

Chapitre 12 : Espaces Vectoriels Normés

Comme à l'habitude, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1 Normes et distances

1.1 Définitions

Définition 1 (Norme). On appelle **norme** sur E , toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés de séparation, homogénéité et l'inégalité triangulaire :

1.

$$\forall x \in E, \quad x = 0 \Leftrightarrow N(x) = 0 \quad \text{séparation}$$

2.

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \text{homogénéité}$$

3.

$$\forall x, y \in E, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad \text{inégalité triangulaire/sous-additivité}$$

Définition 2. E muni d'une norme N est appelé **espace vectoriel normé**.

Tout vecteur de E de norme 1 est un **vecteur unitaire**.

Exemple 1. Si E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$, on appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ l'application, notée $\| \cdot \|$ et définie par

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle} = \|x\| \end{aligned}$$

Exemple 2. On se rappellera que les applications suivantes constituent des normes sur \mathbb{K}^n :

– on définit la **norme infinie** d'un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ par $\|x\|_\infty = \max(|x_i|, 1 \leq i \leq n)$;

– on définit la **norme 1** d'un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;

– on définit la **norme 2** d'un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ par $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

Exemple 3. On se rappellera également de la norme de la convergence uniforme : I étant un intervalle de \mathbb{R} , pour une application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ bornée, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} (|f(x)|).$$

Exercice 1. Sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[0 ; 1]$, l'application

$$N : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$$

est-elle une norme ?

Propriété 1 (Inégalité triangulaire). Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On a :

1.

$$\forall x, y \in E, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

2.

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in E, \quad N\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i)$$

3.

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in E, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad N\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| N(x_i)$$

Démonstration. □

Définition 3. Si (E, N) est un espace vectoriel normé, la **distance** entre deux vecteurs x et y de E est $N(x - y)$. C'est l'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = N(x - y) \end{aligned}$$

Exemple 4. Si E un espace préhilbertien réel, la **distance euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est l'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

Propriété 2. La distance d associée à la norme N de E vérifie les propriétés suivantes :

1.

$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \text{symétrie}$$

2.

$$\forall x, y, z \in E, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{inégalité triangulaire}$$

3.

$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \text{séparation}$$

Démonstration. □

Désormais, on désignera la norme $N(x)$ du vecteur x par $\|x\|$. Ainsi $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous vecteurs x, y de E .

Réécrire avec cette notation les inégalités triangulaires.

1.2 Boules, sphères, parties convexes, parties bornées

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 4 (Boules et sphère). Soit $a \in E$ et soit $r \geq 0$.

1. La **boule ouverte** $B_o(a, r)$ de centre a et de rayon r est définie par

$$B_o(a, r) = \{x \in E, \quad \|x - a\| < r\};$$

2. la **boule fermée** $B_f(a, r)$ de centre a et de rayon r est définie par

$$B_f(a, r) = \{x \in E, \quad \|x - a\| \leq r\};$$

3. la **sphère** $S(a, r)$ de centre a et de rayon r est définie par

$$S(a, r) = \{x \in E, \quad \|x - a\| = r\}.$$

Remarque 1. Quand $E = \mathbb{K}^2$, on parle plus volontiers de disques et de cercle.

Exercice 2. Dans \mathbb{R}^2 , dessiner la **boule unité fermée** $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.
Même question pour $E = \mathbb{R}$.

Définition 5 (Partie convexe). Une partie A de E est convexe lorsque

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0 ; 1], tx + (1 - t)y \in A.$$

Remarque 2. Interprétation géométrique ?

Exercice 3. Vérifier qu'un sous-espace vectoriel de E est une partie convexe de E .

Exercice 4. Montrer que l'intersection de deux parties convexes de E est encore une partie convexe de E . Que dire de leur réunion ?

Propriété 3. Les boules ouvertes et fermées sont des parties convexes de E .

