

Chapitre 11 : Variables aléatoires discrètes

Ω désigne ici un univers au plus dénombrable.
On se place dans (Ω, \mathcal{T}, P) , un espace probabilisé.

1 Variables aléatoires

1.1 Une application liée à une expérience aléatoire

Définition 1. On appelle **variable aléatoire** toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout nombre réel x , l'ensemble $\{w \in \Omega, X(w) = x\}$ soit un événement de \mathcal{T} .

Exemple 1. On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. Le nombre N de Pile obtenus est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0; 1; 2; 3\}$.

Définition 2. L'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X est le **support** de X , noté $X(\Omega)$.

Exemple 2. On lance une pièce de monnaie cinq fois de suite. Le nombre N de Pile obtenus est une variable aléatoire de support $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Définition 3. Une variable aléatoire est **discrète** lorsque son support est fini ou dénombrable. Si son support est fini, on la qualifie de **discrète finie**.

Exemple 3. Le nombre de Pile obtenus lors de cinq lancers consécutifs d'une pièce de monnaie est une variable aléatoire finie (elle est discrète et son support est fini).

On lance indéfiniment un dé à six faces et on désigne par S le numéro du lancer auquel on obtient le premier six : S est une variable aléatoire discrète, de support \mathbb{N} .

1.2 Variables aléatoires et probabilités

Définition 4. Soit X une variable aléatoire.

Pour tout nombre réel x , l'événement $\{w \in \Omega, X(w) \leq x\}$ est noté $(X \leq x)$.

De même, on définit les événements $(X \geq x), (X < x), (X > x), (X = x), (X \in I)$ où I est un intervalle de \mathbb{R} .

Exercice 1. On lance deux dés à six faces et on désigne par S la somme des deux faces obtenues. Que représentent les événements $(S = 4), (S \leq 4)$?

1.3 Loi d'une variable aléatoire discrète finie, distribution de probabilités

Définition 5. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète.

La **loi de probabilités** de X est la donnée des probabilités $P(X = x_i)$ lorsque $X(\Omega) = \bigcup_i \{x_i\}$.

On définit ainsi une probabilité, notée P_X .

Exercice 2. Donner la loi de probabilités de N , nombre de Pile obtenus lors de cinq lancers consécutifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

Propriété 1. Avec les notations précédentes, on a :

$$\sum_i P(X = x_i) = 1.$$

Démonstration. □

Définition 6. Si deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi, on note $X \sim Y$.

1.4 Image d'une variable aléatoire par une fonction

Propriété 2. Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{T}) et soit g une application de $X(\Omega)$ dans \mathbb{R} . L'application Y , définie par $Y(w) = g(X(w))$ pour tout $w \in \Omega$, est encore une variable aléatoire discrète, que l'on note $g(X)$.

De plus, la loi de $Y = g(X)$ est donnée par

$$\forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} P(X = x).$$

Démonstration. □

Exemple 4. Si X une variable aléatoire discrète, il est en donc de même pour $aX + b, X^n, e^X, |X|, \dots$

1.5 Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète de l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

Définition 7. Si X est finie, de support $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on appelle **espérance** (ou moyenne) de X le nombre réel $E(X)$ (aussi noté $\mathbb{E}(X)$) défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

Définition 8. Si X est dénombrable, de support $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, on appelle **espérance** (ou moyenne) de X la quantité $E(X)$ (aussi noté $\mathbb{E}(X)$) définie par :

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i P(X = x_i).$$

Lorsque la famille $(x_i P(X = x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable, on dit que X est d'**espérance finie**.

Remarque 1. Les variables aléatoires discrètes finies ont toujours une espérance.

Par convention, on admet que $P(X = +\infty) = 0$ et que $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$.

Exercice 3. Calculer l'espérance des variables aléatoires suivantes : $X = \mathbb{1}_A$ où A est une partie de Ω ; $X = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si X est une variable aléatoire discrète finie à valeurs positives telle que $E(X) = 0$, montrer que X est quasiment nulle ($P(X = 0) = 1$).

Exercice 4. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, montrer que :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

$P(X > n)$

Propriété 3 (Théorème de transfert).

Soit X une variable aléatoire discrète et soit g une application de $X(\Omega)$ dans \mathbb{R} .

