

Chapitre 13 : Calcul Différentiel

1 Fonctions de la variable réelle à valeur dans un espace vectoriel

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont des applications d'un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$). a désignera un point de I .

Nous allons pouvoir généraliser les notions de dérivées vues l'an passé, notamment en considérant les applications coordonnées de l'application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, puisque, pour tout $t \in I$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ avec chaque $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$. \mathbb{R}^n est muni de sa structure euclidienne.

1.1 Dérivabilité

Définition 1 (Dérivabilité). Soit $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$.

Si $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ admet un vecteur A de \mathbb{R}^n comme limite lorsque h tend vers 0, alors on dit que f est dérivable en a et on note $f'(a)$ ou encore $Df(a)$ le vecteur limite A : c'est le **vecteur dérivé** de f en a .

Définition 2.

- Lorsque $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par la droite, on dit que f est dérivable à droite en a et on note $f'_d(a)$ ou encore $Df(a^+)$ le vecteur dérivé à droite de f en a .
- Lorsque $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par la gauche, on dit que f est dérivable à gauche en a et on note $f'_g(a)$ ou encore $Df(a^-)$ le vecteur dérivé à gauche de f en a .

Théorème 1. f est dérivable en a si et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}.$$

Démonstration. □

Définition 3 (Fonction dérivable sur un intervalle). On dit que f est dérivable sur l'intervalle I lorsque f est dérivable en tout point de I . On appelle alors **fonction dérivée de f** la fonction

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}.$$

On la note aussi Df ou encore $\frac{df}{dx}$.

Théorème 2. f est dérivable en a , si, et seulement si, f admet un développement limité d'ordre 1 de f en a . On a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

ou encore

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o_{h \rightarrow 0}(x-a).$$

Théorème 3. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration. Utiliser le dl_1 de f ... □

Exercice 1. Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie par $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ avec chaque $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, vérifier que f est dérivable en a si, et seulement si, chaque application coordonnée f_k est dérivable en a . Généraliser ce résultat à toute base (et pas seulement la canonique) de \mathbb{R}^n .

Exercice 2. Quid des opérations sur les fonctions dérivables sur I à valeurs dans \mathbb{R}^n ?

1.2 Composition avec des applications multi/bi/linéaires

Propriété 1. Soit L une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et soit $a \in I$.

- Si f est dérivable en a , alors $L \circ f$ l'est aussi et on a $(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$.
- Si f est dérivable sur I , alors $L \circ f$ l'est aussi et on a $(L \circ f)' = L \circ f'$.

Démonstration. □

Propriété 2. Soit B une application linéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^q , soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et soit $a \in I$. On pose $\varphi = B(f, g)$.

- Si f et g sont dérivables en a , alors φ l'est aussi et on a $\varphi'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$.
- Si f et g sont dérivables sur I , alors φ l'est aussi et on a $\varphi' = B(f', g) + B(f, g')$.

Démonstration. □

Exemple 1. Dérivée du produit scalaire, de la norme au carré.

Exercice 3. Montrer que l'application f est de norme constante (déplacement sur la sphère centrée en l'origine) si, et seulement si, f et f' sont orthogonaux.

Remarque 1. On peut généraliser la propriété précédente à toute forme multilinéaire.

Exercice 4. Dérivée du déterminant.

1.3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

On retrouve les mêmes notions que celles vues l'an passé : fonction k fois dérivable avec une dérivée d'ordre k continue sur I .

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel réel.

Exercice 5. Soit L une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^k sur I . Vérifier que $L \circ f$ est de classe \mathcal{C}^k sur I et donner ses dérivées successives.

2 Fonctions définies de \mathbb{R}^p et à valeurs réelles

p désigne ici un entier naturel non nul, $p \geq 2$. \mathbb{R}^p est muni de sa structure euclidienne.

