.12 – Croissance de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$$

Alors $E(X) \leq E(Y)$.

Démonstration. On applique la propriété précédente à $Y - X$, qui est à valeurs positives. □

Exercice 27.1.13

Soit $X \sim \mathcal{U}([0; n])$, avec $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$E(\ln(1 + X)) \leq \frac{n}{2}$$

Propriété 27.1.14 – Inégalité triangulaire

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini. Alors :

$$|E(X)| \leq E(|X|)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |E(X)| &= \left| \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) \right| \\ &\leq \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega) P(\{\omega\})| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| P(\{\omega\}) = E(|X|) \end{aligned}$$

□

Exercice 27.1.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X \sim \mathcal{U}([0; n-1])$ et $Y = e^{\frac{i\pi X}{n}}$.

1. Déterminer l'espérance de Y .
2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{1}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} \right| \leq \frac{n}{2}$$

27.1.3 Lois usuelles

27.1.4 Variable aléatoire constante

Propriété 27.1.16

Soit X une variable aléatoire constante, égale à $a \in \mathbb{K}$, sur un espace probabilisé fini (Ω, P) . Alors $E(X) = a$.

Démonstration. Par hypothèse, $X(\Omega) = \{a\}$ donc

$$E(X) = \sum_{x \in \{a\}} xP(X=x) = aP(X=a) = aP(\Omega) = a$$

□

Loi de Bernoulli

Propriété 27.1.17 – Espérance d'une loi de Bernoulli

Soit $p \in [0; 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors $E(X) = p$.

Démonstration. On a

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

□

Remarque 27.1.18

Soit A un événement d'un espace probabilisé (Ω, P) . La variable indicatrice de A , notée $\mathbb{1}_A$, suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

On en déduit que $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

On dit souvent qu'« en moyenne, $\mathbb{1}_A$ vaut $P(A)$ ».

Intuitivement, cela signifie que si on réalise, de manière indépendante, un grand nombre de fois une expérience aléatoire pour laquelle l'événement A est appelé un succès, alors la fréquence expérimentale de réalisation de A sera *probablement proche* de $P(A)$.

Si on lance 500 fois une pièce de monnaie non truquée, on s'attend à ce que la proportion de Piles obtenue soit proche de $\frac{1}{2}$.

La *loi faible des grands nombres* permettra, en deuxième année, de légitimer cette intuition.

Loi binomiale

Propriété 27.1.19 – Espérance d'une loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Alors

$$E(X) = np$$

Démonstration. — Par calcul direct :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x \in \llbracket 0; n \rrbracket} x P(X = x) \\
 &= \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= \sum_{x=1}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ car le premier terme est nul} \\
 &= \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= \sum_{x=1}^n x \times \frac{n}{x} \times \frac{(n-1)!}{(x-1)! (n-1-(x-1))!} p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= n \sum_{x=1}^n \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= n \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^{x+1} (1-p)^{n-(x+1)} \\
 &= np \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-1-x} \\
 &= np (p + 1 - p)^{n-1} \text{ d'après la formule du binôme} \\
 &= np
 \end{aligned}$$

— On peut aussi considérer n variables aléatoires indépendantes $(Y_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ de loi $\mathcal{B}(p)$ sur un même espace probabilisé. On sait alors que $\sum_{k=1}^n Y_i \sim \mathcal{B}(n, p)$: $\sum_{k=1}^n Y_i$ a donc même loi, et même espérance, que X .

Par linéarité, on obtient alors

$$E(X) = E\left(\sum_{k=1}^n Y_i\right) = \sum_{k=1}^n E(Y_i) = \sum_{k=1}^n p = np$$

□

27.1.5 Théorème de transfert

Théorème 27.1.20 – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire^a sur un espace probabilisé fini (Ω, P) . Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans \mathbb{K} . Alors :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x)$$

^a. On notera qu'ici, X n'est pas supposée à valeurs dans \mathbb{K} .

Démonstration. $g(X)$ est bien à valeurs dans \mathbb{K} . Son espérance est :

$$\begin{aligned}
 E(g(X)) &= \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega)) P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} g(X(\omega)) P(\{\omega\})
 \end{aligned}$$

car $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} g(x) P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x) \end{aligned}$$

□

Remarque 27.1.21

On notera que X n'est pas supposée à valeurs dans \mathbb{K} (mais $g(X)$ l'est). Cela signifie que le théorème de transfert s'applique aussi, par exemple, si X est à valeurs dans \mathbb{K}^2 (et même, plus généralement, si X est un couple, un triplet, ou même une famille de variables aléatoires).

Exercice 27.1.22

Soit $X \sim \mathcal{U}([-2; 3])$. Déterminer, de deux façons différentes, l'espérance de X^2 .

Exercice 27.1.23

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([0; n])$. Déterminer l'espérance de X , de Y et de $Z = \max(X, Y)$.

Propriété 27.1.24 – Cas de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** sur un même espace probabilisé fini (Ω, P) . Alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Remarque 27.1.25

La réciproque est fautive : $E(XY) = E(X)E(Y)$ n'implique pas que X et Y sont indépendantes.

Démonstration. On applique le théorème de transfert à la variable aléatoire (X, Y) et la fonction $g : (x, y) \mapsto xy$. Ainsi :

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(g(X, Y)) \\ &= \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y) P((X, Y) = (x, y)) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy P(X = x) P(Y = y) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) \sum_{y \in Y(\Omega)} y P(Y = y) \\ &= E(X) E(Y) \end{aligned}$$

□

27.2 Variance, écart-type et covariance

27.2.1 Variance et écart-type

Définition 27.2.1 – Variance,

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{K} .

On appelle *variance de X* le nombre

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

On appelle *écart-type de X* le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Lorsque $V(X) = 1$, on dit que X est *réduite*.

Remarque 27.2.2

- La variance et l'écart-type sont des indicateurs de dispersion. Plus ils sont élevés, plus X prend, en moyenne, des valeurs éloignées de son espérance.
- Dire que X est réduite revient aussi à dire que $\sigma(X) = 1$.

En pratique, on utilise souvent la formule de Koenig-Huygens pour calculer une variance.

Propriété 27.2.3 – Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{K} .

Alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration. On développe :

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(E(X)^2) && \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

□

Exercice 27.2.4

Soit $X \sim \mathcal{U}([1; n])$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $V(X)$.

Propriété 27.2.5

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{K} .

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E\left((aX + b - E(aX + b))^2\right) \\ &= E\left((aX + b - aE(X) - E(b))^2\right) \\ &= E\left((aX + b - aE(X) - b)^2\right) \\ &= E\left(a^2(X - E(X))^2\right) \\ &= a^2 E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

par linéarité de l'espérance. □

Exercice 27.2.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois, de façon indépendante, un dé équilibré à 6 faces. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_k le numéro obtenu lors du lancer k .

Enfin, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

Calculer $V(S_n)$ et sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$. Comment interpréter ce résultat ?

Propriété 27.2.7 – Variable aléatoire centrée réduite associée à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que $\sigma(X) \neq 0$.

La variable aléatoire $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée *variable aléatoire centrée réduite associée à X* . Comme son nom l'indique, elle est centrée et réduite.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} E(X^*) &= \frac{1}{\sigma(X)} (E(X) - E(E(X))) \\ &= \frac{1}{\sigma(X)} (E(X) - E(X)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(X^*) &= \frac{1}{\sigma(X)^2} V(X - E(X)) \\ &= \frac{1}{V(X)} V(X) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

27.2.2 Variances pour les lois usuelles

Propriété 27.2.8 – Variance pour une loi de Bernoulli

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$, où $p \in [0; 1]$. Alors

$$V(X) = p(1 - p)$$

Démonstration. On a, par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x \in \{0,1\}} x^2 P(X=x) \\ &= 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) \\ &= p \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

□

Propriété 27.2.9 – Variance pour une loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Alors

$$V(X) = np(1 - p)$$

Démonstration. Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{x=0}^n x(x-1) P(X=x) \\ &= \sum_{x=2}^n x(x-1) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=2}^n x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=2}^n \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-2-(x-2))!} p^{x-2} (1-p)^{n-2-(x-2)} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \binom{n-2}{x-2} p^{x-2} (1-p)^{n-2-(x-2)} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{x=0}^{n-2} \binom{n-2}{x} p^x (1-p)^{n-2-x} \\ &= n(n-1)p^2 (p+1-p)^{n-2} \\ &= n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
 &= E(X(X-1) + X) - E(X)^2 \\
 &= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 \\
 &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
 &= np((n-1)p + 1 - np) \\
 &= np(1-p)
 \end{aligned}$$

□

27.2.3 Covariance

Définition 27.2.10 – Covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé (Ω, P) , à valeurs dans \mathbb{K} .
On appelle *covariance de X et Y* le nombre

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont *décorrélées*.

Propriété 27.2.11 – Formule de Koenig-Huygens pour la covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé (Ω, P) , à valeurs dans \mathbb{K} .
Alors

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Remarque 27.2.12

Si $X = Y$, on retrouve la variance :

$$\text{Cov}(X, X) = V(X)$$

Démonstration. Comme pour la variance, il suffit de développer.

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\
 &= E(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)) \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(E(X)E(Y)) \\
 &= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y)
 \end{aligned}$$

□

Propriété 27.2.13

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé (Ω, P) , à valeurs dans \mathbb{K} .
Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Démonstration. Si X et Y sont indépendantes, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$ donc

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

□

Remarque 27.2.14

La réciproque est fausse !

Exemple 27.2.15

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. dont la loi est

X \ Y	0	1
0	1/6	1/4
20	1/4	0
21	0	1/3

Montrer que X et Y sont non corrélées. Sont-elles indépendantes ?

Propriété 27.2.16

Soient X, Y, Z, T quatre variables aléatoires sur un espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{K} . Alors :

— $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ (la covariance est **symétrique**).

— Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$$

(la covariance est **linéaire à gauche**)

— Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\text{Cov}(X, aZ + bT) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(X, T)$$

(la covariance est **linéaire à droite**)

— Pour tout réels a, b, c, d on a

$$\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\text{Cov}(X, Y)$$

Démonstration. — Trivial par définition de la covariance.

— $\text{Cov}(aX + bY, Z) = E((aX + bY)Z) - E(aX + bY)E(Z) = E(aXZ + bYZ) - (aE(X) + bE(Y))E(Z) = aE(XZ) + bE(YZ) - aE(X)E(Z) - bE(Y)E(Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$

— Exercice

— D'après les deux points précédents : $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = a\text{Cov}(X, cY + d) + b\text{Cov}(1, cY + d) = a(c\text{Cov}(X, Y) + d\text{Cov}(X, 1)) + b(c\text{Cov}(1, Y) + d\text{Cov}(1, 1))$ or $\text{Cov}(X, 1) = E(X \times 1) - E(X)E(1) = E(X) - E(X) = 0$ et de même $\text{Cov}(1, Y) = \text{Cov}(1, 1) = 0$: ainsi il ne reste que

$$\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\text{Cov}(X, Y)$$

□

Propriété 27.2.17 – Variance d'une somme

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé (Ω, P) , à valeurs dans \mathbb{K} . Alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
 V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 \\
 &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\
 &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 \\
 &= V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)
 \end{aligned}$$

□

Propriété 27.2.18

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé (Ω, P) , à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose X et Y décorrélées. Alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Démonstration. Immédiat d'après la formule précédente puisque, dans ce cas :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

□

Propriété 27.2.19

Soient X_1, X_2, \dots, X_n (avec $n \geq 2$) des variables aléatoires sur un même espace probabilisé fini (Ω, P) , à valeurs dans \mathbb{K} .

Alors :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

En particulier, si X_1, X_2, \dots, X_n sont deux-à-deux décorrélées, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Remarque 27.2.20

Rappelons que si X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes alors elles sont 2-à-2 indépendantes donc 2-à-2 décorrélées.

Démonstration. Le cas particulier est évident car si les X_i sont deux-à-deux décorrélées, on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $i \neq j$: $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

Démontrons le cas général par récurrence : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ on note \mathcal{P}_n : "pour toutes variables X_1, X_2, \dots, X_n

à valeurs dans \mathbb{K} , on a $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$ ".

— Le cas $n = 2$ a déjà été vu.

— Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ fixé et supposons \mathcal{P}_n vraie. Soient X_1, X_2, \dots, X_{n+1} des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{K} .

Alors :

$$\begin{aligned}
 V\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i\right) &= V\left(\sum_{i=1}^n X_i + X_{n+1}\right) \\
 &= V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) + V(X_{n+1}) + 2\operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, X_{n+1}\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) + V(X_{n+1}) + 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{Cov}(X_i, X_{n+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} V(X_i) + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) + \underbrace{2 \sum_{i=1}^n \operatorname{Cov}(X_i, X_{n+1})}_{\text{terme correspondant à } j=n+1} \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} V(X_i) + 2 \sum_{j=2}^{n+1} \sum_{i=1}^{j-1} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)
 \end{aligned}$$

par H.R. et linéarité à gauche de la covariance. Ainsi :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

□

Remarque 27.2.21

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in [0; 1]$. Alors $\sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{B}(n, p)$ et on retrouve ainsi la variance d'une loi binomiale :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = \sum_{k=1}^n p(1-p) = np(1-p)$$

27.3 Inégalités probabilistes

Théorème 27.3.1 – Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que X est à valeurs positives. Alors :

$$\forall a > 0, P([X \geq a]) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP([X = x]) \\
 &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} xP([X = x]) + \underbrace{\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} xP([X = x])}_{\geq 0} \\
 &\geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} \underbrace{xP([X = x])}_{\geq aP([X = x])} \\
 &\geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} aP([X = x]) \\
 &= a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} P([X = x]) \\
 &= aP([X \geq a])
 \end{aligned}$$

□

Théorème 27.3.2 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, à valeurs dans \mathbb{R} .

On a

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque 27.3.3

Ce théorème permet de contrôler la probabilité que X soit à une distance de $E(X)$ supérieure à ε (le nombre $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$ étant la probabilité que la distance de X à son espérance soit supérieure à ε). Cette probabilité est d'autant plus petite que la variance de X est petite ou que ε est grand.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On a, d'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable $(X - E(X))^2$:

$$\begin{aligned}
 P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) &= P([(X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2]) \\
 &\leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\varepsilon^2} \\
 &\leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}
 \end{aligned}$$

□

Exemple 27.3.4

On effectue n lancers indépendants d'une pièce équilibrée. On note X_n le nombre de piles obtenus lors de ces n lancers, et $F_n = \frac{X_n}{n}$ la fréquence de ces piles.

Estimer le nombre de lancers nécessaires pour avoir 95% de chances que l'écart entre F_n et $1/2$ soit strictement inférieur à $1/100$.

Remarque 27.3.5

Attention : Nous n'avons pas utilisé la loi de F_n , seulement son espérance et sa variance : nous n'avons donc pas utilisé toute l'information disponible, ainsi la valeur minimale trouvée pour n n'est probablement pas optimale.

27.4 Exercices**Exercice 27.4.1 – Utiliser une loi conditionnelle**

Une première urne contient n boules numérotées de 1 à n . On y effectue un premier tirage et on note X le numéro obtenu.

On considère alors une autre urne contenant X boules numérotées de 1 à X et on y effectue un tirage. On note Y le résultat.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer, pour tout $x \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la loi de Y conditionnée par $(X = x)$.
3. En déduire la loi de Y . On montrera que pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$P([Y = j]) = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$$

et on ne cherchera pas à calculer cette somme.

4. Justifier que Y admet une espérance et montrer que

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2 \\ j \leq i}} \frac{j}{i}$$

5. Calculer alors $E(Y)$ en fonction de n .
6. Calculer $V(Y)$.

Exercice 27.4.2 – Variance et covariance

On reprend les notations de l'exercice 27.4.1.

1. Montrer que $X - Y + 1$ et Y ont même loi.
2. En déduire que $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}V(X)$ et calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
3. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Koenig-Huygens pour la covariance.

Exercice 27.4.3 – Covariance

Les n clients d'un restaurant ont le choix entre 3 menus, nommés A , B et C . Chaque client choisi exactement un menu et leurs choix sont indépendants les uns des autres.

On note X_A (respectivement X_B , X_C) le nombre de clients qui ont choisi le menu A (respectivement B , C).

1. Quelle est la loi de X_A , X_B , X_C ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de $X_A + X_B$. On pourra exprimer $X_A + X_B$ en fonction de n et X_C .
3. En déduire $\text{Cov}(X_A, X_B)$.

Exercice 27.4.4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant :

1. une boule numérotée 1,
 2. deux boules numérotées 2,
 3. ...
 4. n boules numérotées n .
- (a) On tire une boule dans cette urne, on note X le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi de X et son espérance.
 - (b) On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise de la première boule tirée. On T_1 le numéro de la première boule et T_2 le numéro de la deuxième boule.
 - i. Déterminer la loi conjointe de T_1 et T_2 .
 - ii. En déduire les lois de T_1 et T_2 .
 - iii. T_1 et T_2 sont-elles indépendantes?
 - iv. Déterminer l'espérance de $T_1 + T_2$.