La variable aléatoire discrète $g(X)$, est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(g(x_i) P(X = x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable.

Dans ce cas, on a

$$E(g(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} g(x_i) P(X = x_i).$$

Remarque 2. On notera bien que l'espérance de $g(X)$ est totalement déterminée par la loi de X , et non celle de $g(X)$!

Exercice 5. Donner le théorème de transfert dans le cas où le support de X est \mathbb{N} .

Corollaire 1 (Linéarité de l'espérance).

Si X est une variable aléatoire discrète d'espérance finie, alors, pour tous a et $b \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $aX + b$ est discrète d'espérance finie et l'on a $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Corollaire 2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes d'espérances finies.

1. Si X ne prend que des valeurs positives, alors $E(X) \geq 0$ (**positivité** de l'espérance);
2. Si $X \geq Y$, alors $E(X) \geq E(Y)$ (**croissance** de l'espérance).

Exercice 6. Montrer que l'espérance de $X - E(X)$ est nulle. On parle de variable aléatoire **centrée**.

Exercice 7. Si $|X| \leq Y$ et que Y est d'espérance finie, montrer que X est aussi d'espérance finie.

1.6 Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète de l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

Définition 9. On appelle **variance** de X la quantité $V(X)$ définie par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire discrète finie.

1. Montrer que $V(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Propriété 4. Si X^2 est d'espérance finie alors X est d'espérance finie et $V(X)$ est finie et est positive.

Propriété 5 (formule de Koenig-Huygens).

Pour X variable aléatoire discrète avec X^2 d'espérance finie, on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Démonstration.

□

Remarque 3. Cette dernière formule propose un calcul "plus simple" de la variance.

Définition 10. On appelle **écart-type** de X la quantité $\sigma(X)$ définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exercice 9. X est une variable aléatoire discrète avec X^2 d'espérance finie.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

2. En déduire que $\sigma\left(\frac{X}{\sigma(X)}\right) = 1$. On parle de variable aléatoire **réduite**.
3. Expliquer ce que représente une variable aléatoire centrée et réduite.

Remarque 4. L'écart-type est un indicateur de dispersion des valeurs de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Propriété 6 (Inégalité de Markov). *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles **positives**. X vérifie :*

$$\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Démonstration. On comparera les variables aléatoires $\frac{X}{a}$ et $\mathbb{1}_{X \geq a}$. □

Théorème 1 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). *Soit X une variable aléatoire discrète avec X^2 d'espérance finie. X vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. On appliquera l'inégalité de Markov à $(X - E(X))^2$... □

Remarque 5. On a ainsi $P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Autrement dit, X prend des valeurs proches de $E(X)$ avec une grande probabilité mais, pour ε trop petit, $1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2} < 0$, ce qui ne donne aucune information intéressante !

1.7 Lois discrètes usuelles

1.7.1 loi certaine

Définition 11. Une variable aléatoire X suit la loi certaine (ou quasi-certaine) lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur, avec une probabilité égale à 1.

Son espérance et sa variance sont donc respectivement égales à a et 0.

Propriété 7. *Si X est une variable aléatoire discrète de variance nulle alors X suit la loi certaine.*

Démonstration. □

1.7.2 loi uniforme sur $[1 ; n]$

Définition 12. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[1 ; n]$ lorsque, pour tout entier naturel

$$k \in [1 ; n], P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1 ; n])$.

Propriété 8. *La variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1 ; n])$ admet une espérance et une variance données par $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.*

Démonstration. □

Exercice 10. Soient deux entiers a et b avec $a < b$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a ; b])$ si, et seulement si, $Y - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([1 ; b - a + 1])$.

1.7.3 loi de Bernoulli de paramètre p

Définition 13. Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0 ; 1]$ lorsque X ne prend que les valeurs 1 et 0 avec $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Propriété 9. La variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ admet une espérance et une variance données par $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Démonstration. □

Remarque 6. Concrètement, la loi de Bernoulli correspond au jeu de Pile/Face, **succès/échec**.