Démonstration. Remarquer que $a = ta + (1 - t)a$ pour tout vecteur a et tout nombre réel t ... □

Définition 6 (Partie bornée). Une partie A de E est bornée lorsqu'il existe un nombre positif M tel que

$$\forall x \in A, \|x\| \leq M.$$

M est alors un majorant de A et on peut définir la borne supérieure de A comme étant le plus petit des majorants de A .

Exercice 5. Montrer que l'intersection et la réunion de deux parties bornées de E sont encore des parties bornées de E . Peut-on généraliser ?

1.3 Normes équivalentes

Définition 7. Deux normes N_1 et N_2 de l'espace vectoriel E sont qualifiées d'**équivalents** lorsqu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Exercice 6. Vérifier que sur \mathbb{K}^n , les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes : pour $x \in \mathbb{K}^n$, montrer que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty.$$

Exercice 7. Pour $f : x \rightarrow x^n$, comparer $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $\|f\|_\infty$. A l'aide de parties bornées ou non bornées, en déduire que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Remarque 3. Pour deux normes équivalentes, les notions de boules, parties bornées sont donc les "mêmes".

2 Suites d'un espace vectoriel normé

Définition 8. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ **converge vers le vecteur** $u \in E$ si, et seulement si, la suite des nombres réels $(\|u_n - u\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Une suite qui ne converge pas est qualifiée de **divergente**.

Exercice 8. Donner la définition infinitésimale de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers u .

Exemple 5. Convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle I .

Exercice 9. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit l'application N qui à une matrice associe le maximum de la valeur absolue de ces quatre coefficients.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Quelle serait la limite de la suite de matrices $\left(\begin{pmatrix} e^{\frac{1}{n}} & \frac{1}{n^2} \\ e^{-n} & \frac{\sin(n)}{n} \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
3. Proposer d'autres normes sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Propriété 4. Dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, une suite de vecteurs convergente est **bornée**.

Démonstration. On passera par la suite des nombres $(\|u_n - u\|)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Propriété 5. La limite d'une suite de vecteurs convergente est **unique**.

Démonstration. On passera par la suite des nombres $(\|u_n - u\|)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour l'unicité, si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux limites, écrire que $\|\ell_1 - \ell_2\| \leq \|u_n - \ell_1\| + \|u_n - \ell_2\|$ pour conclure... □

Propriété 6 (suites extraites). Toute suite extraite d'une suite convergente de E est encore une suite convergente de E .

Une suite de E converge vers ℓ si, et seulement si, toutes ses sous-suites convergent vers ℓ .

Démonstration. On passera encore par la suite des nombres $(\|u_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N} \dots}$ □

Remarque 4. Cela permet aussi de montrer qu'une suite diverge : il suffit d'exhiber deux suites extraites qui n'ont pas la même limite !

Propriété 7. L'ensemble des suites convergentes de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application qui, à toute suite convergente de E associe sa limite, est une application linéaire.

Démonstration. □

Exercice 10. Soient u et v deux vecteurs de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On définit la suite de vecteurs $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $w_n = (-1)^n u + 2^{-n} v$. Vérifier que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet deux suites extraites convergentes mais que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 11. Si deux normes sont équivalentes, expliquer pourquoi la nature "convergente/divergente" d'une suite de vecteurs est conservée. Dans le cas où il y a convergence, vérifier également que la limite est inchangée suivant la norme envisagée.

Application : pour $f : x \rightarrow x^n$, comparer $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $\|f\|_{\infty}$ et en déduire que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans ce paragraphe, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et A désigne une partie de E .

3.1 Parties ouvertes

Définition 9. Un vecteur $a \in E$ est un **point intérieur** à A lorsqu'il existe une boule ouverte centrée en a et contenue dans A .

$$\exists r > 0, B_o(a, r) \subset A$$

L'ensemble des points intérieurs à A est l'**intérieur** de A , on le note $\overset{\circ}{A}$.

