

Matrices, espaces vectoriels et applications linéaires

Matrices

→ Puissances de matrices

Le calcul des puissances successives d'une matrice s'effectue, par exemple,

- en réduisant la matrice;
- en utilisant la formule du binôme de Newton; si A et B commutent alors, pour $p \in \mathbb{N}$ quelconque,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

- en ayant recours à un polynôme annulateur.

→ Inversion de matrices

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Il suffit en fait que $AB = I_n$ pour que $BA = I_n$.

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0 \iff \text{rg}(A) = n$$

Pour inverser une matrice, on peut :

- résoudre le système linéaire associé à l'aide du pivot de Gauss;
- appliquer les opérations élémentaires sur la matrice jusqu'à obtenir l'identité;
- utiliser un polynôme annulateur;
- calculer la comatrice.

→ Trace

$$\text{Si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}.$$

La trace est une forme linéaire sur \mathbb{K} et $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
La trace est la somme des valeurs propres complexes de A .

→ Transposée

$$\text{Si } A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

A et A^T ont même rang et même déterminant (si $n = p$).

→ Matrices équivalentes

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition : Matrices équivalentes

A et B sont dites équivalentes s'il existe $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$B = Q^{-1}AP$$

Théorème

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre par une série d'opérations élémentaires sur les lignes.

Proposition

Si $\text{rg}(A) = r$, A est équivalente à $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

→ Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition

A et B sont semblables s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP$$

A et B représentent alors le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique donc même valeurs propres.

Systèmes d'équations linéaires

On considère le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

$$\text{On lui associe } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

$$\text{Le système se réécrit sous la forme : } A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

L'ensemble des solutions est un sous-espace affine. Un tel système admet donc 0, 1 ou une infinité de solutions.

Lorsqu'il n'admet pas de solution, on dit qu'il est incompatible. On dit qu'il est de Cramer lorsque $n = p$ et qu'il admet une unique solution $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$.

Espaces vectoriels

E désigne désormais un \mathbb{K} -espace vectoriel et $F \subset E$.

Définition

F est un sous-espace vectoriel de E ssi

$$\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F \end{cases}$$

Quelques exemples classiques d'espaces vectoriels : $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{etc.}$ munis des lois usuelles. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

→ Famille de vecteurs

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

$$\text{Vect}(u_i) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i u_i \mid (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle} \right\}$$

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs u_i pour tout $i \in I$.

Définition

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite génératrice si $E = \text{Vect}(u_i)$.
Autrement dit,

$$\forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

↪ Existence de la décomposition.

Définition

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite libre si pour toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle,

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0_E \implies (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$$

↪ Unicité de la décomposition.

Une famille de deux vecteurs est libre lorsqu'ils ne sont pas colinéaires. Cette propriété est fausse dès qu'il y a plus de deux vecteurs.

Une famille infinie de vecteurs de E est libre ssi toute sous-famille est libre.

Définition

- Une base de E est une famille libre et génératrice.
- Un espace de dimension finie est un espace qui admet une famille génératrice finie.
- Toutes les bases d'un espace E de dimension finie ont même cardinal. On l'appelle dimension de E .

Soient désormais E un espace vectoriel de dimension $n \neq 0$ et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

Théorème : Théorème de la base extraite

Si \mathcal{F} est une famille génératrice de E ,

- on peut extraire de \mathcal{F} une base de E .
- $\text{Card}(\mathcal{F}) \geq n$; si $\text{Card}(\mathcal{F}) = n$, c'est une base de E .

Théorème : Théorème de la base incomplète

Si \mathcal{F} est une famille libre de E ,

- on peut compléter \mathcal{F} en une base de E .
- $\text{Card}(\mathcal{F}) \leq n$; si $\text{Card}(\mathcal{F}) = n$, c'est une base de E .

Par définition, $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Théorème

- $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$.
- $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$ ssi la famille est génératrice.
- $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$ ssi la famille est libre.

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \iff \text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n \\ \iff \det(u_1, \dots, u_n) \neq 0$$

→ Espaces supplémentaires et sommes directes

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E .

Définition

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$. On note alors $E = F \oplus G$.