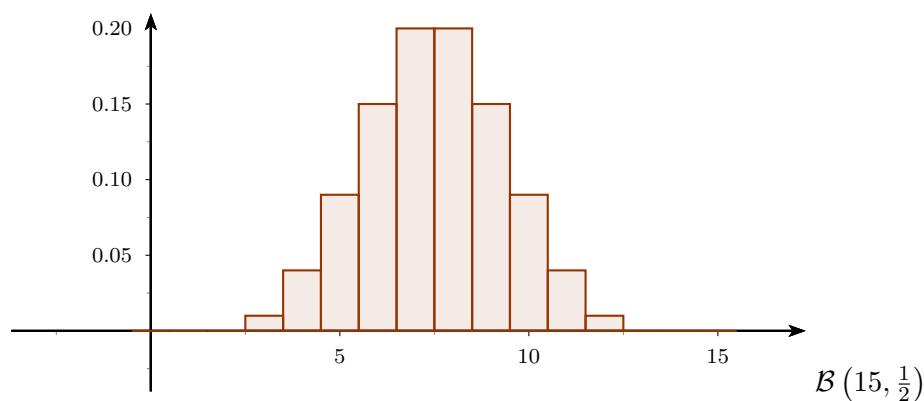
1.7.4 loi binômiale de paramètres n et p

Définition 14. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0 ; 1]$ lorsque, pour tout entier $k \in [0 ; n]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Propriété 10. La variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ admet une espérance et une variance données par $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Démonstration. □

Remarque 7. Concrètement, la loi binomiale correspond au compteur de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.



1.7.5 loi géométrique de paramètre p

Définition 15. Une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in [0 ; 1]$ lorsque, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Propriété 11. La variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ admet une espérance et une variance données par $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Démonstration. □

Remarque 8. Concrètement, la loi exponentielle permet d'obtenir le temps d'obtention du premier succès lors de la succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

Exercice 11. Montrer que $P(X > k) = (1 - p)^k$.

1.7.6 loi de Poisson de paramètre λ

Définition 16. Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.
On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Propriété 12. La variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ admet une espérance et une variance données par $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Démonstration. □

Remarque 9. En réalité, la loi de Poisson permet d'obtenir une bonne approximation de la loi binomiale lorsque p est proche de zéro.

Elle sert à calculer la probabilité d'événements rares.

2 Couples de variables aléatoires discrètes

Définition 17. Soient X et Y deux variables aléatoires respectivement à valeurs dans E et F . L'application

$$\begin{aligned} : \Omega &\rightarrow E \times F \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est appelée **couple de variables aléatoires**, que l'on note (X, Y) .

Si $E = F = \mathbb{R}$, le couple (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles.

Exemple 5.

- On lance deux dés équilibrés et on désigne par X le plus petit nombre apparu et par Y le plus grand nombre ainsi obtenu. Le couple (X, Y) est un couple de variables aléatoires. Quel est son support ?
- Une urne contient 2 boules blanches, 3 rouges et 4 noires. On extrait trois boules de l'urne. X désigne le nombre de boules blanches obtenues et Y le nombre de boules rouges. On définit ainsi un couple de variables aléatoires (X, Y) . Quel est son support ?

Propriété 13. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur l'univers fini Ω .

La famille des événements $(X = x) \cap (Y = y)$, où $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, est un système complet d'événements de Ω : on l'appelle **système complet d'événements associé au couple (X, Y)** .

Démonstration. □

Remarque 10.

- On note souvent $(X = x, Y = y)$ pour désigner l'événement $(X = x) \cap (Y = y)$.
- Dans un espace probabilisé de probabilité P , on a alors
$$\sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) = 1.$$

2.1 Lois

Définition 18 (Loi conjointe). Pour un couple de variables aléatoires (X, Y) sur Ω , on appelle **loi conjointe** de X et Y la loi du couple (X, Y) .

C'est donc la donnée des $P(X = x, Y = y)$ où $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

Remarque 11. Bien souvent, on représente cette loi conjointe sous forme d'un tableau à double entrée.

Exercice 12.

- On lance deux dés équilibrés et on désigne par X le plus petit nombre apparu et par Y le plus grand nombre ainsi obtenu. Donner la loi conjointe de X et Y .