Exercice 27.4.5

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient N boules dont $N - 2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, successivement et sans remise, les N boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N , on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro de tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Préciser l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.
2. Soient i et j deux entiers de $\llbracket 1; N \rrbracket$. Montrer que l'on a

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$

3. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et X_2 . X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?
4. Montrer que $N + 1 - X_2$ a même loi que X_1 .
5. Déterminer la loi de $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1 .
6. A l'aide des résultats précédents :
 - (a) Déterminer $E(X_1)$ et $E(X_2)$
 - (b) Montrer que $V(X_1) = V(X_2)$
 - (c) Montrer que $2\text{Cov}(X_1, X_2) = V(X_1)$
7. Calculer $V(X_1)$. En déduire $V(X_2)$ et $\text{Cov}(X_1, X_2)$. On pourra admettre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

TeX

Exercice 27.4.6

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = 1$ avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et -1 avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer l'espérance de e^{tX_n} .
2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on pose $S_N = \sum_{n=0}^N X_n$. Déterminer l'espérance de S_N puis l'espérance de e^{tS_N} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 27.4.7

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y_n , son espérance et sa variance.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conjointe et la covariance de Y_n et Y_{n+1} .
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, déterminer la loi conjointe de Y_n et Y_{n+k} . Les variables Y_n et Y_{n+k} sont-elles indépendantes ?
4. Calculer l'espérance et la variance de T_n .

Exercice 27.4.8

Une urne contient N boules blanches ou noires, parmi lesquelles la proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est $q = 1 - p$. On tire n boules simultanément et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

1. Quelle est la loi de X ?
2. On suppose maintenant que les boules blanches sont numérotées de 1 à Np et, pour tout $i \in \llbracket 1; Np \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement "la i -ième boule blanche est tirée". Autrement dit $X_i = 1$ si la boule blanche numéro i a été tirée et 0 sinon.
 - (a) Pour tout $i \in \llbracket 1; Np \rrbracket$, déterminer l'espérance et la variance de X_i .
 - (b) Pour tout $i, j \in \llbracket 1; Np \rrbracket$ avec $i \neq j$, déterminer la covariance de X_i et X_j .
 - (c) En déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 27.4.9

Soient a et n dans \mathbb{N} , $n \geq 2$. On considère n boutiques et na clients. Chaque client entre dans une boutique et une seule de façon équiprobable.

1. Soit Y la v.a.r. égale au nombre de boutique qui n'ont pas eu de client. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$. (Considérer Y_i qui vaut 1 si la boutique i n'a pas eu de client et 0 sinon)
2. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit X_i la v.a.r. égale au nombre de client dans la i -ième boutique.
 - (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i .
 - (b) Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $i \neq j$. Calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$ (on pourra commencer par considérer la v.a.r. $S = \sum_{k=1}^n X_k$ et calculer $V(S)$).

Exercice 27.4.10

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire une poignée aléatoire (éventuellement vide) de jetons de ce sac et on suppose que toutes les poignées sont équiprobables. On note S la somme des numéros des jetons tirés ($S = 0$ si la poignée est vide). Pour tout entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la v.a.r. qui vaut 1 si le jeton i a été tiré et 0 sinon.

1. Combien y a-t-il de poignées possibles ? Combien de poignées contiennent le jeton i ? En déduire la loi de X_i .
2. Montrer que les X_i sont deux-à-deux indépendantes.
3. Exprimer S en fonction de X_1, X_2, \dots, X_n . En déduire l'espérance et la variance de S .

Chapitre 28

Déterminants

28.1	Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base	838
28.1.1	Définition	838
28.1.2	En dimension 2	840
28.1.3	En dimension 3	841
28.1.4	Déterminants et bases	842
28.2	Déterminant d'un endomorphisme	844
28.2.1	Définition	844
28.2.2	Composition	845
28.3	Déterminant d'une matrice carrée	846
28.4	Calcul effectif de déterminants	847
28.4.1	Opérations élémentaires	847
28.4.2	Développement par rapport à une ligne ou colonne	850

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

28.1 Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base

28.1.1 Définition

Définition 28.1.1 – Déterminant relatif à une base

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n , et \mathcal{B} une base de E .

Il existe une unique application, notée $\det_{\mathcal{B}}$, de E^n vers \mathbb{K} telle que :

- $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables : pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, pour tout $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in E$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tout $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} & \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x + \mu y, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ & \quad + \mu \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

- $\det_{\mathcal{B}}$ est *alternée* : pour toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ comportant (au moins) deux vecteurs égaux, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 0$$

- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est appelée *déterminant relativement à la base \mathcal{B}* .

■ *Démonstration.* Admis.

Remarque 28.1.2

- Le fait que $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables signifie que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'application

$$\begin{array}{ll} E & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

est linéaire.

- Le fait que $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée implique que, pour toute $\mathcal{F} \in E^n$ et toute famille \mathcal{F}' obtenue en permutant deux vecteurs de \mathcal{F} , on a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = -\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}')$.

En effet, en notant $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ et $\mathcal{F}' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$ (les termes de rangs i et j , avec $i < j$, ont été permutés), on a

$$\begin{aligned}
0 &= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\
&\quad + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\
&\quad \quad \quad = 0 \\
&= \overbrace{\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)} \\
&\quad + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\
&\quad + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) \\
&\quad + \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{=0}
\end{aligned}$$

donc

$$0 = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

et

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ = -\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Exercice 28.1.3

Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer

$$\det_{\mathcal{B}}((1, 0, -2), (0, 1, -1), (0, 0, 3))$$

Théorème 28.1.4

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, et \mathcal{B} une base de E .

Soit f une application de E^n vers \mathbb{K} , linéaire par rapport à chacune de ses variables et alternée.

Alors f est un multiple de $\det_{\mathcal{B}}$, autrement dit il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

Démonstration. — Supposons que $f(\mathcal{B}) \neq 0$. L'application $\varphi = \frac{1}{f(\mathcal{B})}f$ est alors linéaire par rapport à chaque variable, alternée et vérifie

$$\varphi(\mathcal{B}) = \frac{1}{f(\mathcal{B})}f(\mathcal{B}) = 1$$

Par unicité du déterminant relativement à \mathcal{B} , on a alors $\varphi = \det_{\mathcal{B}}$ ou encore $f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

— Supposons au contraire que $f(\mathcal{B}) = 0$. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ et notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. \mathcal{B} étant une base de E , pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $(a_{i,j})_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f((x_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket}) &= f\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} f\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} e_{i_n}\right) \text{ par linéarité} \\ &\quad \text{par rapport à la première variable} \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1,1} a_{i_2,2} f\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} e_{i_n}\right) \text{ par linéarité} \\ &\quad \text{par rapport à la seconde variable} \\ &= \dots \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

Cependant, et puisque f est alternée, $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ est nul si $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ comporte deux vecteurs égaux. Il ne reste donc que les $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ pour lesquels les $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ sont deux-à-deux distincts : la famille $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ est alors obtenue en permutant les vecteurs de \mathcal{B} , de sorte que $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \pm f(\mathcal{B}) = 0$. Ainsi, $f((x_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket}) = 0$ pour tout $(x_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in E^n$ et f est l'application nulle :

$$f = 0 = 0 \cdot \det_{\mathcal{B}}$$

□

28.1.2 En dimension 2

Formule (le « produit en croix »)

Propriété 28.1.5

Soit \mathcal{B} une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension 2. Soient x_1, x_2 deux vecteurs de E de sorte que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Démonstration. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

On a :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) &= \det_{\mathcal{B}}(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2) \\ &= a_{1,1}\det_{\mathcal{B}}(e_1, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2) + a_{2,1}\det_{\mathcal{B}}(e_2, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2) \\ &= a_{1,1}a_{1,2}\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_1) + a_{1,1}a_{2,2}\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) \\ &\quad + a_{2,1}a_{1,2}\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_1) + a_{2,1}a_{2,2}\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_2) \\ &= 0 + a_{1,1}a_{2,2}\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) - a_{1,2}a_{2,1}\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) + 0 \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \end{aligned}$$

□

Exercice 28.1.6

Dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_1[X]$, déterminer $\det_{\mathcal{B}}(P, Q)$ où $P = 1 + X$ et $Q = 2 - 3X$.

Interprétation dans la base canonique de \mathbb{R}^2

Dans cette partie, on considère le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Pour tous vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire algébrique¹ du parallélogramme délimité par u et v (voir la figure 28.1).

On montre alors que \mathcal{A} est linéaire par rapport à ses deux variables et est alternée. De plus, $\mathcal{A}(e_1, e_2) = 1$ (c'est l'aire du carré engendré par e_1 et e_2) (voir les figures 28.1 et 28.2).

La définition 28.1.1 assure alors que \mathcal{A} est en fait le déterminant relativement à la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 .

Autrement dit, si on note (a, b) (respectivement (c, d)) les coordonnées de u (respectivement v) dans la base \mathcal{B} , alors

1. Positive si, pour passer de u à v , on tourne dans le sens direct (comme pour passer de e_1 à e_2 , négative sinon)

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u, v) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\mathcal{A}(u, v) = \det_{\mathcal{B}}(u, v) = ad - bc$$

L'aire absolue du parallélogramme est alors $|ad - bc|$.

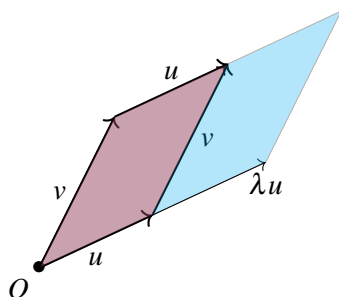


FIGURE 28.1 – $\mathcal{A}(\lambda u, v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$ (même raisonnement pour la seconde variable).

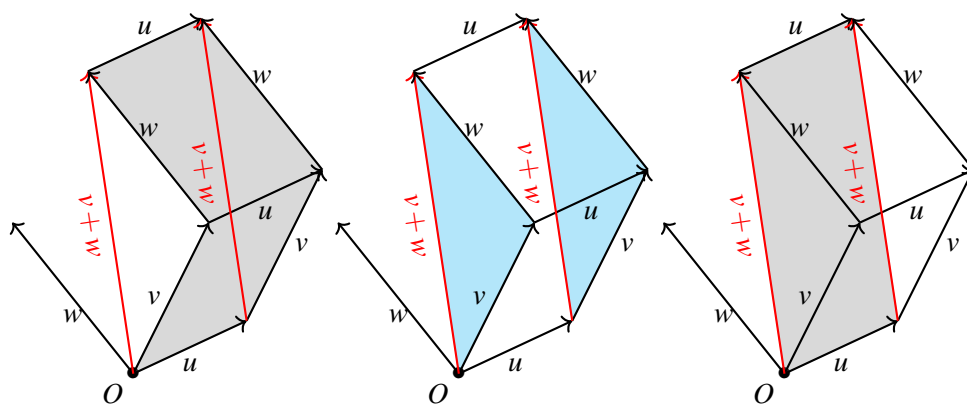


FIGURE 28.2 – Les deux triangles bleu de la figure centrale étant identiques, on observe que $\mathcal{A}(u, v + w) = \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(u, w)$. Le raisonnement est le même pour la seconde variable.

28.1.3 En dimension 3

Propriété 28.1.7 – Règle de Sarrus

Soit \mathcal{B} une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension 3.

Soient $x_1, x_2, x_3 \in E$, avec

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3) = & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ & - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} - a_{3,3}a_{1,2}a_{2,1} \end{aligned}$$

■ *Démonstration.* La preuve est la même qu'en dimension 2. □

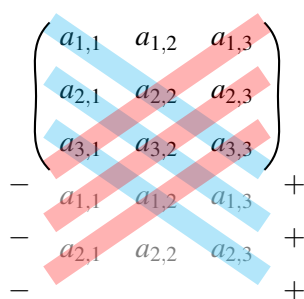


FIGURE 28.3 – La règle de Sarrus

Exemple 28.1.8

Soit $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (0, 2, 2)$, $x_3 = (1, 2, 3)$ et \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$.

Remarque 28.1.9

En pratique, la règle de Sarrus présente quelques inconvénient : beaucoup de calculs sont en jeu, et l'expression obtenue n'est pas factorisée.

Toutefois, elle peut être pratique dans les cas de matrices comportant beaucoup de zéros.

Interprétation dans la base canonique de \mathbb{R}^3

De la même façon que dans \mathbb{R}^2 , si \mathcal{B} est la base canonique de \mathbb{R}^3 et u, v, w sont trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , alors $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$ est le volume algébrique du parallélépipède engendré par u, v et w .

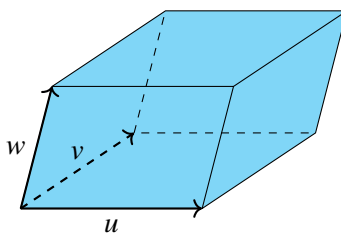


FIGURE 28.4 – Si \mathcal{B} est la base canonique de \mathbb{R}^3 , alors $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$ est l'aire algébrique du parallélépipède engendré par u, v et w .

28.1.4 Déterminants et bases

Propriété 28.1.10

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . Alors

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

Autrement dit :

$$\forall X \in E^n, \det_{\mathcal{B}'}(X) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(X)$$

Remarque 28.1.11

Pour $X = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, la notation « $f(X)$ » désigne la famille $(f(x_1), \dots, f(x_n)) = (f(x_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$.

Démonstration. Puisque $\det_{\mathcal{B}'}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables et est alternée, on sait d'après le théorème 28.1.4 qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

En particulier, en évaluant cette égalité en \mathcal{B} :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

donc

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

□

Propriété 28.1.12 – Caractérisation des bases

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et \mathcal{B} une base de E .

Soit $\mathcal{F} \in E^n$.

Alors

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

De plus, si \mathcal{F} est une base de E , alors $(\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))^{-1} = \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$.

Démonstration. — Supposons que \mathcal{F} est une base de E . D'après 28.1.10, on a

$$\det_{\mathcal{F}} = \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

et en évaluant en \mathcal{F} :

$$1 = \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est non nul et son inverse est $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$.

— Pour la réciproque, notons $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et raisonnons par contraposée. Supposons que \mathcal{F} n'est pas une base de E . En particulier, \mathcal{F} est donc liée (sinon \mathcal{F} serait une base de E puisque $\text{Card}(\mathcal{F}) = n = \dim(E)$).

Un des vecteurs de \mathcal{F} est donc combinaison linéaire des autres : il existe $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $(a_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0\}} \in \mathbb{K}^{\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i_0\}}$ tels que

$$x_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n a_i x_i$$

Par linéarité de $\det_{\mathcal{B}}$ par rapport à la i_0 -ème variable, on a alors :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0}, x_{i_0+1}, \dots, x_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}}\left(x_1, \dots, x_{i_0-1}, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n a_i x_i, x_{i_0+1}, \dots, x_n\right) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n a_i \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_i, x_{i_0+1}, \dots, x_n)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

En effet, puisque $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée, chacun des termes de cette somme est nul (le vecteur x_i y apparaît toujours deux fois).

Par contraposée, on a bien montré que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0 \implies \mathcal{F}$ est une base de E .

□

Exercice 28.1.13

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ la famille $((1, a, a^2), (1, 0, a), (a - 1, 0, a + 1))$ est-elle une base du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^3 ?

28.2 Déterminant d'un endomorphisme

28.2.1 Définition

Définition 28.2.1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n . Soit \mathcal{B} une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ ne dépend pas du choix de \mathcal{B} . On l'appelle *déterminant de f* et on note

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$$

Démonstration. Soit \mathcal{B}' une base de E . Il s'agit de montrer que $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}'))$.

D'une part, et d'après 28.1.10, on a

$$\det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}')) \quad (28.1)$$

D'autre part, considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ X = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(X)) = \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{aligned}$$

Il est clair que φ est alternée (si la famille $X \in E^n$ contient deux vecteurs identiques, alors $f(X)$ aussi), et par linéarité de f , φ est linéaire par rapport à chacune de ses variables. D'après le théorème 28.1.4, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall X \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(X)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(X)$$

Avec $X = \mathcal{B}$, on obtient alors

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

et ainsi

$$\forall X \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(X)) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(X) \quad (28.2)$$

(28.2) appliquée à $X = \mathcal{B}'$ donne alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}')) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \quad (28.3)$$

(28.1) devient alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$$

puisque, d'après 28.1.12, $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

□

Exemple 28.2.2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, dont \mathcal{B} est une base. Alors :

$$\det(\text{Id}_E) = \det_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$$

Exercice 28.2.3

Soit l'endomorphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P - 2XP' + P(-1)X^2 \end{aligned}$$

Calculer son déterminant.