Les applications considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert U de \mathbb{R}^p (avec généralement $p = 2$ ou $p = 3$) et à valeurs dans \mathbb{R} . Il s'agit donc de fonctions de plusieurs variables, généralement notées (x, y) dans le cas \mathbb{R}^2 et (x, y, z) dans le cas \mathbb{R}^3 :

$$f : \text{ouvert } U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}.$$

2.1 Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

Soit a un vecteur de U . Comme U est un ouvert de \mathbb{R}^p , il existe un rayon $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset U$. Pour un vecteur non nul v de \mathbb{R}^p , en posant $\delta = \frac{r}{\|v\|}$, on a :

$$\forall t \in]-\delta; \delta[, \quad a + tv \in B_o(a, r) \subset U$$

puisque $\|(a + tv) - a\| = |t| \|v\| \leq r$. On pose alors :

$$\forall t \in]-\delta; \delta[, \quad \varphi_v(t) = f(a + tv).$$

Définition 4 (dérivée suivant le vecteur v). Si φ_v est dérivable en $t = 0$, on dit que f admet **une dérivée suivant le vecteur v en a** , que l'on note $D_v f(a)$:

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Définition 5 (dérivées partielles). f admet **une dérivée partielle en a par rapport à la j -ième variable** lorsque f admet une dérivée suivant le vecteur e_j en a , où e_j est le j -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^p .

Cette dérivée partielle se note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ (ou aussi parfois $\partial_j f(a)$).

Exemple 2. Dans le cas d'une fonction à deux variables ($p = 2$ donc), on a, avec $a = (a_1, a_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}. \end{aligned}$$

Remarque 2. Pour une fonction f à valeurs dans \mathbb{R}^n , on peut également définir ses dérivées partielles comme les vecteurs formés des dérivées partielles de chacune des fonctions coordonnées de f . Ainsi

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

aura pour dérivée partielle suivant la j -ième variable en a le vecteur

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right).$$

Définition 6. Si f admet une dérivée partielle par rapport à la j -ième variable en tout point a de U , la fonction **dérivée partielle d'ordre 1** par rapport à la j -ième variable est la fonction

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \end{aligned}.$$

2.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Définition 7. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^p lorsque ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U .

Exemple 3. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 y + 3xyz - 5z^3$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 6. f et g étant de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^p à valeurs dans \mathbb{R} , vérifier, en calculant leurs dérivées partielles d'ordre 1, qu'il est en de même pour $f + g$, $f \times g$ ainsi que pour λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et pour $\frac{f}{g}$ (en supposant que g ne s'annule pas sur U).

Exercice 7. f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^p à valeurs dans \mathbb{R} et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telles que $f(U) \subset I$. Montrer que $\varphi \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U et que

$$\forall x \in U, \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_j}(x) = (\varphi' \circ f)(x) \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

2.3 Gradient, différentielle en un point et développement limité

Définition 8. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^p .

Le **gradient** de f au point $a \in U$ est le vecteur de \mathbb{R}^p , noté $\nabla f(a)$ (opérateur "nabla") défini par

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

Théorème 4 (Admis). $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^p , $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in U$. f admet un **développement limité d'ordre 1 en a** et l'on a :

$$\forall x \in U, \quad f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)(x_p - a_p) + o(\|x - a\|)$$

ou encore, avec $h = x - a$:

$$\forall x \in U, \quad f(a + h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)h_p + o(\|h\|).$$

En particulier, ce développement limité s'écrit :

$$f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a) | x - a \rangle + o(\|x - a\|) = f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + o(\|h\|).$$

Corollaire 1. Une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U est continue sur U .

Démonstration.

□

Définition 9. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^p , $a \in U$.

La **différentielle** df_a de f en a est la forme linéaire définie par

$$\begin{aligned} df_a : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{aligned}$$

Remarque 3. En particulier, on a $df_a(h) = \langle \nabla f(a) | h \rangle$ et le développement limité d'ordre 1 de f en a devient

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|).$$

Par analogie avec le produit scalaire, on note aussi $df_a \cdot h$ à la place de $df_a(h)$.

Exercice 8. A l'aide du développement limité d'ordre 1 de f en a , vérifier que la dérivée de f en a suivant le vecteur h coïncide avec la différentielle de f en a appliquée à h . Autrement dit, montrer que

$$D_h f(a) = df_a \cdot h$$

Propriété 3. Lorsque $\nabla f(a)$ n'est pas le vecteur nul, il est colinéaire (avec même sens) au vecteur unitaire suivant lequel la dérivée en a est de norme maximale.