- Une urne contient 2 boules blanches, 3 rouges et 4 noires. On extrait trois boules de l'urne. X désigne le nombre de boules blanches obtenues et Y le nombre de boules rouges. Donner la loi conjointe de X et Y .

Définition 19 (Lois marginales). Pour un couple de variables aléatoires (X, Y) , la loi de X est appelée **première loi marginale du couple** (X, Y) et la loi de Y est la **deuxième loi marginale du couple** (X, Y) .

Théorème 2. Pour un couple de variables aléatoires (X, Y) , les lois marginales sont données par

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y);$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

Démonstration.

□

Remarque 12. La loi du couple détermine donc totalement les lois marginales mais la réciproque est fautive en général !

Exercice 13. Une urne contient 3 boules blanches et 5 noires. On tire successivement, sans remise, deux boules de l'urne. X désigne la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si la première boule est blanche et Y désigne la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si la deuxième boule est blanche. Donner la loi conjointe de X et Y ainsi que les deux lois marginales.

Définition 20 (Lois conditionnelles). Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) .

Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, on appelle **loi de X sachant que $(Y = y)$** la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P_{(Y=y)})$:

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P_{(Y=y)}(X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

De même, pour $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$, on définit la **loi de Y sachant que $(X = x)$** comme la loi de Y dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P_{(X=x)})$:

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P_{(X=x)}(Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

Exercice 14. On lance deux dés équilibrés et on désigne par X le plus petit nombre apparu et par Y le plus grand nombre ainsi obtenu. Donner toutes les lois conditionnelles.

Propriété 14. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires telles que, pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, $P(X = x) \neq 0$ et $P(Y = y) \neq 0$. On a alors :

$$P(X = x, Y = y) = P_{(X=x)}(Y = y) \times P(X = x) = P_{(Y=y)}(X = x) \times P(Y = y);$$

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{(Y=y)}(X = x) \times P(Y = y);$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P_{(X=x)}(Y = y) \times P(X = x).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition et de la formule des probabilités totales ! □

2.2 Inégalité de Cauchy-Scharwz

Propriété 15. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires d'espérances finies. XY est aussi d'espérance finie.

Démonstration. On remarquera que $|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$. □

Propriété 16 (Inégalité de Cauchy-Scharwz). Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires d'espérances finies. On a :

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

Démonstration. □

2.3 Variables aléatoires indépendantes

Définition 21. Deux variables aléatoires respectivement à valeurs dans E et F sont dites **indépendantes** lorsque, pour tout $A \subset E$ et tout $B \subset F$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Remarque 13. Rappelons que la notion de dépendance/indépendance est corrélée à la probabilité de l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

Propriété 17. Pour deux variables aléatoires X et Y indépendantes, respectivement à valeurs dans E et F , on a donc

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

pour tout $A \subset E$ et tout $B \subset F$.

Propriété 18. Deux variables aléatoires sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Démonstration. □

Remarque 14. Si X et Y sont indépendantes, les lois conditionnelles de X coïncident avec la loi marginale de X et les lois conditionnelles de Y coïncident avec la loi marginale de Y ...

Propriété 19 (Transfert d'indépendance - Admise). Si X et Y sont indépendantes alors, pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$ et toute fonction g définie sur $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exemple 6. Si X et Y sont indépendantes, alors X^n et Y^m le sont aussi ($n, m \in \mathbb{N}^*$)!

Exercice 15. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . Déterminer la loi de $X + Y$.

Propriété 20. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

Démonstration. On appliquera le théorème de transfert avec $XY = u(X, Y)$... □

Remarque 15. La réciproque est fausse! Si X suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et Y est l'indicatrice de l'événement $(X = 0)$, on a $XY = 0$ donc $E(XY) = 0$, $E(X) = 0$ et donc $E(XY) = E(X) \times E(Y)$ mais pourtant X et Y ne sont pas indépendantes (calculer $P(X = 1, Y = 1)$).

Exercice 16. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, montrer que $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.

2.4 Covariance

Définition 22. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant chacune une variance, on définit la **covariance** de X et de Y par

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Propriété 21.

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration. □

Exercice 17. Montrer que $V(X + Y) = V(X) + V(Y) - \text{cov}(X, Y)$. De même, montrer que $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) - \sum_{i \neq j} \text{cov}(X_i, X_j)$.