28.2.2 Composition**Propriété 28.2.4 – Déterminant et composition**

Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie non nulle. Alors

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$$

Démonstration. Soit \mathcal{B} une base de E . Tout comme dans la preuve de la définition 28.2.1, on montre que

$$\forall X \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(X)) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(X) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(X)$$

Il suffit alors d'appliquer cette relation à $X = g(\mathcal{B})$ pour conclure. □

Propriété 28.2.5 – Caractérisation des automorphismes

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie non nulle. Alors

$$f \text{ est un automorphisme} \iff \det(f) \neq 0$$

et dans ce cas $(\det(f))^{-1} = \det(f^{-1})$.

Démonstration. Soit \mathcal{B} une base de E . Alors, d'après 28.1.12 :

$$\begin{aligned} f \text{ est un automorphisme} &\iff f(\mathcal{B}) \text{ est une base de } E \\ &\iff \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \neq 0 \\ &\iff \det(f) \neq 0 \end{aligned}$$

De plus, si f est un automorphisme, alors

$$1 = \det(\text{Id}_E) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(f) \det(f^{-1})$$

$$\text{donc } \det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

□

28.3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 28.3.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle *déterminant de A* le déterminant, relativement à la base canonique de \mathbb{K}^n , de la famille formée des colonnes de A . On note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Propriété 28.3.2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, et \mathcal{B} une base de E .

— Soit $\mathcal{F} \in E^n$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$$

— Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$$

Démonstration. Le premier tiret s'explique par le fait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ s'exprime, en développant, en fonction des coordonnées des vecteurs de \mathcal{F} dans la base \mathcal{B} . Or, pris dans le même ordre, il s'agit aussi des coordonnées des vecteurs colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

Le second tiret est une conséquence du premier :

$$\det(A) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det(f)$$

□

Propriété 28.3.3 – Produit matriciel et déterminant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Démonstration. Soient f_A et f_B les endomorphismes canoniquement associés à A et B . Alors :

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_B)) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A \circ f_B)) \\ &= \det(f_A \circ f_B) \\ &= \det(f_A) \det(f_B) \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

□

Propriété 28.3.4 – Déterminant et inversibilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

Dans ce cas, on a $(\det(A))^{-1} = \det(A^{-1})$.

Démonstration. En notant f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\iff f_A \text{ est un automorphisme} \\ &\iff \det(f_A) \neq 0 \\ &\iff \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

De plus, si A est inversible, on a alors

$$(\det(A))^{-1} = (\det(f_A))^{-1} = \det(f_A^{-1}) = \det(A^{-1})$$

puisque A^{-1} est la matrice canoniquement associée à f^{-1} . □

Propriété 28.3.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 28.3.6

Dans la partie suivante, nous étudierons le comportement du déterminant vis-à-vis des opérations élémentaires sur les colonnes. Cette propriété assure alors que ces mêmes opérations élémentaires peuvent être effectuées sur les lignes.

28.4 Calcul effectif de déterminants

28.4.1 Opérations élémentaires

Propriété 28.4.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Démonstration. En notant \mathcal{B} la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et C_1, C_2, \dots, C_n les colonnes de A :

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det_{\mathcal{B}}(\lambda C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_n) \\ &= \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(C_1, C_2, \dots, C_n) \\ &= \lambda^n \det(A) \end{aligned}$$

en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chaque vecteur colonne. □

Propriété 28.4.2 – Déterminant et opérations élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit A' une matrice obtenue en permutant deux colonnes de A . Alors

$$\det(A') = -\det(A)$$

2. Soit A' une matrice obtenue en multipliant une colonne de A par $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\det(A') = \lambda \det(A)$$

3. Soit A' une matrice obtenue en ajoutant, à une colonne de A , une combinaison linéaire des autres. Alors

$$\det(A') = \det(A)$$

Démonstration. On note \mathcal{B} la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et C_1, C_2, \dots, C_n les colonnes de A , dans cet ordre.

1. Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $i < j$. Notons A' la matrice obtenue en permutant les colonnes i et j de A . Alors :

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= -\det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= -\det(A) \end{aligned}$$

d'après la remarque 28.1.2.

2. Conséquent directe de la linéarité par rapport à chaque variable.

3. Soit $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et $(\lambda_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{j_0\}} \in \mathbb{K}^{\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{j_0\}}$. Soit A' la matrice obtenue à partir de A , en ajoutant à colonne j_0 la somme $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \lambda_j C_j$. Alors :

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det_{\mathcal{B}} \left(C_1, \dots, C_{j_0-1}, C_{j_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \lambda_j C_j, C_{j_0+1}, \dots, C_n \right) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \lambda_j \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{j_0-1}, C_j, C_{j_0+1}, \dots, C_n)}_{=0 \text{ car } C_j \text{ apparaît deux fois}} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

□

Remarque 28.4.3

Le déterminant d'une matrice carrée étant égal au déterminant de sa transposée, ces opérations peuvent aussi être effectuées, avec les mêmes effets, sur les lignes de A .

Propriété 28.4.4 – Déterminant d'une matrice triangulaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Alors $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux de A :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

Démonstration. Quitte à transposer, on peut supposer que A est triangulaire supérieure. On a alors :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Les opérations $(C_2 \leftarrow C_2 - a_{1,2}C_1)$, $(C_3 \leftarrow C_3 - a_{1,3}C_1)$, ..., $(C_n \leftarrow C_n - a_{1,n}C_1)$ donnent alors :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En réitérant le procédé, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}a_{2,2} \cdots a_{n,n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} \cdots a_{n,n} \det(I_n) \\ &= a_{1,1}a_{2,2} \cdots a_{n,n} \end{aligned}$$

□

Exercice 28.4.5

Calculer

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & -2 \\ -5 & -8 & -7 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ -7 & -16 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

Exercice 28.4.6

Calculer

$$\begin{vmatrix} 2 & i & 3i \\ -2i & 2-3i & -3i \\ 2i & -i & 2-i \end{vmatrix}$$

Exercice 28.4.7Déterminer, en fonction de $x \in \mathbb{K}$, le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exercice 28.4.8

Déterminer une expression factorisée de

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

où a, b, c sont des réels fixés.**28.4.2 Développement par rapport à une ligne ou colonne****Théorème 28.4.9 – Développement par rapport à une ligne ou une colonne**Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on note $\Delta_{i,j}(A)$ la matrice obtenue à partir de A , en lui supprimant sa i -ième ligne et sa j -ième colonne.— **Développement par rapport à une ligne :** Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\Delta_{i,j}(A))$$

— **Développement par rapport à une colonne :** Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\Delta_{i,j}(A))$$

Par exemple, posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et développons son déterminant par rapport à la deuxième ligne. On obtient :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{2+1} \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+3} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 + (1 \times (-2) - 1 \times 1) + (1 \times 0 - (-1) \times 1) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Exercice 28.4.10

Retrouver le résultat de l'exercice précédent en développant par rapport à la première colonne.

Exercice 28.4.11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, on pose

$$V_n(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^n & \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix}$$

1. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

Montrer que le polynôme $V_n(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, X) \in \mathbb{C}[X]$ est de degré inférieur ou à égal à n .

2. Déterminer les racines et le coefficient dominant de ce polynôme. En déduire que

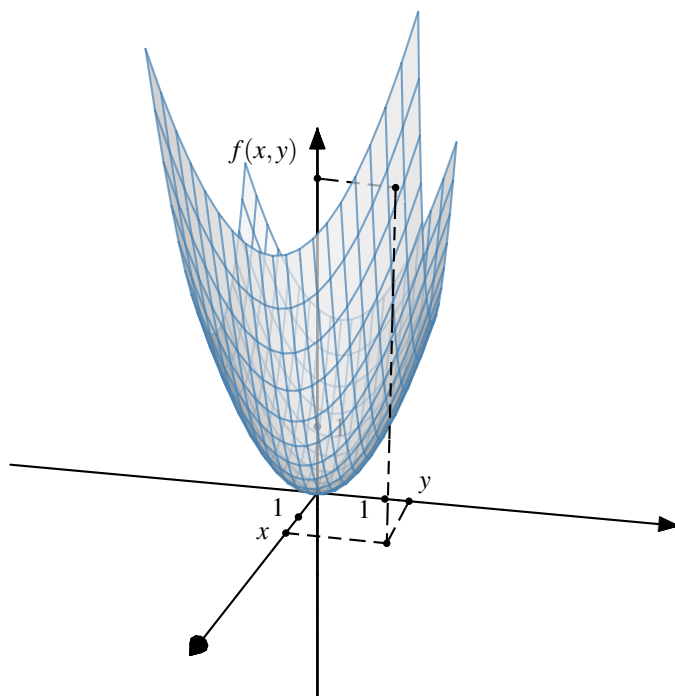
$$V_n(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, X) = V_{n-1}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (X - \lambda_i)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Déterminer une relation entre $V_n(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ et $V_{n-1}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$.
4. Exprimer alors, le plus simplement possible, $V_n(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$.

Chapitre 29

Fonctions à deux variables

29.1	Parties ouvertes	854
29.2	Continuité	856
29.3	Dérivation	857
29.3.1	Dérivées partielles	857
29.3.2	Plan tangent	859
29.3.3	Produit scalaire euclidien	861
29.3.4	Gradient	862
29.3.5	Dérivation selon un vecteur	863
29.3.6	Règle de la chaîne	866
29.3.7	Lignes de niveau	867
29.3.8	Composition	869
29.4	Extrema	871

FIGURE 29.1 – La surface représentative de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux fonctions définies sur une partie U de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} .

Une telle fonction f sera représentée, dans un repère de \mathbb{R}^3 , par une surface : à chaque couple (x, y) est associé un réel $f(x, y)$, ce qui donne le point de coordonnées $(x, y, f(x, y))$.

29.1 Parties ouvertes

Les parties ouvertes de \mathbb{R}^2 vont jouer un rôle important, tout comme les intervalles ouverts dans \mathbb{R} , que nous avons abondamment utilisés lors de l'étude des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Définition 29.1.1 – Norme canonique sur \mathbb{R}^2

L'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

est appelée *norme canonique sur \mathbb{R}^2* .

Remarque 29.1.2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance entre le point de coordonnées (x, y) et l'origine.

Définition 29.1.3 – Boule ouverte

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $A \in \mathbb{R}^2$.

— La *boule ouverte* de centre A et de rayon r est l'ensemble

$$\mathcal{B}_O(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2, \|M - A\| < r\}$$

— La *boule fermée* de centre A et de rayon r est l'ensemble

$$\mathcal{B}_F(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2, \|M - A\| \leq r\}$$

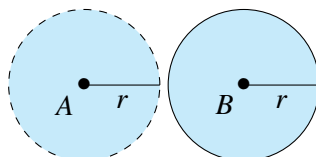


FIGURE 29.2 – La boule ouverte de centre A et de rayon r (dont le bord est exclu), et la boule fermée de centre B et de rayon r .

Remarque 29.1.4

$\|M - A\|$ est la distance euclidienne entre les points M et A .

Définition 29.1.5 – Ouvert de \mathbb{R}^2

Soit U une partie de \mathbb{R}^2 . On dit que U est une *partie ouverte* de \mathbb{R}^2 si pour tout $M \in U$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte de centre M et de rayon r soit incluse dans U :

$$\forall M \in U, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}_O(M, r) \subset U$$

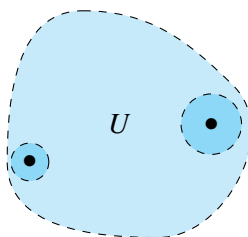


FIGURE 29.3 – Cette partie U de \mathbb{R}^2 est un ouvert : pour tout point M de celle-ci, il existe une boule ouverte (non vide) de centre M incluse dans U . Notez que le bord de U ne fait pas partie de U .

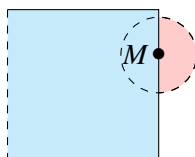


FIGURE 29.4 – Cette partie U de \mathbb{R}^2 n'est pas ouverte : aucune boule ouverte (non vide) centrée au point M indiqué n'est totalement incluse dans U . Notez que U contient « une partie de ses bords ».

Remarque 29.1.6

En particulier, une boule ouverte est un ouvert.
L'ensemble vide est aussi une partie ouverte de \mathbb{R}^2 , et il en est de même pour \mathbb{R}^2 lui-même.

Exemple 29.1.7

Représenter graphiquement les ensembles suivants. Sont-ils ouverts ? Fermés ? Autre ?

$$A = \mathcal{B}_O((3,4), 2), B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1, |y| < 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \leq 1\}, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x < 1\}$$

Propriété 29.1.8

Soient I et J deux intervalles ouverts de \mathbb{R} . Alors $I \times J$ est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Si $I = \emptyset$ ou $J = \emptyset$, c'est trivial. On suppose donc que I et J sont non vides.

Soit $(x_0, y_0) \in I \times J$. Puisque I est ouvert, il existe $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1] \subset I$. De même, il existe $\eta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[y_0 - \eta_2, y_0 + \eta_2] \subset J$.

Posons alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ et montrons que $\mathcal{B}_O((x_0, y_0), \eta) \subset I \times J$. Soit $(x, y) \in \mathcal{B}_O((x_0, y_0), \eta)$. Alors :

$$|x - x_0| = \sqrt{(x - x_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \eta \leq \eta_1$$

donc $x \in [x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1] \subset I$. De la même façon, on montre que $y \in J$, de sorte que $(x, y) \in I \times J$.

On a bien l'inclusion voulue, et $I \times J$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 . □

29.2 Continuité**Définition 29.2.1**

Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^2)$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. On dit que f est **continue en** $M_0 = (x_0, y_0)$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in U, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq r \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$$

On dit que f est continue sur U si f est continue en tout point de U .

Remarque 29.2.2

Cette définition se lit comme celle de la continuité d'une fonction à une seule variable : pour tout $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il, si (x, y) est assez proche de (x_0, y_0) (c'est-à-dire si la distance entre les deux est assez petite), alors l'écart entre $f(x, y)$ et $f(x_0, y_0)$ est plus petit que ε .

Comme pour les fonctions à une variable, on obtient les résultats suivants.

Propriété 29.2.3

- Les fonctions $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ et $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .
- Les fonctions polynomiales, c'est-à-dire celles qui sont combinaisons linéaires de fonction de la forme $(x, y) \mapsto x^i y^j$ avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Propriété 29.2.4 – Opérations sur les fonctions continues

La somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues sont continues.

Propriété 29.2.5 – Composée de deux fonctions continues

Soit f une fonction définie et continue sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} . Soit φ une fonction définie et continue sur I à valeurs dans \mathbb{R} . Alors la fonction $\varphi \circ f$ est continue sur U .

Exemple 29.2.6

Soit

$$f : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 2xy + y^2}}{x^2 y^4 + 1}$$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

29.3 Dérivation

29.3.1 Dérivées partielles

Définition 29.3.1

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

Soit $(x_0, y_0) \in U$. Si la quantité $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0, alors on dit que f admet une dérivée partielle selon la première variable en (x_0, y_0) . On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

et ce nombre est appelé **dérivée partielle de f selon la première variable en (x_0, y_0)** .

Remarque 29.3.2

On parle aussi de dérivée partielle selon x , au lieu de dérivée partielle selon la première variable.

De même, on définit la dérivée partielle de f selon la deuxième variable :

Définition 29.3.3

Soit $(x_0, y_0) \in U$. Si la quantité $\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0, alors on dit que f admet une dérivée partielle selon la seconde variable en (x_0, y_0) . On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

et ce nombre est appelé **dérivée partielle de f selon la seconde variable en (x_0, y_0)** .

Remarque 29.3.4

On parle aussi de dérivée partielle selon y .

Remarque 29.3.5

Ainsi, f admet une dérivée partielle selon la première variable en (x_0, y_0) si et seulement si la fonction $\varphi_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 . Dans ce cas, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \varphi_{y_0}'(x_0)$.
De même, f admet une dérivée partielle selon la deuxième variable en (x_0, y_0) si et seulement si la fonction $\psi_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0 . Dans ce cas, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \psi_{x_0}'(x_0, y_0)$.
Le lecteur est invité à observer la figure 29.5 pour une signification géométrique de ces dérivées partielles.

Exemple 29.3.6

Soit $f : (x, y) \mapsto \sqrt{y}e^{x^2}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soit alors $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Calculer les dérivées partielles de f en tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Définition 29.3.7

On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur U si f admet une dérivée partielle selon chaque variable en tout point de U et si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U .

Exemple 29.3.8

Dans l'exemple 29.3.6, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Propriété 29.3.9

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , alors f est continue sur U .

Remarque 29.3.10

Attention, l'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.