Définition 10. A est une **partie ouverte** de E (ou un **ouvert** de E) lorsque tous les vecteurs de A sont des points intérieurs à A .

Remarque 5. Quelques remarques :

- E et \emptyset sont des ouverts de E ;
- $\overset{\circ}{A} \subset A$: un point intérieur à A appartient à A mais la réciproque est fausse ; 1 est un point intérieur à $[0 ; 1[$!
- les boules ouvertes sont des parties ouvertes de E ;
- A est un ouvert de E si, et seulement si, $\overset{\circ}{A} = A$.

Exercice 12. Montrer que les boules ouvertes sont des parties ouvertes de E .

Propriété 8. Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E .

Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E .

Démonstration.

□

Remarque 6. Attention, cela ne fonctionne plus pour une intersection quelconque. Considérer pour cela l'intersection de tous les intervalles ouverts de la forme $\left] -\frac{1}{n} ; \frac{1}{n} \right[$.

3.2 Parties fermées

Définition 11. A est une **partie fermée** de E (ou un **fermé** de E) lorsque son complémentaire est un ouvert.

Remarque 7. Quelques remarques :

- E et \emptyset sont des fermés de E ;
- une partie de E peut très bien être ni ouverte ni fermée : $]1 ; 2]$ dans \mathbb{R} ;
- les boules fermées, les sphères, sont des fermés de E .

Propriété 9. Une réunion finie de fermés de E est un fermé de E .

Une intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E .

Démonstration. lois de Morgan...

□

Propriété 10 (caractérisation séquentielle des fermés). Une partie A de E est fermée si, et seulement si, toute suite convergente de A converge vers un élément de A .

Démonstration. On démontre l'équivalence des contraires...

□

3.3 Adhérent

Définition 12. Un vecteur a de E est un **point adhérent** à la partie A lorsque :

$$\forall r > 0, B_a(a, r) \cap A \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points adhérents à A est l'**adhérence** de A , on le note \bar{A} ou $Adh(A)$.

Remarque 8. Attention à la notation : ne pas confondre adhérent et complémentaire !

Remarque 9. Quelques remarques :

- A est inclus dans son adhérence \bar{A} : tout vecteur de A est un point adhérent à A . La réciproque est fausse : 0 est un point adhérent à $]0 ; 1]$ mais 0 n'est pas dans cet intervalle ;
- tout point de la sphère $S(a, r)$ est adhérent à $B_o(a, r)$.

Exercice 13. A est une partie non vide et bornée dans \mathbb{R} . Montrer que les bornes supérieure et inférieure de A sont des point adhérents à A .

Propriété 11 (caractérisation séquentielle de l'adhérence). a est un point adhérent à une partie A si, et seulement si, il existe suite d'éléments de A qui converge vers a .

Démonstration. □

Remarque 10. Autrement dit, l'adhérence de A est l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans A .

Corollaire 1. A est une partie fermée de E si, et seulement si, elle coïncide avec son adhérence ($A = \bar{A}$).

Démonstration. □

Remarque 11. Ainsi, une partie fermée contient la limite de toutes ses suites convergentes.

Définition 13. Soit A une partie de E . On dit d'une partie D de A qu'elle est **dense** dans A lorsque l'adhérence de D est A : $\bar{D} = A$.

Exemple 6. $]0 ; 1[$ est dense dans $[0 ; 1]$.

Propriété 12. D est dense dans A si, et seulement si, tout vecteur de A est limite d'une suite de vecteurs de D .

Démonstration. C'est une conséquence de la caractérisation séquentielle de l'adhérence... □

Exemple 7. \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 14. On munit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $A \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = A - \frac{1}{3^n} I_p$.

1. Vérifier que la suite de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers A .
2. En observant que A n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel, lorsque $n \geq n_0$, la matrice A_n est inversible.
3. En déduire que $\mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Remarque 12. Toutes ces notions topologiques sont invariantes lorsque l'on considère des normes équivalentes.