Démonstration. Remarquons que $v_a = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|} \nabla f(a)$ est un vecteur unitaire et que

$$D_{v_a} f(a) = df_a(v_a) = \langle \nabla f(a) | v_a \rangle = \|\nabla f(a)\|.$$

En outre, $D_h f(a) = df_a(h) = \langle \nabla f(a) | h \rangle$, et $\|D_h f(a)\| \leq \|\nabla f(a)\| \|h\|$. En particulier, si h est unitaire, on a

$$\|D_h f(a)\| \leq \|\nabla f(a)\|.$$

Il suit que $\|\nabla f(a)\|$ est un majorant des $\|D_h f(a)\|$ avec h unitaire et que ce majorant est atteint pour $h = v_a$. \square

2.4 Règle de la chaîne

La règle qui suit permet de calculer les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables qui dépendent toutes d'une même variable.

Propriété 4 (Règle de la chaîne). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^p et soient p fonctions $x_i : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto x_i(t) \in \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle I telles que, pour tout $t \in I$, on ait $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)) \in U$. Alors :

- la fonction $g : t \in I \mapsto f(x(t)) = f((x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- pour tout $t \in I$, on a

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t))x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x(t))x_2'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x(t))x_p'(t).$$

Démonstration. Il faut partir des développements limités d'ordre 1... \square

Remarque 4. Pour alléger, on oublie les $x(t)$ et, comme en physique, on ne distingue pas f de g , ce qui donne :

$$f'(t) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} \times \frac{dx_i}{dt}.$$

Par exemple, dans \mathbb{R}^3 , on aurait :

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \times \frac{dz}{dt}.$$

Corollaire 2. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert **convexe** U de \mathbb{R}^p .

f est constante sur U si, et seulement si, toutes ses dérivées partielles sont nulles sur U .

Démonstration. On prend deux points a et b dans U et on observe $g : t \mapsto f(ta + (1-t)b)$ sur $[0 ; 1]$... \square

Remarque 5. Ce corollaire est en défaut si U n'est pas convexe : prendre $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $f(x, y) = 1$ si $x > 0$ et $f(x, y) = -1$ sinon...

Corollaire 3. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^p et soient p fonctions $x_i : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n telles que, pour tout $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \Omega$, on ait $x(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_p(u)) \in U$. Alors :

- la fonction $g : u \in \Omega \mapsto f(x(u)) = f((x_1(u), x_2(u), \dots, x_p(u)))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω ;
- pour tout $j \in [1 ; n]$, pour tout $u \in \Omega$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(u)) \frac{\partial x_1}{\partial u_j}(u) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x(u)) \frac{\partial x_2}{\partial u_j}(u) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x(u)) \frac{\partial x_p}{\partial u_j}(u).$$

Démonstration.

□

Remarque 6. Pour simplifier, on retient la chaîne $\frac{\partial g}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} \times \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$.

Exercice 9 (coordonnées polaires). $x : (r, \theta) \mapsto r \cos(\theta)$ et $y : (r, \theta) \mapsto r \sin(\theta)$ étant des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 , on considère une fonction f définie sur \mathbb{R}^2 et à valeurs réelles, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . On pose $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

1. Vérifier que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.

2.5 Fonctions de classe \mathcal{C}^2

Définition 10 (dérivées partielles d'ordre 2). Si la i -ième dérivée partielle d'ordre 1 de la fonction f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la j -ième variable au point $a \in U$, on dira que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2** en a par rapport à la i -ième variable puis par rapport à la j -ième variable.

On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ cette dérivée partielle d'ordre 2 en a .

Si elle existe en tout point a de U , on définit alors sur U la fonction dérivée partielle d'ordre 2 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Remarque 7. On a donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a)$.

L'ordre de dérivation est important ! *A priori*, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$...

Si l'on dérive deux fois par rapport à la même variable, on note plus simplement $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ à la place de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$$

Exercice 10. Peano a défini en 1884 la fonction suivante f sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ avec } f(0, 0) = 0.$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ ainsi que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Définition 11. L'application f est de classe \mathcal{C}^2 sur U lorsqu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur U et que toutes ses fonctions dérivées partielles sont aussi de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Théorème 5 (théorème de Schwarz - admis). Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur U alors, en tout point a de U , on a :

$$\forall i, j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Exercice 11. En déduire que la fonction de Peano de l'exercice précédent n'est pas de classe \mathcal{C}^2 .