Exercice 29.3.11

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x \sin(y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

Propriété 29.3.12

Soit f, g deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U , et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur U . De plus, si g ne s'annule pas sur U , alors $\frac{f}{g}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Propriété 29.3.13

Soit f une fonction définie sur une partie U de \mathbb{R}^2 à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} , et soit φ une fonction définie sur I à valeurs dans \mathbb{R} .

On suppose que f et φ sont de classe \mathcal{C}^1 . Alors $\varphi \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Propriété 29.3.14

- Les fonctions $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ et $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
- Les fonctions polynomiales sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 29.3.15

La fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + 3y^2)$ est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

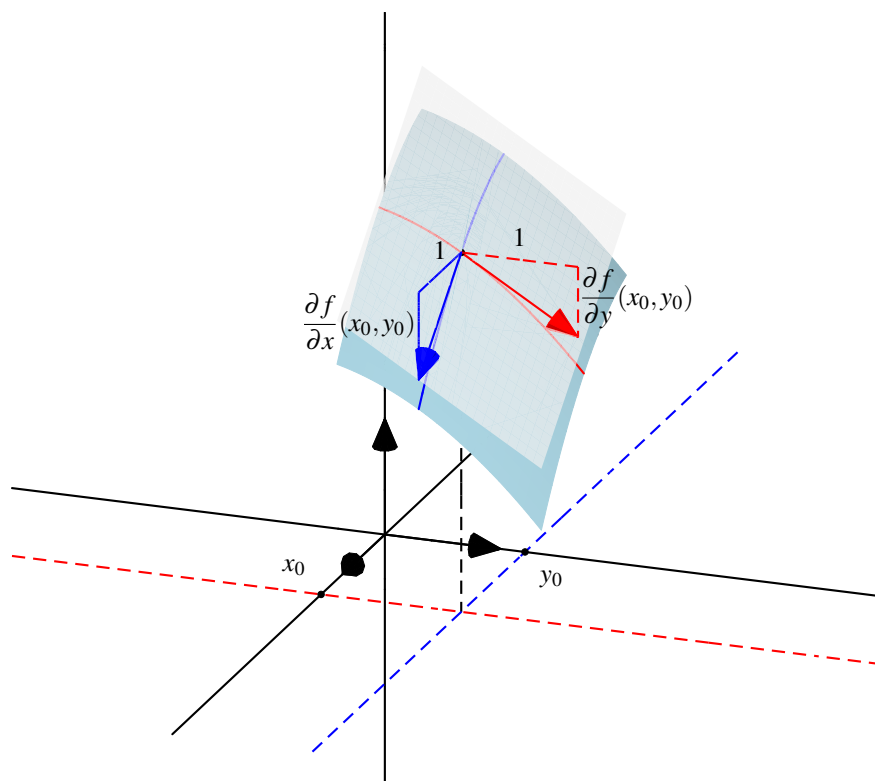
29.3.2 Plan tangent

FIGURE 29.5 – Le plan tangent en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est dirigé par les vecteurs $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$ et $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

On rapporte l'espace \mathbb{R}^3 à sa base canonique \mathcal{B} .

Soit U un ouvert non vide \mathbb{R}^2 et $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit $(x_0, y_0) \in U$.

Le vecteur ¹ \vec{u} de coordonnées $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$ dirige alors la tangente à la courbe de $t \mapsto (t, 0, f(t, y_0))$. De même,

1. Voir la figure 29.5.

le vecteur \vec{v} de coordonnées $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ dirige alors la tangente à la courbe de $t \mapsto (0, t, f(x_0, t))$.

Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils engendrent un plan, appelé *plan tangent à la surface représentative de f en (x_0, y_0)* . : il s'agit du plan passant par le point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) , avec $z_0 = f(x_0, y_0)$, et dirigé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Déterminons son équation : un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à ce plan si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AM} , \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires, c'est-à-dire s'ils forment une famille liée ou encore si leur déterminant relatif à la base canonique est nul. On résout :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) &= 0 \iff \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & 1 & 0 \\ y - y_0 & 0 & 1 \\ z - z_0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff z - z_0 - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \\ &\quad \text{(règle de Sarrus)} \\ &\iff z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=z_0} + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

On obtient alors la définition suivante :

Définition 29.3.16 – Plan tangent

L'espace \mathbb{R}^3 est rapporté à sa base canonique.

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 et (x_0, y_0) .

Le *plan tangent à la surface représentative de f en (x_0, y_0)* est le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

On dispose d'ailleurs du résultat (admis) suivant :

Théorème 29.3.17 – Développement limité à l'ordre 1

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors, pour tout $(x, y) \in U$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|)$$

Remarque 29.3.18

En notant $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$, cette formule devient :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|)$$

Exercice 29.3.19

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x \cos(y)}{x+1} \end{aligned}$$

1. Justifier que $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 et que f est de classe \mathcal{C}^1 .
2. Déterminer une équation du plan tangente à la surface représentative de f en $(1, \frac{\pi}{4})$.

Exercice 29.3.20

La fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + 3y^2)$ de l'exemple 29.3.15 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Déterminer son développement limité à l'ordre 1 en $(1, -1)$.

29.3.3 Produit scalaire euclidien

Avant d'introduire la notion de gradient, quelques rappels rapides sur le produit scalaire euclidien.

Définition 29.3.21 – Produit scalaire euclidien

Soient u et v deux éléments de \mathbb{R}^2 . Le *produit scalaire euclidien* de u et v est le réel :

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} \|u\| \|v\| \cos(u, v) & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On dit que u et v sont *orthogonaux* si $\langle u, v \rangle = 0$.

Remarque 29.3.22

Si u et v sont non nuls :

- $\cos(u, v)$ est le cosinus de l'angle (orienté ou non, aucune importance puisque \cos est paire) entre les vecteurs u et v .
- Pour le produit scalaire euclidien, u et v sont orthogonaux si et seulement si l'angle (u, v) est un angle droit.

De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, on a $\langle u, u \rangle = \|u\|^2$.

Définition 29.3.23 – Base orthonormée de \mathbb{R}^2

Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$. On dit que (u, v) est une base *orthonormée* de \mathbb{R}^2 si u et v sont orthogonaux et de norme euclidienne égale à 1 (pour le produit scalaire euclidien et la norme euclidienne).

Propriété 29.3.24

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de \mathbb{R}^2 . Soient u et v dans \mathbb{R}^2 , de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans la base \mathcal{B} . Alors

$$\langle u, v \rangle = xx' + yy'$$

Démonstration. Si $u = 0$ ou $v = 0$, la formule est triviale. On suppose donc que $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

Notons z_u et z_v les affixes respectives de u et v dans \mathbb{R}^2 , rapporté au plan complexe par la base orthonormée \mathcal{B} .

On a alors $z_u = x + iy$ et $z_v = x' + iy'$.

De plus, $z_u = \|u\| e^{i\theta}$ et $z_v = \|v\| e^{i\alpha}$, où θ et α sont des arguments respectifs de u et v . $\theta - \alpha$ est alors une mesure de

l'angle (u, v) , si bien que :

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle &= \|u\| \|v\| \cos(u, v) \\
 &= |z_u| |z_v| \operatorname{Re} \left(e^{i(\theta - \alpha)} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(|z_u| |z_v| e^{i\theta} e^{-i\alpha} \right) \\
 &= \operatorname{Re} (z_u \bar{z}_v) \\
 &= \operatorname{Re} ((x + iy)(x' - iy')) \\
 &= xx' + yy'
 \end{aligned}$$

□

La propriété suivante devient alors triviale :

Propriété 29.3.25

1. Le produit scalaire est *symétrique* :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2, \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

2. Le produit scalaire euclidien est *bilinéaire* : pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle \text{ et } \langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle$$

3. Le produit scalaire est *défini positif* : pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, on a $\langle u, u \rangle \geq 0$ et

$$\langle u, u \rangle = 0 \implies u = 0$$

29.3.4 Gradient

Avec le produit scalaire, la formule du théorème 29.3.17 (en reprenant le même contexte) devient :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle + o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|)$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ joue donc un rôle particulier : on l'appelle *gradient de f en (x_0, y_0)* .

Définition 29.3.26 – Gradient

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , et $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ admettant des dérivées partielles selon chacune des variables en tout point de U .

L'application

$$\begin{aligned}
 \nabla f : U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

est appelé le *gradient de f* .

Remarque 29.3.27

- Par commodité, on confond \mathbb{R}^2 et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et on note indifféremment (x, y) ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert non vide U de \mathbb{R}^2 , le développement limité à l'ordre 1 de f en (x_0, y_0) s'écrit aussi :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

ou encore

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$$

29.3.5 Dérivation selon un vecteur**Définition 29.3.28 – Dérivée selon un vecteur**

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$. Soit $u \in \mathbb{R}^2$ non nul et $A \in U$.

On dit que f admet une dérivée en (x, y) selon u lorsque la fonction $t \mapsto \frac{f(A + tu) - f(A)}{t}$ admet une limite finie en 0.

On note alors

$$D_u(f)(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + tu) - f(A)}{t}$$

Remarque 29.3.29

- Il s'agit de s'approcher du point A en suivant la direction indiquée par le vecteur u , et donc d'étudier les variations de f dans cette direction.
- Dériver f selon la première variable (respectivement la seconde) revient à dériver f selon le vecteur $(1, 0)$ (respectivement $(0, 1)$).

Exercice 29.3.30

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet, en $(0, 0)$, des dérivées selon tout vecteur non nul, mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Propriété 29.3.31

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit $(x_0, y_0) \in U$.

Soit $u \in \mathbb{R}^2$ non nul.

Alors f admet une dérivée en (x_0, y_0) selon u et

$$D_u(f)(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle$$

Démonstration. f étant de classe \mathcal{C}^1 , on a pour (h, k) au voisinage de $(0, 0)$:

$$f((x_0, y_0) + (h, k)) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$$

Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0 :

$$f((x_0, y_0) + tu) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), tu \rangle + o(\|tu\|)$$

ou encore

$$f((x_0, y_0) + tu) = f(x_0, y_0) + t \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle + o(|t| \|u\|)$$

et finalement

$$\frac{f((x_0, y_0) + tu) - f(x_0, y_0)}{t} = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle + o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle$$

□

Remarque 29.3.32

Reprenons le contexte de la propriété précédente et supposons que u est *unitaire*^a.
D'après ce qui précède, on a

$$D_u(f)(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \underbrace{\|u\|}_{=1} \cos(\nabla f(x_0, y_0), u)$$

qui est maximal lorsque u est de même direction et de même sens que $\nabla f(x_0, y_0)$ (c'est-à-dire lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u = \lambda \nabla f(x_0, y_0)$).

Ainsi, $\nabla f(x_0, y_0)$ indique la direction dans laquelle f croît le plus vite (voir la figure 29.6).

De la même façon, $-\nabla f(x_0, y_0)$ indique la direction dans laquelle f décroît le plus vite.

^a. C'est-à-dire que $\|u\| = 1$: ce qui nous intéresse ici, c'est la direction de u .

Exercice 29.3.33

Soit

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \ln(1 + x)$$

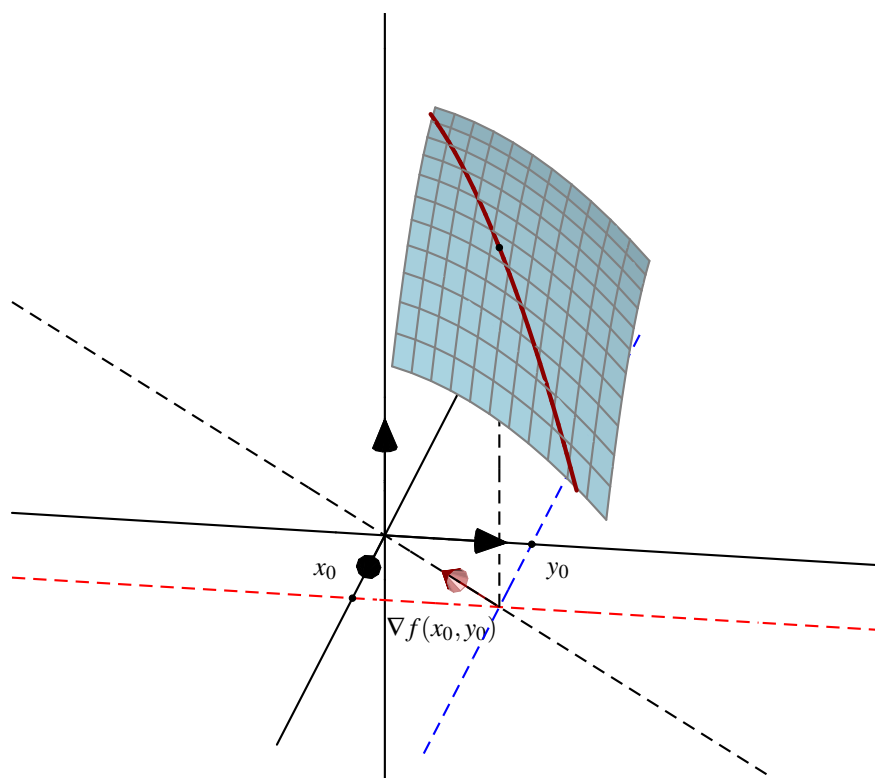
1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 à préciser.
2. Déterminer le gradient de f .
3. On pose $u = (2, -3)$. Déterminer, en tout point $(x, y) \in U$, la dérivée de f selon u en (x, y) .

Exercice 29.3.34

Soit

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - 2\sqrt{3}xy + 2x - 2\sqrt{3}y - 6}{4y^2 + 4}$$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer le gradient de f .
3. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que f est constante sur la droite \mathcal{D} passant par $(1, 0)$ et dirigée par u .

FIGURE 29.6 – Le gradient indique la direction dans laquelle f croît le plus vite.

29.3.6 Règle de la chaîne

Théorème 29.3.35 – Règle de la chaîne

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 .

Soient x et y deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I à valeurs dans \mathbb{R} telle que $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in U$. Enfin, soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors :

$$\begin{aligned} \varphi &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

Démonstration. Soit $t \in I$ fixé. Puisque x et y sont dérivables en t , elles admettent un développement limité à l'ordre 1 en t :

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)h + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

$$y(t+h) = y(t) + y'(t)h + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

De plus, f étant de classe \mathcal{C}^1 sur U , f admet un développement limité à l'ordre 1 en $(x(t), y(t)) \in U$:

$$f(x(t)+u, y(t)+v) = f(x(t), y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))u + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))v + o(\|(u, v)\|)$$

Puisque $\lim_{h \rightarrow 0} x'(t)h + o_{h \rightarrow 0}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} y'(t)h + o_{h \rightarrow 0}(h) = 0$, on obtient par substitution et lorsque $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(t+h) &= f(x(t+h), y(t+h)) \\ &= f\left(x(t) + x'(t)h + o(h), y(t) + y'(t)h + o(h)\right) \\ &= f(x(t), y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\left(x'(t)h + o(h)\right) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\left(y'(t)h + o(h)\right) \\ &\quad + o_{h \rightarrow 0}\left(\left\|x'(t)h + o(h), y'(t)h + o(h)\right\|\right) \\ &= f(x(t), y(t)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)\right)h \\ &\quad + \underbrace{o(h) + o\left(\left\|x(t) + o(1), y(t) + o(1)\right\|\right)}_{=o(h)} \end{aligned}$$

Ainsi, φ admet un développement limité à l'ordre 1 en t , et

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

□

Remarque 29.3.36

On reprend les notation ci-dessus. Pour tout $t \in I$, on pose $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$. γ représente donc un arc (une courbe paramétrique) dans le plan.

On remarque que

$$\forall t \in I, \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = \langle \nabla f(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Exercice 29.3.37

Soit

$$\begin{aligned} f &:]-1; 1[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy^3 \arccos(x) \end{aligned}$$

Justifier que la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$ est dérivable sur $]0; \pi[$ et déterminer sa dérivée en utilisant la règle de la chaîne.

Exercice 29.3.38

1. Représenter graphiquement l'ensemble $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, y = x^2\}$.
2. Montrer, de deux façons différentes, que la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^{*2} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{\ln(x^2 + y) - \ln(y)}{1 + \frac{x^2}{y}} \end{aligned}$$

est constante sur V .

29.3.7 Lignes de niveau**Définition 29.3.39 – Lignes de niveau**

Soit U une partie de \mathbb{R}^2 , $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{R}$. La *ligne de niveau k* de f est l'ensemble

$$\{(x, y) \in U, f(x, y) = k\} = f^{-1}(\{k\})$$

Propriété 29.3.40 – Le gradient est orthogonal aux lignes de niveaux

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 .

Soit $k \in \mathbb{R}$.