4 Applications entre espaces vectoriels normés

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $F, \|\cdot\|_F$ deux espaces vectoriels normés.

Pour une application $f : E \rightarrow F$ (pas forcément linéaire !) nous allons généraliser les notions de limite et de continuité vues l'an dernier.

4.1 Limites

Définition 14. A est une partie de E . Soient $f : A \rightarrow F$, a un point adhérent à A et $b \in F$. f admet b comme limite en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - b\|_F < \varepsilon.$$

Exercice 15. Réécrire cette définition en termes de distances, de boules.

Propriété 13 (caractérisation séquentielle de la limite). *Pour A partie de E , $f : A \rightarrow F$, a point adhérent à A et $b \in F$, on a l'équivalence suivante :
 f admet b comme limite en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b .*

Démonstration. □

Propriété 14. En cas d'existence, la limite définie ci-avant est **unique**. On écrira $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Démonstration. Prendre, puisque a est adhérent à A une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a et observer la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. □

Exercice 16. Retrouver les différentes opérations sur les limites.

4.2 Continuité

On conserve le même contexte que précédemment, f étant une application définie sur une partie A de E .

Définition 15. f est continue en $a \in A$ lorsque f admet une limite en a .

Propriété 15. f est continue en $a \in A$ si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Démonstration. Comme $a \in A$, appliquer la composition des limites avec la suite constante égale à a . □

Remarque 13. Si a est seulement un point adhérent à A (donc si $a \in \bar{A} \setminus A$), on retrouve la notion de **prolongement par continuité** en a .

Propriété 16 (caractérisation séquentielle de la continuité). *Pour A partie de E , $f : A \rightarrow F$, et $a \in A$, on a l'équivalence suivante :
 f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. □

Définition 16. f est continue sur A lorsque f est continue en tout point $a \in A$.

Exercice 17. Retrouver les opérations sur les fonctions continues. Que dire de la composition de deux fonctions continues ? De la restriction d'une fonction continue ?

Exercice 18. Vérifier que l'application norme $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur E .

Exercice 19. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que f est continue sur E si, et seulement si, f est continue en 0_E .

Théorème 1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application continue entre espaces vectoriels normés.

1. L'image réciproque par f de toute partie fermée de F est une partie fermée de E ;
2. L'image réciproque par f de toute partie ouverte de F est une partie ouverte de E ;

Démonstration. Pour le cas fermé, passer par la caractérisation séquentielle. Pour le cas ouvert, remarquer que $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$... \square

Exercice 20. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que :

1. les vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) > 0$ forment un ouvert de E ;
2. les vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) \leq 0$ forment un fermé de E ;
3. les vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) = 5$ forment un fermé de E .

Exercice 21. En admettant que le déterminant est continu de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , expliquer pourquoi $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4.3 Applications lipschitziennes

Définition 17. Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ une application et soit A une partie de E . On dit que f est k -lipschitzienne sur A (ou **lipschitzienne de rapport k**) lorsqu'il existe un nombre réel $k \geq 0$ tel que

$$\forall x, y \in A, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

Exercice 22. Vérifier que l'application norme $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne sur E .

Exercice 23. Vérifier qu'une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , dont la dérivée est bornée, est lipschitzienne.

Propriété 17. Toute application lipschitzienne sur A est continue sur A .

Démonstration. \square

5 En dimension finie

5.1 Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 2 (Admis). *Dans un espace vectoriel de **dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 2. *En dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas de la norme de l'espace vectoriel.*

Exemple 8. Pour $x \in \mathbb{K}^n$, on a vu que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty.$$

5.2 Continuité des coordonnées

On se place dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie p avec pour base la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$. Pour une suite de vecteurs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, écrivons, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \sum_{i=1}^p u_{n,i} e_i$$

autrement dit, les coordonnées de u_n sont $(u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,p})$ dans la base \mathcal{B} .