3 Indépendance de n variables aléatoires

Définition 23. Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n (où $n \in \mathbb{N}^*$) sont dites **indépendantes deux à deux** lorsque, pour tout $i, j \in [1; n]$ avec $i \neq j$, les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes.

Définition 24. Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n (où $n \in \mathbb{N}^*$) sont dites **mutuellement indépendantes** lorsque, pour toutes parties A_1 de $X_1(\Omega)$, A_2 de $X_2(\Omega)$, \dots , A_n de $X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1), (X_2 \in A_2), \dots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

Remarque 16.

- On retrouve bien entendu les mêmes notions que pour l'indépendance d'événements.
- En particulier, l'indépendance mutuelle est la notion la plus "forte", elle implique l'indépendance deux à deux.
- Sauf précision, le terme "indépendance" désigne l'indépendance mutuelle.

Propriété 22. Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), (X_2 = x_2), \dots, (X_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration. □

Propriété 23 (transfert d'indépendance - Admis). Si X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes alors, pour toutes fonctions f_1, f_2, \dots, f_n définie sur chaque $X_i(\Omega)$, les variables aléatoires $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Propriété 24 (lemme des coalitions - Admis). Si X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes et si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_p(\Omega)$ et sur $X_{p+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.

Remarque 17. On peut d'ailleurs généraliser ce résultat à

$$f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_1+n_2}), \dots, f_r(X_{n-n_r+1}, \dots, X_n)$$

où $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$.

Propriété 25. Si X et Y sont indépendantes admettant chacune une variance, alors

$$\text{cov}(X, Y) = 0.$$

Démonstration. □

Remarque 18. La réciproque est fausse! Si $\text{cov}(X, Y) = 0$ on dit que X et Y sont **décorrélées**.

Exercice 18. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont deux à deux indépendantes et admettant chacune une variance, montrer que

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k).$$

Propriété 26. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes d'espérances finies, alors :

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i).$$

Démonstration. □

Propriété 27 (Somme de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli). Si X_1, X_2, \dots, X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p , alors la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres (n, p) .

Démonstration. □

Définition 25. Une famille de variables aléatoires **indépendantes et identiquement distribuées** (i.i.d.) est une famille de variables indépendantes suivant toutes la même loi.

Théorème 3 (loi faible des grands nombres). Pour une famille de variables aléatoires (X_1, X_2, \dots) i.i.d., en notant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et avec $m = E(X_i)$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Démonstration. On applique l'inégalité de Markov à $\frac{1}{n}S_n$... □

Remarque 19. On parle de convergence en probabilité, de la fréquence vers la moyenne.

4 Fonctions Génératrices

Propriété 28. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , la série entière $\sum P(X = n)t^n$ admet un rayon de convergence au moins égal à 1 et converge normalement sur $[-1 ; 1]$.

Démonstration. □

Définition 26. La **fonction génératrice** G_X d'une variable aléatoire X est définie sur $[-1 ; 1]$ par

$$G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

Remarque 20. Pour une variable aléatoire discrète à support fini, sa fonction génératrice est une fonction polynomiale.

Propriété 29 (Admise). $\forall t \in [-1 ; 1], G_X(t) = E(t^X)$.

Par ailleurs, la loi de X est déterminée de manière unique par $G_X : \forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0)$. Ainsi deux variables aléatoires ont même loi si, et seulement si, elles ont même fonction génératrice.

Exercice 19. Donner la fonction génératrice de chacune des lois usuelles. On vérifiera que :

- si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $G_X(t) = (1 - p) + pt$;
- si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $G_X(t) = ((1 - p) + pt)^n$;
- si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $G_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}$;
- si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

Propriété 30 (Admise). X est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1. Dans ce cas, $E(X) = G'_X(1)$.

De même, X admet une variance si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas, $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

Théorème 4. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on a $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.

Démonstration. C'est la propriété sur les espérances... □

Corollaire 3. Si X_1, X_2, \dots, X_n est une famille de variables aléatoires indépendantes, on a

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_n} = G_{X_1} \times G_{X_2} \times \dots \times G_{X_n}.$$

Démonstration. C'est encore la propriété sur les espérances... □