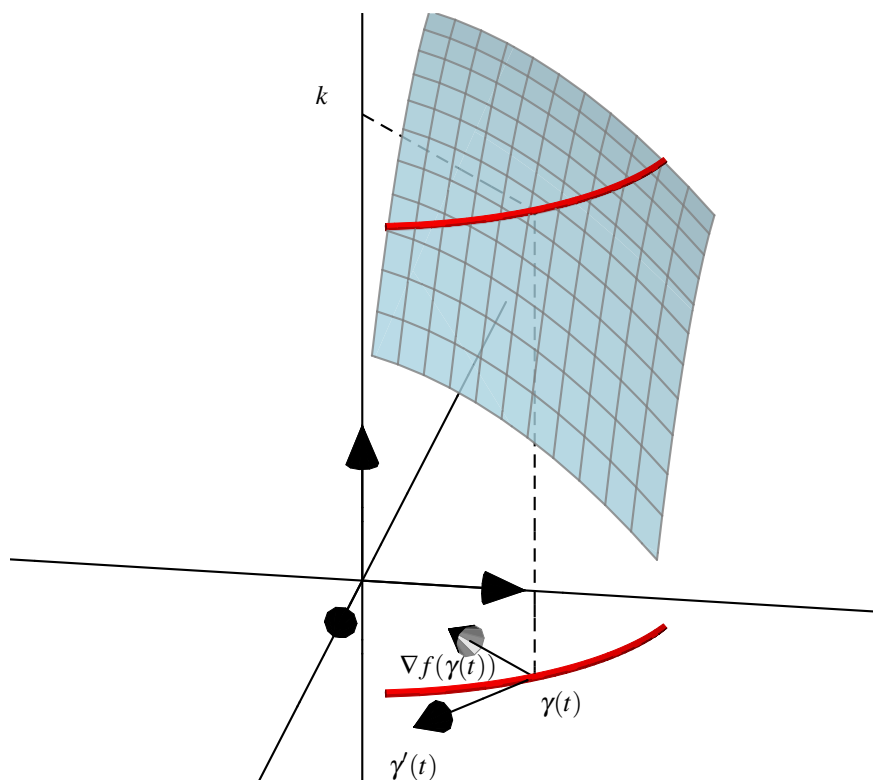
Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Pour tout $t \in I$, on note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et on suppose que $f(\gamma(t)) = k$ (autrement dit, γ prend ses valeurs dans la ligne de niveau k de f).

Alors, pour tout $t \in I$, on a $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$.

Démonstration. Par hypothèse, $f \circ \gamma$ est constante égale à k sur I . La règle de la chaîne et la remarque 29.3.36 donnent alors, pour tout $t \in I$:

$$0 = (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

□

FIGURE 29.7 – La ligne de niveau k , paramétrée par la fonction $t \mapsto \gamma(t)$.

Exercice 29.3.41

Sur la figure 29.8, représenter la direction de quelques gradients sur les lignes de niveau.

29.3.8 Composition**Propriété 29.3.42 – Composition**

Soient U et V deux ouverts non vides de \mathbb{R}^2 . Soit $f \in \mathcal{F}(V, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 et $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 , vérifiant :

$$\forall (u, v) \in U, (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in V$$

Alors

$$\begin{aligned} g &: U \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \end{aligned}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur U , et pour tout $(u, v) \in U$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la règle de la chaîne à $a : u \mapsto g(u, v)$ (v étant fixé) et $b : v \mapsto (g(u, v))$ (u étant fixé). \square

Exercice 29.3.43

Déterminer toutes les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

On pourra considérer $g : (u, v) \mapsto f(u + v, u - v)$.

Correction. On peut raisonner par analyse-synthèse. Soit f une solution du problème. g est alors de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 puisque $(u, v) \mapsto u + v$ et $(u, v) \mapsto u - v$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . De plus, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u + v, u - v) \times 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(u + v, u - v) \times 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

par hypothèse. On en déduit que « g est constante vis-à-vis de u », c'est-à-dire qu'il existe une fonction λ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que

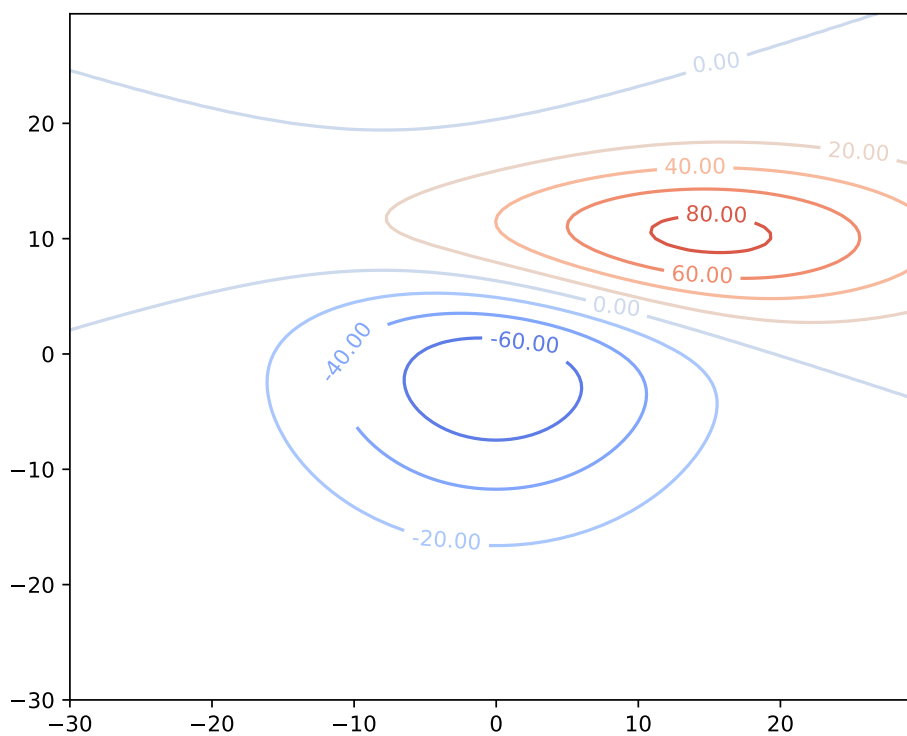
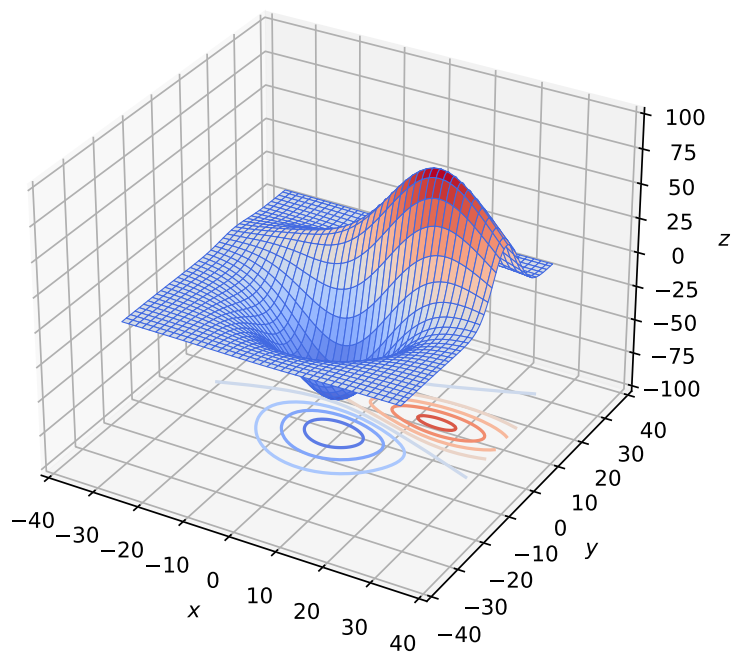
$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, g(u, v) = \lambda(v)$$

ou encore

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, f(u + v, u - v) = \lambda(v)$$

Prenons alors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. On a

$$\begin{cases} u + v = x \\ u - v = y \end{cases} \iff \begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$



et finalement

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \lambda \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

Réciproquement, considérons $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \lambda \left(\frac{x-y}{2} \right)$. Par composition, f est alors de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{2} \lambda' \left(\frac{x-y}{2} \right) - \frac{1}{2} \lambda' \left(\frac{x-y}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par analyse-synthèse, on a donc montré que les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 vérifiant l'équation posée sont les fonctions de la forme $f : (x, y) \mapsto \lambda \left(\frac{x-y}{2} \right)$ où $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 29.3.44

Déterminer les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times (x+y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \times (1-2x-2y) = 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1+(x^2+x(2y-1)+y^2)^2} \end{cases}$$

On pourra considérer $g : (u, v) \mapsto f(u^2 - v, u + v - u^2)$.

Exercice 29.3.45

Déterminer les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

en passant aux coordonnées polaires (c'est-à-dire en considérant $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$).

Exercice 29.3.46

Déterminer les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

en passant aux coordonnées polaires.

29.4 Extrema

Ici, U sera un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 .

Définition 29.4.1

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$.

— On dit que f admet un minimum global en (x_0, y_0) si

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

— On dit que f admet un minimum local en (x_0, y_0) s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in U \cap \mathcal{B}_O((x_0, y_0), r), f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

Définition 29.4.2

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$.

— On dit que f admet un maximum global en (x_0, y_0) si

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

— On dit que f admet un maximum local en (x_0, y_0) s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in U \cap \mathcal{B}_O((x_0, y_0), r), f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

Remarque 29.4.3

- On dit alors que f admet un extremum (global ou local) en (x_0, y_0) .
- Un extremum global est un cas particulier d'extremum local.

Définition 29.4.4 – Point critique

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et soit $(x_0, y_0) \in U$. On dit que (x_0, y_0) est un point critique pour f si

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = 0$$

Propriété 29.4.5 – Condition nécessaire pour un extremum

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in U$ alors (x_0, y_0) est un point critique pour f .

Démonstration. En effet, si f admet un extremum local en (x_0, y_0) , alors la fonction $\varphi_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$, définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 , admet un extremum local en x_0 : sa dérivée en x_0 est donc nulle, ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Le raisonnement est le même pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. □

Remarque 29.4.6

Attention, cette propriété n'est vraie que si U est un ouvert de \mathbb{R}^2 (contre-exemple : la fonction $(x, y) \mapsto x$ définie sur $[-1; 1]^2$ admet un maximum en $(1, 0)$, mais $(1, 0)$ n'est pas critique).

Exercice 29.4.7

Déterminer les points critiques de $f : (x, y) \mapsto xy$. f présente-elle des extrema (même locaux) en ces points ?

Exemple 29.4.8

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto 2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

Déterminer les points critiques de f . Étudier leur nature (maximum, minimum, ni l'un ni l'autre ?).

Chapitre 30

Espaces préhilbertiens réels

30.1	Produits scalaires et normes	876
30.1.1	Notion de produit scalaire et d'espace préhilbertien réel	876
30.1.2	Exemples de produits scalaires	878
30.1.3	Norme associée à un produit scalaire	880
30.2	Orthogonalité	885
30.2.1	Vecteurs orthogonaux et orthogonal d'un ensemble	885
30.2.2	Bases orthonormées	894
30.3	Projections orthogonales	896
30.3.1	Relation entre un sous-espace vectoriel et son orthogonal	896
30.3.2	Projections orthogonales	897
30.3.3	Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel	900

30.1 Produits scalaires et normes

30.1.1 Notion de produit scalaire et d'espace préhilbertien réel

Définition 30.1.1 – Produit scalaire

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application de $E \times E$ vers \mathbb{R} .

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un *produit scalaire* sur E lorsque :

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est *bilinéaire* : pour tout $x, y, z \in E$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \quad (\text{linéarité à gauche})$$

$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle \quad (\text{linéarité à droite})$$

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est *symétrique* :

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est *définie positive* : pour tout $x \in E$, on a

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ et } (\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0)$$

Remarque 30.1.2

- Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , on a pour tout $x \in E$:

$$\langle x, 0_E \rangle = \langle x, 0 \cdot 0_E \rangle = 0 \times \langle x, 0_E \rangle = 0$$

par bilinéarité.

- Le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^2 , déjà utilisé au lycée et dans le chapitre sur les fonctions à deux variables, vérifie bien ces différents points. Rappelons pour deux vecteurs $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, ce produit scalaire est défini par

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos(u, v) = xx' + yy'$$

- Sur \mathbb{R}^2 , comme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel quelconque, il existe une multitude de produits scalaires.
- D'autres notations sont fréquemment utilisées pour un produit scalaire : si u et v sont deux éléments de E , un produit scalaire appliqué à u et v peut être noté $(u|v)$ ou encore $u \cdot v$.
- Si on sait déjà que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, alors la linéarité à droite implique la linéarité à gauche, et réciproquement.

Définition 30.1.3 – Espace préhilbertien réel et espace euclidien

Un *espace préhilbertien réel* est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E . De plus, si E est de dimension finie, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un *espace euclidien*.

Exercice 30.1.4

Montrer que

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto xx' + xy' + x'y + yy' \end{aligned}$$

n'est pas un produit scalaire.

Correction. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &= (x + y)^2\end{aligned}$$

On a donc, par exemple, $\langle (1, -1), (1, -1) \rangle = 0$ alors que $(1, -1)$ n'est pas nul. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est donc pas définie positive et n'est pas un produit scalaire.

Exercice 30.1.5

Montrer que

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto 3xx' + xy' + x'y + yy'\end{aligned}$$

est un produit scalaire.

Correction. Pour tout $(x, y), (x', y')$ et (x'', y'') dans \mathbb{R}^2 , et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = 3xx' + xy' + x'y + yy' = 3x'x + y'x + yx' + y'y = \langle (x', y'), (x, y) \rangle$$

d'où la symétrie.

$$\begin{aligned}\langle \lambda(x, y) + \mu(x', y'), (x'', y'') \rangle &= \langle (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y'), (x'', y'') \rangle \\ &= 3(\lambda x + \mu x')x'' + (\lambda x + \mu x')y'' + x''(\lambda y + \mu y') \\ &\quad + (\lambda y + \mu y')y'' \\ &= \lambda(3xx'' + xy'' + x''y + yy'') \\ &\quad + \mu(3x'x'' + x'y'' + x''y' + y'y'') \\ &= \lambda \langle (x, y), (x'', y'') \rangle + \mu \langle (x', y'), (x'', y'') \rangle\end{aligned}$$

d'où la linéarité à gauche, et la bilinéarité par symétrie.

Enfin :

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle &= 3x^2 + 2xy + y^2 \\ &= 2x^2 + (x + y)^2 \geq 0\end{aligned}$$

d'où la positivité. Enfin,

$$\begin{aligned}\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 &\iff 2x^2 + (x + y)^2 = 0 \\ &\iff 2x^2 = 0 \text{ et } (x + y)^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ (somme de termes positifs)}\end{aligned}$$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie positive.

Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

30.1.2 Exemples de produits scalaires

Produit scalaire euclidien

Définition 30.1.6 – Produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui, à tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, associe :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , appelé *produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^n* .

Démonstration. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique. Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n y_k x_k = \langle y, x \rangle$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien symétrique.

Montrons la bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, ainsi que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y, z \rangle &= \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \mu y_k) z_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n x_k z_k + \mu \sum_{k=1}^n y_k z_k \\ &= \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité à gauche et, par symétrie, la bilinéarité.

Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive : soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a déjà :

$$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^n x_k x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0 \text{ comme somme de nombres positifs}$$

De plus, si $\langle x, x \rangle = 0$, alors $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$. Cette somme étant à termes positifs, on en déduit que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $x_k^2 = 0$ ou encore $x_k = 0$: on a donc bien $x = 0$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bien définie positive. \square

Remarque 30.1.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^n , muni de son produit scalaire canonique, est donc un espace euclidien.

Produit scalaire pour les fonctions continues sur un segment

Propriété 30.1.8

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$, qui à $f, g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ associe

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$.

Remarque 30.1.9

Muni de ce produit scalaire, $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ est alors un espace préhilbertien réel (mais pas un espace euclidien puisqu'il n'est pas de dimension finie).

Démonstration. La symétrie et la bilinéarité ne posent pas de difficulté.

Soit $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$. Alors

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b (f(t))^2 dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale.

De plus, si $\langle f, f \rangle = \int_a^b (f(t))^2 dt = 0$, alors f est nulle sur $[a; b]$ puisque $t \mapsto (f(t))^2$ est continue positive sur $[a; b]$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bien définie positive. \square

Exercice 30.1.10

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note

$$\begin{aligned} f_k &: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \cos(kt) \end{aligned}$$

On reprend le produit scalaire défini dans la propriété 30.1.8, avec $a = 0$ et $b = \pi$. Déterminer, pour tout $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$, la valeur de $\langle f_k, f_{k'} \rangle$.

Correction. Notons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f_k est bien continue sur $[0; \pi]$.