Propriété 18. *La suite de vecteurs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E si, et seulement si, les p suites de coordonnées $(u_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent dans \mathbb{K} .*

Dans ce cas, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sum_{i=1}^p \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,i} \right) e_i.$$

Démonstration. On s'appuiera sur l'équivalence des normes en dimension finie et on observera la convergence avec la norme $\|\cdot\|_\infty$. □

Remarque 14. La limite a pour coordonnées les limites des coordonnées !

Exercice 24. Si f est une application de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_K)$, on notera, pour tout vecteur $x \in E$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$: les f_i sont les **applications coordonnées** ($f_i : E \rightarrow \mathbb{K}$) de f .

Pour $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ et $a \in E$, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{si, et seulement si,} \quad \forall i \in [1; n], \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i.$$

Exercice 25. Si f est une application de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_K)$, en notant encore f_i sont les **applications coordonnées** ($f_i : E \rightarrow \mathbb{K}$) de f , montrer que f est continue en $a \in E$ si, et seulement si, chaque application coordonnée f_i est continue en a .

5.3 Théorème des bornes atteintes

Définition 18 (hors programme). Une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel normé E de dimension finie est appelée **partie compacte** de E .

Propriété 19 (Admise - hors programme). *Toute suite de vecteurs contenue dans une partie compacte d'un espace vectoriel normé E admet au moins une valeur d'adhérence, c'est-à-dire admet au moins une suite extraite convergente.*

Théorème 3 (Théorème des bornes atteintes - pouvant être admis). *Une fonction continue sur une partie non vide, fermée et bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. □

Remarque 15. Ceci généralise le théorème des bornes atteintes pour une fonction continue sur un segment de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

5.4 Applications linéaires, polynomiales et multilinéaires

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, tous deux de dimension finie.

Théorème 4. *En dimensions finies, toute application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue.*

Démonstration. A l'aide de la norme infinie dans F , on vérifiera que f est lipschitzienne... □

Exercice 26. Montrer que, dans ce cas, le noyau de f est un fermé de E .

En déduire, à l'aide d'une projection vectorielle bien choisie, que tout sous-espace vectoriel de E est un fermé de E .

Définition 19. Une application $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ est qualifiée de **polynomiale** lorsqu'il existe une famille de coefficients $(\lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n})_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n}$ dont les valeurs sont nulles sauf pour un nombre fini d'entre elles, telle que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E, \quad f(x) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Exemple 9. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x, y, z) = 3xy^2z^5 - 2xyz^3 + 6x^3 - 4y^2z^6$.

Remarque 16. On peut étendre cette définition pour $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ où E est de dimension finie : les x_i sont alors les coordonnées du vecteur $x \in E$ dans une base de E .

Théorème 5. *En dimension finie, toute application polynomiale est continue.*

Démonstration. C'est une conséquence de la continuité des coordonnées... □

Exercice 27. Si E_1, E_2, \dots, E_n, F sont des espaces vectoriels normés, chacun muni d'une norme N_i , montrer que $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est un espace vectoriel normé.

Définition 20. E_1, E_2, \dots, E_n et F sont des espaces vectoriels normés de dimensions finies. Une application $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est **multilinéaire** (ou **n-linéaire**) lorsque, pour toute famille $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ et pour tout $i \in [1 ; n]$, les applications

$$\begin{aligned} f_i : E_i &\rightarrow F \\ w &\mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, w, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

sont linéaires.

Exemple 10. Le déterminant d'une matrice carrée est une application multilinéaire ; le produit scalaire de deux vecteurs est une application multilinéaire ; le produit matriciel est multilinéaire ; le produit vectoriel aussi !

Théorème 6. *En dimension finie, toute application multilinéaire est continue.*

Démonstration. C'est encore une conséquence de la continuité des coordonnées... □

Corollaire 3. *Le déterminant est une application continue.*