Définition 12. Pour une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$, en tout point a de U , on définit sa **matrice hessienne** en a par

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \right)_{(i,j) \in [1; p]^2}.$$

Exercice 12. Ecrire cette matrice dans les cas où $p = 2$, $p = 3$.

Propriété 5. La matrice hessienne est une matrice symétrique réelle.

Démonstration.

□

Propriété 6 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 - admise). Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$, a un point de U , h un vecteur de \mathbb{R}^p tel que $a + h \in U$, alors :

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) h | h \rangle + o(\|h\|^2)$$

ou encore

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$$

ou encore

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) h_i h_j \right) + o(\|h\|^2).$$

2.6 Extrema d'une fonction de \mathbb{R}^n à valeurs réelles

On considère une partie quelconque $\Delta \subset \mathbb{R}^p$ et $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 13. $a \in \Delta$ est un **maximum global** (resp. un **minimum global**) de f lorsque

$$\forall x \in \Delta, \quad f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

$a \in \Delta$ est un **maximum local** (resp. un **minimum local**) de f lorsqu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in \Delta \cap B_o(a, r), \quad f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

Remarque 8. Sauf mention particulière, lorsque l'on parle d'un extremum, il s'agit d'un extremum local.

Définition 14. f est de classe \mathcal{C}^1 .

a est un **point critique** de f lorsque le gradient de f en a est nul : $\nabla_f(a) = 0_{\mathbb{R}^p}$.

Théorème 6 (condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert - admis). *Si f , de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U , atteint un extremum local en $a \in U$, alors a est un point critique de f sur U .*

Remarque 9. Sur un ouvert, pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 , les points susceptibles de présenter un extremum sont à rechercher parmi les points critiques.

Sur un ensemble qui n'est pas ouvert, il faudra aussi étudier sa frontière pour détecter tous les extrema possibles...

Exercice 13.

Théorème 7 (caractérisation d'un minimum pour une fonction de classe \mathcal{C}^2). *Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert U et si a est un point critique de f :*

- si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ (définie positive), alors f atteint son minimum local strict en a ;
- si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ (positive), alors f n'a pas de minimum en a .

Démonstration. On utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 2... □

Théorème 8 (caractérisation d'un maximum pour une fonction de classe \mathcal{C}^2). *Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert U et si a est un point critique de f sur U :*

- si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ (définie positive), alors f atteint son maximum local strict en a ;
- si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ (positive), alors f n'a pas de maximum en a .

Remarque 10. C'est l'occasion de se rappeler du théorème spectral !

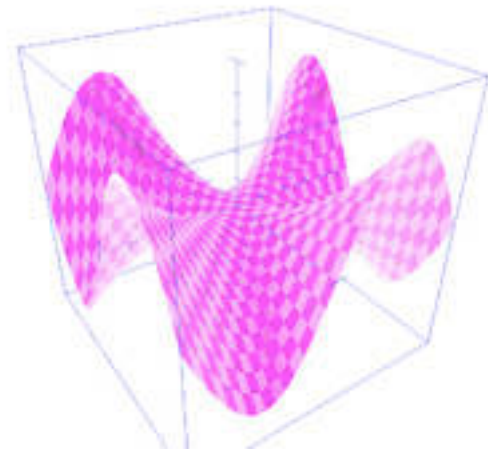
Corollaire 4 (dans \mathbb{R}^2). *Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^2 et si a est un point critique de f sur U :*

- si $\det(H_f(a)) \leq 0$, f n'a pas d'extremum en a ;
- si $\det(H_f(a)) > 0$, f admet un extremum en a qui est
 - un minimum si $\text{tr}(H_f(a)) > 0$;
 - un maximum si $\text{tr}(H_f(a)) < 0$.

Démonstration. On remarquera que le déterminant correspond au produit des valeurs propres et que la trace correspond à leur somme... □

Définition 15. Dans \mathbb{R}^2 , un point critique a tel que $\det(H_f(a)) < 0$ est un **point selle** (ou un **point col**). Si $\det(H_f(a)) = 0$, on parle de **point plat** (ou **point dégénéré**) pour f .

Et pour finir, la nappe correspondant à la fonction de Peano :



MAY THE FORCE BE WITH U