Soient $k, k' \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle f_k, f_{k'} \rangle &= \int_0^\pi \cos(kt) \cos(k't) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (\cos((k+k')t) + \cos((k-k')t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((k+k')t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((k-k')t) dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a :

— Si $m \neq 0$, alors

$$\int_0^\pi \cos(mt) dt = \frac{1}{m} [\sin(mt)]_0^\pi = \frac{1}{m} (\sin(m\pi) - \sin(0)) = 0$$

— Si $m = 0$, alors :

$$\int_0^\pi \cos(mt) dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \langle f_k, f_{k'} \rangle &= \begin{cases} 0 & \text{si } k+k' \neq 0 \text{ et } k-k' \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } k+k' = 0 \text{ et } k-k' \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } k+k' \neq 0 \text{ et } k-k' = 0 \\ \pi & \text{si } k+k' = 0 \text{ et } k-k' = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \pi & \text{si } (k, k') = (0, 0) \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |k| = |k'| \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 30.1.11

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$, qui à tout $f, g \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ associe :

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

est un produit scalaire.

Correction. La symétrie et la bilinéarité ne posent pas de difficultés. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$, on a

$$\langle f, f \rangle = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0$$

puisque f'^2 est une fonction continue positive sur $[0; 1]$. De plus, par somme de termes positifs :

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle = 0 &\iff f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0 \\ &\iff f(0)^2 = 0 \text{ et } \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0 \\ &\iff f(0) = 0 \text{ et } f'^2 \text{ est nulle sur } [0; 1] \end{aligned}$$

puisque f'^2 est continue positive sur $[0; 1]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle = 0 &\iff f(0) = 0 \text{ et } f \text{ est constante sur } [0; 1] \\ &\iff f \text{ est nulle sur } [0; 1] \end{aligned}$$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie positive et est finalement bien un produit scalaire.

30.1.3 Norme associée à un produit scalaire**Définition 30.1.12 – Norme associée à un produit scalaire et distance**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: E \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

est appelée la *norme associée au produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, le nombre $\|x - y\|$ est alors la *distance entre x et y*.

Remarque 30.1.13

La « distance » entre x et y dépend donc du produit scalaire choisi !

Exercice 30.1.14

On reprend le produit scalaire de l'exercice 30.1.5. Quelle est la distance entre $(1, 0)$ et $(2, 0)$? Que vaut cette distance pour le produit scalaire euclidien ?

Correction. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire de l'exercice 30.1.5, la distance entre $(1, 0)$ et $(2, 0)$ est :

$$\begin{aligned} \|(1, 0) - (2, 0)\| &= \|(-1, 0)\| \\ &= \sqrt{\langle (-1, 0), (-1, 0) \rangle} \\ &= \sqrt{3 \times (-1) \times (-1) + (-1) \times 0 + 0 \times (-1) + 0 \times 0} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne maintenant le produit scalaire (et $\|\cdot\|$ la norme associée), alors

$$\begin{aligned} \|(1, 0) - (2, 0)\| &= \|(-1, 0)\| \\ &= \sqrt{\langle (-1, 0), (-1, 0) \rangle} \\ &= \sqrt{(-1) \times (-1) + 0 \times 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 30.1.15

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$$

Il s'agit donc du produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, restreint aux fonctions polynomiales, qui sont bien continues. Calculer la distance entre $P = 1 + X + X^2$ et $Q = X - 2X^2$.

Propriété 30.1.16

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Alors :

1. Pour tout $x \in E$, on a $\|x\| \geq 0$.
2. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

3. Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

Démonstration. Les deux premiers points sont triviaux puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

Pour le troisième, considérons $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} && \text{par bilinéarité} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

□

Propriété 30.1.17 – Une identité remarquable

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Démonstration. En effet :

$$\begin{aligned}
 \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle && \text{par bilinéarité} \\
 &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle && \text{par symétrie} \\
 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 30.1.18 – Identité de polarisation

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Alors, pour tout $x, y \in E$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

Démonstration. Découle directement de l'identité remarquable précédente, en isolant $\langle x, y \rangle$.

□

Remarque 30.1.19

Cette identité de polarisation permet donc de retrouver le produit scalaire à partir de la norme associée.

Théorème 30.1.20 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée. Alors, pour tout $x, y \in E$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. Soient $x, y \in E$.

L'astuce consiste à considérer la fonction

$$\begin{aligned}
 \varphi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 \lambda &\mapsto \|x + \lambda y\|^2
 \end{aligned}$$

qui est clairement à valeurs positives. Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a d'après l'identité remarquable précédente :

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda) &= \|x + \lambda y\|^2 \\
 &= \|x\|^2 + 2\langle x, \lambda y \rangle + \|\lambda y\|^2 \\
 &= \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2
 \end{aligned}$$

Deux cas sont alors à distinguer :

— Supposons que $\|y\| = 0$, c'est-à-dire que $y = 0$. Alors

$$\langle x, y \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0 = \|x\| \|y\|$$

et il ne reste rien à prouver (y compris le cas d'égalité puisque x et y sont alors automatiquement colinéaires).

— Supposons que $\|y\| \neq 0$, c'est-à-dire que $y \neq 0$. Alors φ est une fonction polynomiale de degré 2, à valeurs exclusivement positives : φ admet donc au maximum une racine, et son discriminant est négatif ou nul. On a donc

$$(2\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

ou encore

$$4(\langle x, y \rangle)^2 \leq 4\|x\|^2\|y\|^2$$

puis, en divisant par 4 et par croissance de la racine carrée :

$$|\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, y \rangle^2} \leq \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2} = \|x\|\|y\|$$

ce qui est bien l'inégalité voulue.

Enfin :

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\| &\iff (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 0 \\ &\iff \varphi \text{ admet une racine} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\|^2 = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda y = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = -\lambda y \\ &\iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

□

Exercice 30.1.21

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et préciser le cas d'égalité.

Correction. D'après Cauchy-Schwarz avec le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^n , on a

$$|\langle (x_1, \dots, x_n), (1, \dots, 1) \rangle| \leq \|(x_1, \dots, x_n)\| \|(1, \dots, 1)\|$$

ou encore

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2}}_{=\sqrt{n}}$$

ou enfin, en élevant au carré :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Enfin, d'après Cauchy-Schwarz, il y a égalité si et seulement si (x_1, \dots, x_n) et $(1, \dots, 1)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Exercice 30.1.22

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a^2} \right)$$

Correction. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs (a, \dots, a) et $(\frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a})$, avec le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^n .

Exercice 30.1.23

Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}_+^*)$. Montrer que

$$1 \leq \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt \right)$$

Correction. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à \sqrt{f} et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ (qui sont bien continues positives) avec le produit scalaire usuel.

Exercice 30.1.24

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$. Montrer que

$$|f(1)^2 - f(0)^2| \leq 2 \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \int_0^1 f'(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Correction. D'après Cauchy-Schwarz, via le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$, appliqué à f et f' :

$$|\langle f, f' \rangle| \leq \|f\| \|f'\|$$

ou encore

$$\left| \int_0^1 f(t) f'(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

donc

$$\left| \left[\frac{1}{2} f(t)^2 \right]_0^1 \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

ou enfin

$$\frac{1}{2} |f(1)^2 - f(0)^2| \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

et multiplier par 2 donne le résultat voulu.

Théorème 30.1.25 – Inégalité triangulaire

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Alors, pour tout $x, y \in E$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si $y = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$.

Démonstration. Soient $x, y \in E$. D'après l'identité remarquable et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

et, en passant à la racine carrée (ces réels étant positifs), on obtient bien

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Supposons alors que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Le calcul précédent donne alors $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$, et le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz prouve que x et y sont colinéaires. Ainsi, si y est non nul, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$. On a alors, d'une part :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

et d'autre part

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| = \|x\| \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|^2$$

Ainsi $\lambda \|x\|^2 = |\lambda| \|x\|^2$: x est nul ou λ est positif. Dans les deux cas, $x = \lambda y$ avec $\lambda \geq 0$.

Réciproquement, si $y = 0$ ou si $x = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$, l'égalité est triviale. □

30.2 Orthogonalité

30.2.1 Vecteurs orthogonaux et orthogonal d'un ensemble

Vecteurs orthogonaux et familles orthogonales

Définition 30.2.1 – Vecteurs orthogonaux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- Deux vecteurs u et v de E sont dit *orthogonaux pour le produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si $\langle u, v \rangle = 0$.
- Une famille finie $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite *orthogonale* si les $(e_i)_{i \in I}$ sont deux-à-deux orthogonaux :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

- Une famille finie $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite *orthonormée* ou *orthonormale* lorsqu'elle est orthogonale et lorsque tous ses vecteurs sont de norme 1 :

$$\forall i \in I, \|e_i\| = 1$$

où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 30.2.2

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &: (\mathbb{R}_2[X])^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) , où $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$, est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire précédent.

Correction. 1. Même raisonnement que pour 30.1.8.

2. On a :

$$\begin{aligned} \langle P_0, P_1 \rangle &= \int_{-1}^1 1 \times t dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle P_0, P_2 \rangle &= \int_{-1}^1 1 \times \frac{1}{2} (3t^2 - 1) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3t^2 - 1) dt \\
&= \frac{1}{2} [t^3 - t]_{-1}^1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle P_1, P_2 \rangle &= \int_{-1}^1 t \times \frac{1}{2} (3t^2 - 1) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3t^3 - t) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} t^4 - \frac{1}{2} t^2 \right]_{-1}^1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

La famille (P_0, P_1, P_2) est donc bien orthogonale.

L'identité remarquable 30.1.17 donne directement le théorème de Pythagore.

Théorème 30.2.3 – Théorème de Pythagore

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient $u, v \in E$. Alors :

$$u \text{ et } v \text{ sont orthogonaux} \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Démonstration. Pour $u, v \in E$:

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 &\iff \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \\
&\iff \langle u, v \rangle = 0
\end{aligned}$$

□

Corollaire 30.2.4

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille finie orthogonale. Alors

$$\left\| \sum_{i \in I} e_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|e_i\|^2$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le cardinal de I .

- Si $(e_i)_{i \in I}$ est vide ou ne contient qu'un seul vecteur, la formule est triviale.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la formule établie pour toute famille orthogonale de n vecteurs de E . Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale de $n + 1$ vecteurs, et soit $i_0 \in I$. Alors e_{i_0} et $\sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} e_i$ sont orthogonaux. En effet :

$$\left\langle e_{i_0}, \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} e_i \right\rangle = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \underbrace{\langle e_{i_0}, e_i \rangle}_{=0} = 0$$

D'après le théorème de Pythagore, on a alors :

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i \in I} e_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} e_i + e_{i_0} \right\|^2 \\
 &= \left\| \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} e_i \right\|^2 + \|e_{i_0}\|^2 \\
 &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \|e_i\|^2 + \|e_{i_0}\|^2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\
 &= \sum_{i \in I} \|e_i\|^2
 \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. □

Propriété 30.2.5

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille finie orthogonale de vecteurs non nuls. Alors $(e_i)_{i \in I}$ est libre.

Démonstration. Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E$. Pour tout $j \in I$, on a alors :

$$0 = \left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\text{nul si } i \neq j} = \lambda_j \|e_j\|^2$$

Or e_j n'est pas nul donc $\|e_j\|^2 \neq 0$: on en déduit que $\lambda_j = 0$, et ce pour tout $j \in I$. La famille $(e_i)_{i \in I}$ est donc bien libre. □

Remarque 30.2.6

Une famille orthonormale est donc toujours libre.

Orthogonal d'une partie

Définition 30.2.7

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et X une partie de E . On appelle *orthogonal de X* l'ensemble

$$X^\perp = \{x \in E, \forall y \in X, \langle x, y \rangle = 0\}$$

Remarque 30.2.8

X^\perp est donc l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de X .

Exercice 30.2.9

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. Que vaut \emptyset^\perp ?
2. Que vaut $\{0_E\}^\perp$?
3. Que vaut E^\perp ?
4. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\mathcal{B}_O(0_E, r)^\perp$, où l'on a noté

$$\mathcal{B}_O(0_E, r) = \{x \in E, \|x\| < r\}$$

Correction. 1. Pour tout $x \in E$, la phrase

$$\forall y \in \emptyset, \langle x, y \rangle = 0$$

est vraie puisque sa négation est

$$\exists y \in \emptyset, \langle x, y \rangle \neq 0$$

Ainsi, $\emptyset^\perp = E$.

2. Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in \{0_E\}^\perp &\iff \forall y \in \{0_E\}, \langle x, y \rangle = 0 \\ &\iff \langle x, 0_E \rangle = 0 \end{aligned}$$

ce qui est toujours vraie par linéarité à droite du produit scalaire. Ainsi $\{0_E\}^\perp = E$.

3. Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in E^\perp &\iff \forall y \in E, \langle x, y \rangle = 0 \\ &\implies \langle x, x \rangle = 0 \\ &\implies x = 0_E \end{aligned}$$

donc $E^\perp \subset \{0_E\}$.

De plus, il est clair que $0_E \in E^\perp$: pour tout $y \in E$, on a bien $\langle 0_E, y \rangle = 0$. Ainsi, $E^\perp = \{0_E\}$.

4. Soit $x \in E$ non nul.

Remarquons que

$$\left\| \frac{r}{2\|x\|} x \right\| = \frac{r}{2\|x\|} \|x\| = \frac{r}{2} < r$$

donc $\frac{r}{2\|x\|} x \in \mathcal{B}_O(0_E, r)$.

Ainsi, si $x \in \mathcal{B}_O(0_E, r)^\perp$, alors en particulier $\left\langle x, \frac{r}{2\|x\|} x \right\rangle = 0$ ou encore

$$\frac{r}{2\|x\|} \langle x, x \rangle = 0$$

donc $\langle x, x \rangle = 0$ et $x = 0_E$.

On en déduit que $\mathcal{B}_O(0_E, r)^\perp \subset \{0_E\}$. Comme dans la question précédente, l'inclusion réciproque est évidente et donne l'égalité.

Propriété 30.2.10

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et X une partie de E .
Alors X^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Il est clair que $X^\perp \subset E$.

Pour tout $y \in X$, on a $\langle 0_E, y \rangle = 0$: on a donc bien $0_E \in X^\perp$.

Enfin, montrons que X^\perp est stable par combinaison linéaire. Soient $x_1, x_2 \in X^\perp$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit $y \in X$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle \lambda x_1 + \mu x_2, y \rangle &= \lambda \underbrace{\langle x_1, y \rangle}_{=0} + \mu \underbrace{\langle x_2, y \rangle}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda x_1 + \mu x_2 \in X^\perp$.

Finalement, X^\perp est bien un sous-espace vectoriel de E . □

Remarque 30.2.11

X^\perp est donc un sous-espace vectoriel de E , même si X ne l'est pas.

Propriété 30.2.12

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E . Alors

$$\text{Vect}(e_i)_{i \in I}^\perp = \{x \in E, \forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0\}$$

Remarque 30.2.13

Autrement dit, $x \in E$ est dans $\text{Vect}(e_i)_{i \in I}^\perp$ si et seulement si x est orthogonal à chacun des $(e_i)_{i \in I}$.

Démonstration. — Soit $x \in X^\perp$. x étant orthogonal à tout élément de X , il est clair que $\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$.

L'inclusion $\text{Vect}(e_i)_{i \in I}^\perp \subset \{x \in E, \forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0\}$ est donc triviale.

— Réciproquement, soit $x \in E$ tel que : $\forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0$. Soit $y \in \text{Vect}(e_i)_{i \in I}$: il existe donc $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ tel que $y = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle x, \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i \in I} \underbrace{\langle x, e_i \rangle}_{=0} \lambda_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $x \in \text{Vect}(e_i)_{i \in I}^\perp$ et on a bien l'inclusion réciproque. □

Exercice 30.2.14

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire euclidien, déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 2, 3))$.

Correction. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in F^\perp &\iff \begin{cases} \langle (x, y, z), (1, 1, 1) \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z), (1, 2, 3) \rangle = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -y - z = z \\ y = -2z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$F^\perp = \{(z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -2, 1))$$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Dans cette partie, on s'intéresse à une méthode permettant, à partir d'une famille libre, de créer une famille orthonormée.

Théorème 30.2.15 – Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit (e_1, \dots, e_n) une famille libre de vecteurs de E , avec $n \in \mathbb{N}^*$. On définit alors une famille (u_1, \dots, u_n) de E de la façon suivante :

— On *normalise* e_1 : on pose $u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$.

— Pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$:

— On cherche $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})$ tel que $e_k + v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})^\perp$. Le vecteur $v = -\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, e_k \rangle u_i$ convient, et on pose

$$e_k' = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, e_k \rangle u_i$$

— On *normalise* e_k' : on pose $u_k = \frac{1}{\|e_k'\|} e_k'$.

La famille (u_1, \dots, u_n) est alors orthonormée, et $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Voir les figures 30.1, 30.2 et 30.3 pour une illustration dans \mathbb{R}^3 .

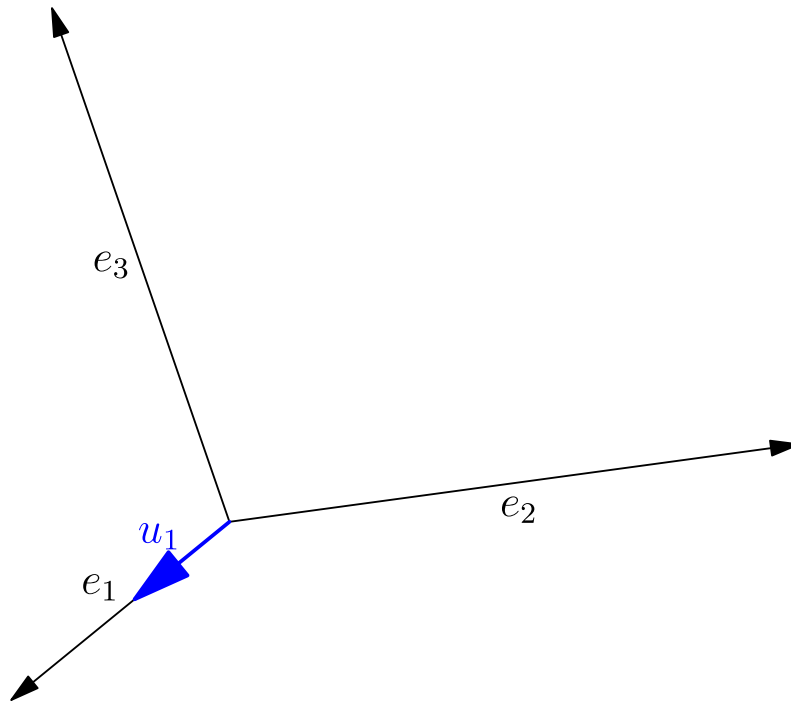
Démonstration. On peut raisonner par récurrence sur $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, en posant \mathcal{P}_k : « La famille (u_1, \dots, u_k) est orthonormée ».

— Remarquons que $e_1 \neq 0_E$ puisque (e_1, \dots, e_n) est supposée libre. On peut donc bien poser $u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$. Par opération élémentaire (dilatation), on a bien $\text{Vect}(u_1) = \text{Vect}(e_1)$. Enfin :

$$\|u_1\| = \left\| \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \right\| = \frac{1}{\|e_1\|} \|e_1\| = 1$$

\mathcal{P}_1 est donc vraie.

— Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. Supposons que (u_1, \dots, u_{k-1}) soit orthonormée et que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$. Cherchons $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})$ tel que $e_k + v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})^\perp$.

FIGURE 30.1 – On normalise e_1 et on obtient u_1 .

Soit $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. Par définition, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ tel que $v = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i u_i$. Ainsi :

$$\begin{aligned} e_k + v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})^\perp &\iff \forall j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket, \langle u_j, e_k + v \rangle = 0 \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket, \langle u_j, e_k \rangle + \langle u_j, v \rangle = 0 \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket, \langle u_j, e_k \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \langle u_j, u_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

Or (u_1, \dots, u_{k-1}) est orthonormée : on a donc, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket^2$:

$$\langle u_j, u_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \|u_i\|^2 = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} e_k + v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})^\perp &\iff \forall j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket, 0 = \langle u_j, e_k \rangle + \lambda_j = 0 \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket, \lambda_j = -\langle u_j, e_k \rangle \end{aligned}$$

Le vecteur $v = -\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, e_k \rangle u_i$ convient donc (et c'est le seul). Posons alors

$$e_k' = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, e_k \rangle u_i$$

On peut alors affirmer que e_k' n'est pas nul. En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$e_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, e_k \rangle u_i \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$$

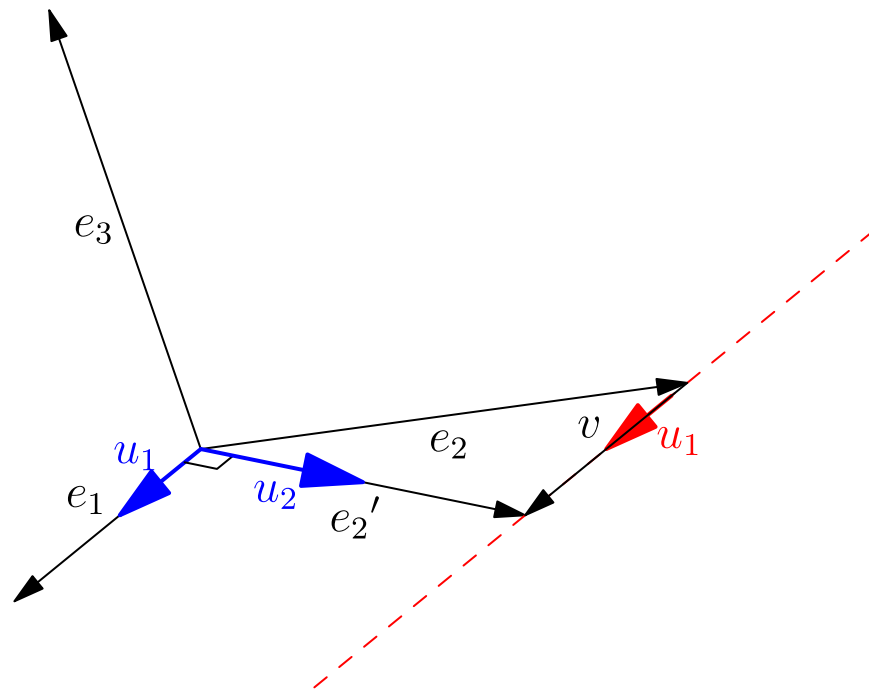


FIGURE 30.2 – On cherche $v \in \text{Vect}(u_1)$ tel que $e_2' = e_2 + v$ soit orthogonal à u_1 . On normalise ensuite e_2' et on obtient u_2 .

ce qui est exclu puisque (e_1, \dots, e_k) est libre.

On peut alors poser $u_k = \frac{1}{\|e_k'\|} e_k'$, qui est bien de norme 1. Puisque $e_k' \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})^\perp$, qui est un sous-espace vectoriel de E , on a bien $u_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})^\perp$: u_k est bien orthogonal à chacun des $(u_i)_{i \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket}$. Ces derniers étant, par définition, orthonormés, on en déduit que la famille (u_1, \dots, u_k) est orthonormée (et est donc libre).

Enfin, par opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
 \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k) &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, e_k') \\
 &= \text{Vect}\left(u_1, \dots, u_{k-1}, e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, e_k \rangle u_i\right) \\
 &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, e_k) \\
 &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}) + \text{Vect}(e_k) \\
 &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}) + \text{Vect}(e_k) \\
 &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}, e_k)
 \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. □

Exercice 30.2.16

En appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer une base orthonormée \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$, pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$$

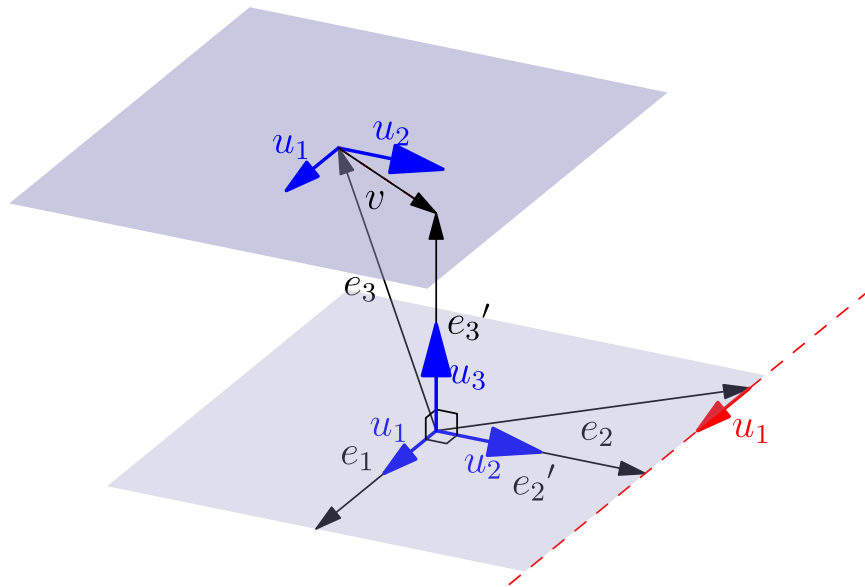


FIGURE 30.3 – On cherche $v \in \text{Vect}(u_1, u_2)$ tel que $e_3' = e_3 + v$ soit orthogonal à u_1 et à u_2 . On normalise ensuite e_3' et on obtient u_3 . La famille (u_1, u_2, u_3) est alors orthonormée.

Correction. On note $e_1 = 1$, $e_2 = X$ et $e_3 = X^2$.

— On normalise e_1 . Pour cela, on calcule $\|e_1\|$:

$$\|e_1\|^2 = \int_0^1 1 \times 1 dt = 1$$

donc $\|e_1\| = 1$ et on pose $u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} \times e_1 = e_1 = 1$.

— On calcule :

$$\begin{aligned} e_2' &= e_2 - \sum_{i=1}^{2-1} \langle u_i, e_2 \rangle u_i \\ &= X - \langle u_1, X \rangle \cdot 1 \\ &= X - \langle 1, X \rangle \cdot 1 \\ &= X - \int_0^1 1 \times t dt \cdot 1 \\ &= X - \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \cdot 1 \\ &= X - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On normalise e_2' :

$$\begin{aligned} \|e_2'\|^2 &= \left\langle X - \frac{1}{2}, X - \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(t - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

ainsi $\|e_2'\| = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. On pose alors

$$u_2 = \frac{1}{\|e_2'\|} e_2' = 2\sqrt{3}e_2' = 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}$$

— On calcule :

$$\begin{aligned} e_3' &= e_3 - \sum_{i=1}^{3-1} \langle u_i, e_3 \rangle u_i \\ &= X^2 - \langle 1, X^2 \rangle \cdot 1 - \langle 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}, X^2 \rangle \cdot (2\sqrt{3}X - \sqrt{3}) \\ &= X^2 - X + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

et, après normalisation, on obtient

$$u_3 = 6\sqrt{5} \left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right)$$

La famille $\left(1, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}, 6\sqrt{5} \left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right) \right)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire donné.

30.2.2 Bases orthonormées

Propriété 30.2.17

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien ^a. Alors E admet une base orthonormée.

^a. Pour rappel, il s'agit d'un espace préhilbertien réel de dimension finie

Démonstration. Il suffit de considérer une base quelconque de E et de lui appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. \square

Théorème 30.2.18 – Théorème de la base orthonormée incomplète

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et (u_1, \dots, u_p) une famille orthonormée de E . Alors il existe $u_{p+1}, \dots, u_n \in E$ tels que (u_1, \dots, u_n) soit une base orthonormée de E .

Démonstration. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter (u_1, \dots, u_p) en une base (a priori non orthonormée) $(u_1, \dots, u_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E .

On applique alors l'algorithme de Gram-Schmidt à cette base : on obtient bien une base orthonormée de E (famille libre à $n = \dim(E)$ éléments), dont les p premiers vecteurs n'ont pas été modifiés puisque déjà orthonormés.

Pour le dire autrement, on applique l'algorithme d'orthonormalisation à partir du rang $p+1$. \square

Propriété 30.2.19 – Expressions dans une base orthonormée

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de E .

Soient $x, y \in E$, et $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées respectives de x et y dans la base \mathcal{B} . Alors :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k = \langle x, u_k \rangle \quad (30.1)$$

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k \quad (30.2)$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad (30.3)$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \quad (30.4)$$

Démonstration. Puisque (u_1, \dots, u_n) est orthonormée, on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} = \delta_{i,j}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\langle x, u_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, u_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\langle u_i, u_k \rangle}_{=0 \text{ si } i \neq k} = x_k \langle u_k, u_k \rangle = x_k \underbrace{\|u_k\|^2}_{=1} = x_k$$

ce qui prouve 30.1.

30.2 est une conséquence directe de 30.1.

Par bilinéarité :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n y_j u_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=0 \text{ si } i \neq j} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \underbrace{\|u_i\|^2}_{=1} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

ce qui prouve 30.3. Enfin :

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

d'après ce qui précède, ce qui prouve 30.4. □

Exercice 30.2.20

On reprend l'exercice 30.2.16. Déterminer, avec le produit scalaire, les coordonnées de $P = 5 - 7X + 12X^2$ dans la base \mathcal{B} .

Correction. On pose $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3) = \left(1, 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)\right)$. Puisque \mathcal{B} est une base orthonor-

mée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire désigné, on a

$$P = \sum_{k=1}^3 \langle P, u_k \rangle u_k$$

donc P a pour coordonnées $(\langle P, u_1 \rangle, \langle P, u_2 \rangle, \langle P, u_3 \rangle)$ dans la base \mathcal{B} .

Après calculs, ces coordonnées sont $\left(\frac{11}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

30.3 Projections orthogonales

30.3.1 Relation entre un sous-espace vectoriel et son orthogonal

Propriété 30.3.1

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F et F^\perp sont en somme directe.

Démonstration. Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors x est orthogonal à lui-même donc :

$$0 = \left\langle \underbrace{x}_{x \in F}, \underbrace{x}_{x \in F^\perp} \right\rangle = \|x\|^2$$

donc $x = 0$ et on a bien $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. □

Remarque 30.3.2

Attention, rien ne dit que F et F^\perp sont supplémentaires dans E . C'est toutefois vrai si F est de dimension finie.

Définition 30.3.3 – Supplémentaire orthogonal pour un sous-espace de dimension finie

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**. Alors F et F^\perp sont supplémentaires dans E . On dit que F^\perp est le *supplémentaire orthogonal* de F dans E .

Démonstration. On sait déjà que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Montrons alors que $E = F + F^\perp$.

Soit $x \in E$. On peut raisonner par analyse-synthèse : supposons qu'il existe $(a, b) \in F \times F^\perp$ tel que $x = a + b$.

F étant de dimension finie, il admet une base orthonormée (u_1, \dots, u_n) . Puisque $a \in F$, on peut alors écrire que

$$a = \sum_{k=1}^n \langle a, u_k \rangle u_k$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\langle a, u_k \rangle = \langle x - b, u_k \rangle = \langle x, u_k \rangle - \underbrace{\langle b, u_k \rangle}_{=0} = \langle x, u_k \rangle$$

puisque $b \in F^\perp$ et $u_k \in F$.

On a donc nécessairement $a = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$ et $b = x - a = x - \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$ (et au passage, cela prouve l'unicité de a et b ,

et donc que la somme $F + F^\perp$ est directe, ce que l'on savait déjà).

Réciproquement, posons $a = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$ et $b = x - a = x - \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$. Il est clair que $a + b = x$ et que $a \in$

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = F$. Il reste à prouver que $b \in F^\perp$, c'est-à-dire que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \langle b, u_k \rangle = 0$$

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle b, u_k \rangle &= \left\langle x - \sum_{j=1}^n \langle x, u_j \rangle u_j, u_k \right\rangle \\ &= \langle x, u_k \rangle - \sum_{j=1}^n \langle \langle x, u_j \rangle, u_k \rangle \\ &= \langle x, u_k \rangle - \sum_{j=1}^n \underbrace{\langle x, u_j \rangle \langle u_j, u_k \rangle}_{=0 \text{ si } j \neq k} \\ &= \langle x, u_k \rangle - \underbrace{\langle x, u_k \rangle \langle u_k, u_k \rangle}_{=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc on a bien $b \in F^\perp$, et finalement $E = F + F^\perp$.
 F^\perp et F sont donc bien supplémentaires dans E . □

Remarque 30.3.4

Remarquez que E n'est pas supposé de dimension finie.

Corollaire 30.3.5

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . Alors $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$.

Démonstration. F est de dimension finie, donc F^\perp et F sont supplémentaires dans E : on a dès lors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$. □

Exemple 30.3.6

Le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est donc de dimension $n - (n - 1) = 1$. F^\perp est donc une droite vectorielle.

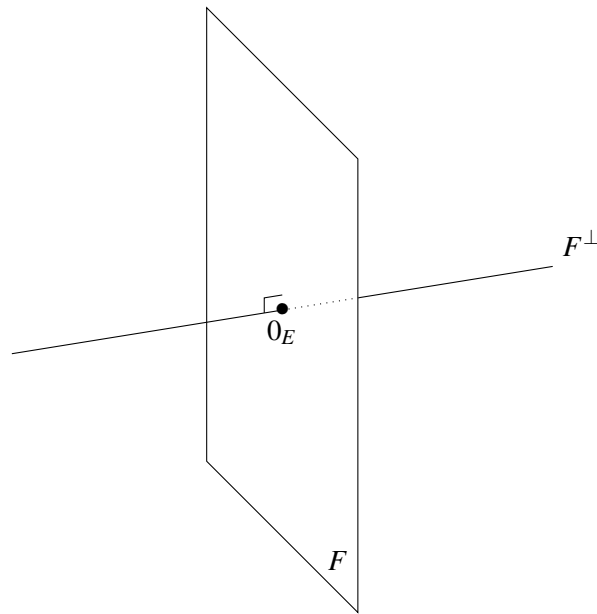
Cela se voit particulièrement bien dans \mathbb{R}^3 : le supplémentaire orthogonal d'un plan de l'espace est une droite (voir la figure 30.4).

30.3.2 Projections orthogonales

Définition 30.3.7 – Projection orthogonale

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E , **de dimension finie**.

La projection sur F parallèlement à F^\perp est appelée *projection orthogonale sur F* .

FIGURE 30.4 – Dans \mathbb{R}^3 , le supplémentaire orthogonal d'un plan est une droite.**Remarque 30.3.8**

F étant de dimension finie, F et F^\perp sont supplémentaires dans E : la projection sur F parallèlement à F^\perp est donc bien définie.

Pour tout $x \in E = F \oplus F^\perp$, il existe un unique couple $(u, v) \in F \times F^\perp$ tel que $x = u + v$. La projection orthogonale de x sur F est alors

$$p(x) = u$$

Propriété 30.3.9 – Expression du projeté orthogonal via une base orthonormée

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E , **de dimension finie**.

Soit p la projection orthogonale sur F .

Soit (u_1, \dots, u_n) une base orthonormée de F . Alors pour tout $x \in E$:

$$p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$$

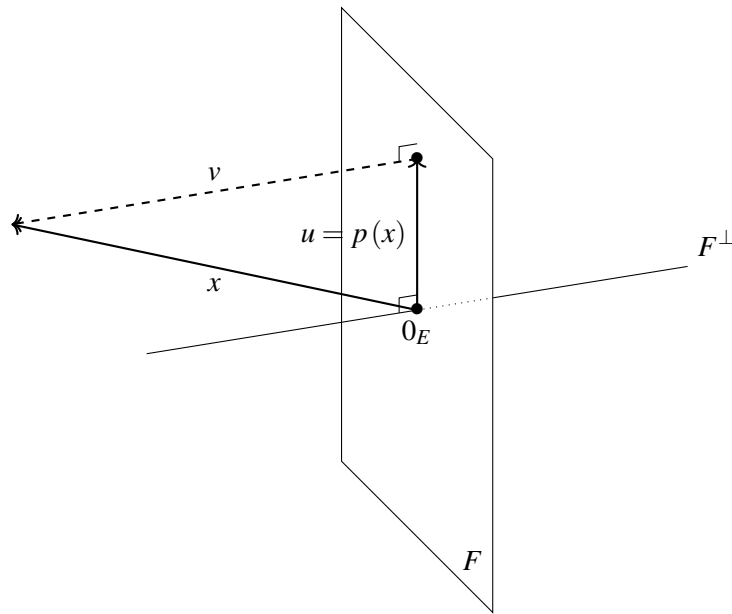
Démonstration. Par définition, on a $p(x) \in F$. Puisque (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormée de F , on a

$$p(x) = \sum_{k=1}^n \langle p(x), u_k \rangle u_k$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \langle x, u_k \rangle &= \langle x - p(x) + p(x), u_k \rangle \\ &= \langle x - p(x), u_k \rangle + \langle p(x), u_k \rangle \\ &= 0 + \langle p(x), u_k \rangle \end{aligned}$$

puisque, par définition de p (projection sur F parallèlement à F^\perp), on a $x - p(x) \in F^\perp$.

FIGURE 30.5 – Une projection orthogonale sur un plan de \mathbb{R}^3 .

On a donc bien

$$p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$$

□

Exercice 30.3.10

Déterminer le projeté orthogonal de $x = (1, 2, -1)$ sur $F = \text{Vect}((1, -1, 1), (1, 1, 0))$, pour le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^3 .

Correction. On peut procéder avec une base orthonormée de F . Remarquons que $((1, -1, 1), (1, 1, 0))$ est orthogonale pour le produit scalaire euclidien, puisque $\langle (1, -1, 1), (1, 1, 0) \rangle = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = 0$. En normalisant ces vecteurs, on obtient donc une base orthonormée de F .

Or $\|(1, -1, 1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ et, de même, $\|(1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$.

La famille $(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \right)$ est donc une base orthonormée de F .

Le projeté orthogonal de x sur F est alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \langle x, u_k \rangle u_k &= \left\langle (1, 2, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \\ &\quad + \left\langle (1, 2, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) \times 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \\ &= \frac{-2}{3}(1, -1, 1) + \frac{3}{2}(1, 1, 0) \\ &= \left(\frac{5}{6}, \frac{13}{6}, \frac{-2}{3} \right) \end{aligned}$$

30.3.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Définition 30.3.11

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E .
Soit $x \in E$. On appelle *distance de x à F* le nombre

$$d(x, F) = \inf \{ \|x - v\|, v \in F \}$$

Remarque 30.3.12

Cette borne inférieure est bien définie : $\{ \|x - v\|, v \in F \}$ est non vide (puisque $0_E \in F$) et est minorée par 0.

Propriété 30.3.13

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.
Soit p la projection orthogonale sur F .
Soit $x \in E$. Alors :

$$d(x, F) = \min \{ \|x - v\|, v \in F \} = \min_{v \in F} \|x - v\|$$

et ce minimum est atteint uniquement en $v = p(x)$.

Démonstration. Soit $v \in F$. Remarquons que $x - p(x) \in F^\perp$ (par définition de p) et que $p(x) - v \in F$ (puisque $p(x) \in F$ et $v \in F$). $x - p(x)$ et $p(x) - v$ sont donc orthogonaux, et d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x - v\|^2 = \|x - (x) + p(x) - v\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - v\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2 \quad (*)$$

En passant à la racine carrée, on a montré que pour tout $v \in F$:

$$\|x - v\| \geq \|x - p(x)\|$$

Ainsi $\|x - p(x)\|$ est un minorant de $\{ \|x - v\|, v \in F \}$, de sorte que

$$d(x, F) = \inf \{ \|x - v\|, v \in F \} \geq \|x - p(x)\|$$

De plus, ce minorant est atteint uniquement en $v = p(x)$. En effet, d'après (*) :

$$\|x - v\| = \|x - p(x)\| \iff \|x - v\|^2 = \|x - p(x)\|^2 \iff \|p(x) - v\|^2 = 0 \iff v = p(x)$$

$d(x, F)$ est donc bien un minimum, atteint uniquement en $p(x)$. □

Exercice 30.3.14

On reprend l'exercice 30.3.10. Déterminer la distance entre x et F .

Correction. En notant $p(x) = \left(\frac{5}{6}, \frac{13}{6}, \frac{-2}{3} \right)$ le projeté orthogonal de x sur F , la distance entre x et F est

$$\|x - p(x)\| = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Exercice 30.3.15 – Un classique

Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que le nombre $\int_0^1 (t^2 - (at + b))^2 dt$ soit minimal.

Correction. Il s'agit en réalité d'un problème de projection orthogonale. En effet, considérons le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, défini par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$$

On a alors :

$$\int_0^1 (t^2 - (at + b))^2 dt = \langle X^2 - (aX + b), X^2 - (aX + b) \rangle = \|X^2 - (aX + b)\|^2$$

Il s'agit donc de trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que la distance (pour la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$) entre X^2 et $\varphi_{a,b}$ soit la plus petite possible. Autrement dit, il s'agit de trouver $Q = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ minimisant la distance entre X^2 et Q . Notez que, puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie, nous sommes bien en train de parler d'un minimum (et pas seulement d'une borne inférieure).

On cherche donc $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que

$$\|X^2 - Q\| = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$$

Le seul vecteur convenable est alors le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$: il ne reste plus qu'à trouver celui-ci !

Pour cela, on peut commencer par déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$. Utilisons l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur la base canonique $(e_1, e_2) = (1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$.

$$\text{— } \|e_1\| = \|X\| = \int_0^1 t dt = 1 \text{ donc on pose } u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 = 1.$$

— On pose

$$\begin{aligned} e_2' &= e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1 \\ &= X - \left(\int_0^1 t \times 1 dt \right) \cdot 1 \\ &= X - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 \cdot 1 \\ &= X - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On normalise alors e_2' :

$$\begin{aligned} \|e_2'\| &= \sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle} \\ &= \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt} \\ &= \sqrt{\left[\frac{\left(t - \frac{1}{2} \right)^3}{3} \right]_0^1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{12}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

et on pose alors

$$u_2 = \frac{1}{\|e_2'\|} e_2' = 2\sqrt{3} \left(X - \frac{1}{2} \right)$$

La famille $(u_1, u_2) = \left(1, 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)\right)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est alors

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=1}^2 \langle X^2, u_k \rangle u_k \\ &= \langle X^2, u_1 \rangle u_1 + \langle X^2, u_2 \rangle u_2 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \langle X^2, u_1 \rangle &= \langle X^2, 1 \rangle \\ &= \int_0^1 t^2 \times 1 dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle X^2, u_2 \rangle &= \left\langle X^2, 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right) \right\rangle \\ &= \int_0^1 t^2 \times 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt \\ &= 2\sqrt{3} \int_0^1 \left(t^3 - \frac{1}{2}t^2\right) dt \\ &= 2\sqrt{3} \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{3} \cdot u_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot u_2 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right) \\ &= X - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Conclusion : le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ minimisant $\int_0^1 (t^2 - (at + b))^2 dt$ est le couple $\left(1, \frac{-1}{6}\right)$.

Index

- n -uplet, 41
- Écart-type, 824
- Écriture trigonométrique, 214
- Équation caractéristique, 341
- Équation différentielle
 - homogène, 334
 - linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, 339
 - linéaire d'ordre 1, 334
- Équation du second degré, 227
- Événements
 - incompatibles, 791
- Affixe, 190
- Algorithme d'Euclide, 55
- Analyse-synthèse, 26
- Angle orienté, 156
 - Mesure principale, 156
- Antécédent, 64
- Application, 64
 - bijective, 70
 - composée, 72
 - identité, 73
 - injective, 69
 - reciproque, 73
 - surjective, 68
- Argument, 214
- Arrangement, 102
- Assertion, 12
- Associativité, 596
 - Pseudo-associativité, 596
- Base, 611
- Borne
 - inférieure, 364
 - supérieure, 364
- Boule
 - ouverte, 855
- Cercle trigonométrique, 156, 206
 - Paramétrisation, 161
- Changement d'indice, 87
- Combinaison linéaire, 599
 - Stabilité par combinaison linéaire, 595, **600**
- Commutativité, 596
- Congruence, 157
- Conjugué, 196
- Continuité, 172
- Contraposée, 21
- Coordonnées, 611
- Corps des nombres complexes, 188
- Cosinus, 158
 - hyperbolique, 308
- Courbe représentative, 255
- Covariance de deux variables aléatoires, 827
- Croissance de l'intégrale, 324
- Croissances comparées, 302
- Discriminant, 227
- distance, 880
- Distribution de probabilité, 793
- Distributivité
 - à droite, 596
 - à gauche, 596
- Division euclidienne, 53
- Domaine de définition, 254
- Dérivabilité, 172
- Dérivées successives, 282
- Élément neutre, 596
- Élément symétrisable, 596
- Ensemble, 38
 - Complémentaire, 45
 - Différence, 45
 - Ensemble vide, 38
 - Intersection, 42
 - Partie, 40
 - Produit cartésien, 41
 - Réunion, 42
 - Sous-ensemble, 40
- Espace vectoriel, 596
 - Sous-espace vectoriel, 600
- Espérance, 818
- Exponentielle, 290
- Exponentielle complexe, 207
- Extremum, 269

- Factorielle, 100
- Famille, 41
 - finie, 41
 - génératrice, **605**
 - Libre, **608**
 - liée, **607**
- Fonction
 - Bornée, 268
 - Continue, 270
 - Croissante, 259
 - de classe \mathcal{C}^∞ , 283, 494
 - de classe \mathcal{C}^n , 283, 494
 - Décroissante, 259
 - Dérivée, 273
 - Impaire, 263
 - indicatrice, 76
 - Majorée, 268
 - Minorée, 268
 - Monotone, 259
 - Paire, 263
 - Périodique, 264
 - périodique, 158
 - réelle d'une variable réelle, 254
- Fonction négligeable devant une autre, 546
- Fonction polynomiale, 221
 - degré, 221
- Fonctions
 - Différence, 265
 - Produit, 266
 - Quotient, 266
 - Somme, 265
- Fonctions équivalentes en un point, 554
- Fonctions hyperboliques, 308
- Formule
 - d'addition, 165
 - d'Euler, 211
 - de duplication, 167
 - de Moivre, 213
 - des probabilités composées, 796
 - des probabilités totales, 797
 - du binôme de Newton, 205
- Gradient, 862
- Graphe
 - d'une application, 65
- Homothétie, 234
- Identités remarquables, 192
- Image, 64, 190
 - directe, 66
 - réci-proque, 66
- Imaginaire pur, 190
- Inclusion, 39
- Intervalle, 39, 137
- Intègre, 138
- Intégration par parties, 325
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, 882
- Inégalité triangulaire, 142, 201
- Lemme
 - des coalitions, 810
- Limite, 370
- Linéarité
 - de la somme, 86
- Logarithme
 - en base a , 296
 - népérien, 293
- Loi
 - binomiale, 805
 - conjointe, 806
 - d'une variable aléatoire, 802
 - d'une variable aléatoire conditionnée par un événement, 806
 - de Bernoulli, 804
 - marginale, 807
 - uniforme, 803
- Lois de Morgan, 22
- Matrice, 412
 - antisymétrique, 428
 - canoniquement associée à une application linéaire, 762
 - canoniquement associée à un vecteur, 758
 - carrée d'ordre n , 427
 - d'un endomorphisme, 763
 - d'un vecteur, 758
 - d'une application linéaire, 762
 - d'une famille de vecteurs, 762
 - de passage, 776
 - identité, 422
 - inversible, 432
 - symétrique, 428
 - élémentaire, 420
- Matrices
 - semblables, 778
- Maximum, 144, 269
- Minimum, 144, 269
- Module, 199
- Multiplicité d'une racine, 521
- Norme
 - associée à un produit scalaire, 880

- Notation de Landau, 546
 Noyau, 647
- Opérateurs logiques
 Équivalence, 19
 Conjonction, 15
 Disjonction, 16
 Implication, 17
 Négation, 16
 Réciproque, 17
- Opérations élémentaires, 116
- Ouvert, 855
- Partie
 bornée, 144
 imaginaire, 190
 majorée, 144
 minorée, 144
 ouverte, 855
 réelle, 190
- Partie entière, 147
- Parties disjointes, 46
- Plan
 tangent, 860
- Plus petit multiple commun, 56
- Polynôme, 506
 racine, 221
- Probabilité, 792
 uniforme, 795
- Produit
 téléscopique, 92
- Produit matriciel, 415
- Produit scalaire, 876
 euclidien, 861
- Prolongement, 75
- Proposition, 12
- Prédicat, 12
- Période, 264
- Quantificateur
 existentiel, 13
 Pseudo-quantificateur, 14
 universel, 13
- Quotient, 53
- Racine de l'unité, 222
- Raisonnement par l'absurde, 23
- Rang
 d'une application linéaire, 650
- Relation
 Antisymétrique, 134
 Réflexive, 134
 Transitive, 134
- Relation d'ordre, 134
- Reste, 53
- Restriction, 75
- Rotation, 232
- Récurrence
 double, 25
 forte, 26
 simple, 24
- Second membre, 116, 334
- Sinus, 158
 hyperbolique, 308
- Somme
 d'une famille finie, 84
 téléscopique, 92
- Suite, 41, 366
 arithmétique, 386
 extraite, 381
- Suites
 adjacentes, 383
- Symbole de Kronecker, 421
- Système complet d'événements, 792
- Système linéaire, 116
 homogène, 116
- Série
 de Riemann, 741
 exponentielle, 736
 géométrique, 735
 téléscopique, 735
- Série numérique, 732
- Tangente, 164
- Terme
 de rang n , 366
 général, 366
- Théorème
 de la bijection, 272
 de transfert, 822
 Des valeurs intermédiaires, 272
- Translation, 230
- Univers fini, 790
- Valeur absolue, 139
- Valeur de vérité, 12
- Variable aléatoire, 790, 802
 centrée, 818
 indicatrice d'un événement, 804
 réduite, 824

Variables aléatoires indépendantes, 807

Variance, 824

Vecteur

nul, 598

Vecteurs

colinéaires, 608