Un supplémentaire n'est pas unique. Rappel : dans un espace euclidien E , $E = F \oplus F^\perp$.

$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ lorsque F et G sont de dimension finie.

Théorème : Caractérisation en dim. finie

Si E est un espace de dimension finie, F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si deux des trois assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) $E = F + G$ (ii) $F \cap G = \{0_E\}$
- (iii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

$E = F \oplus G$ si et seulement si l'on obtient une base de E en concaténant une base de F et une base de G . On parle alors de base adaptée à la somme directe.

Définition : Somme directe

Les espaces F_1, \dots, F_p sont en somme directe lorsque la décomposition de tout vecteur de $F_1 + \dots + F_p$ est unique. On la note alors $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ ou bien $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$. Il y a égalité si et seulement si les sous-espaces sont en somme directe.

Théorème : Caractérisation de la somme directe

Les sous-espaces F_1, \dots, F_p sont en somme directe si et seulement si la décomposition du vecteur nul est unique.

$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ si et seulement si la famille obtenue par concaténation de bases des espaces F_1, \dots, F_p est une base de E , alors appelée base adaptée à la somme directe.

→ Hyperplans

Définition : Hyperplan

On appelle hyperplan de E tout noyau de forme linéaire *non nulle*.

De plus, H est un hyperplan si et seulement si,

- H admet une droite comme supplémentaire : il existe $u \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \text{Vect}(u)$;
- $\dim(H) = n - 1$ si E est de dimension n ;

Deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles.

Applications linéaires

→ Généralités

E et F désignent des espaces vectoriels sur \mathbb{K} .

Définition

On dit que $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

$\mathcal{L}(E, F)$ désigne le \mathbb{K} -e.v. des applications linéaires de E dans F . Si E et F sont de dimension finie,

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

- Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.
- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
- Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans \mathbb{K} .

f désigne désormais un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition

- $\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$.
- $\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.

- $\text{Ker}(f)$ est un s.e.v. de E et $\text{Im}(f)$ un s.e.v. de F .
- Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_i))_{i \in I}$.
- f est injective ssi $\text{Ker } f = \{0_E\}$.
- f est surjective ssi $\text{Im } f = F$.

Par définition, $\text{rg}(f) = \dim \text{Im } f$.

Théorème : Théorème du rang

Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg}(f)$$

On dispose d'une version plus forte de ce résultat, sans hypothèse sur les dimensions :

Théorème : Forme géométrique

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{Ker}(f)$ possède un supplémentaire I dans E , alors $f|_I$ est un isomorphisme de I sur $\text{Im}(f)$.

Théorème

Soit f un endomorphisme de E , où $\dim(E) < +\infty$.

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base (de toute base) de E est une base de F .

→ Formules de passage et changement de base(s)

On suppose E de dimension finie. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . On note $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' (ses colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B}).

Théorème : Formules de passage

- Soit $x \in E$. On note X (resp. X') le vecteur coordonnées de x dans la base \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}').

$$X = P X' \quad \text{c-à-d} \quad X' = P^{-1} X$$

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note M (resp. M') la matrice de f dans la base \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}').

$$M' = P^{-1} M P$$

Ne pas oublier que pour déterminer X' en fonction de X , on doit inverser un système. D'où la présence de P^{-1} dans la formule $X' = P^{-1} X$.

Plus généralement, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On considère deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E et deux bases \mathcal{C} et \mathcal{C}' de F . On pose $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'}$, ainsi que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$. Alors, $M' = Q^{-1} M P$.

→ Restrictions et endomorphismes induits

Proposition

Soient E_1, \dots, E_p des s.e.v. tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et $f_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$. Alors, il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f|_{E_i} = f_i$.

F est dit stable par f lorsque $f(F) \subset F$.

Définition

Soit F un s.e.v. de E stable par $f \in \mathcal{L}(E)$. $f|_F$ est alors un endomorphisme de F , appelé endomorphisme induit.

Si (e_1, \dots, e_p) est une base de F que l'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E , on a alors :

$$\text{Mat}(f) = \begin{bmatrix} \text{Mat} f|_F & \times \\ 0 & \times \end{bmatrix}.$$

Si $E = F \oplus G$ et si F et G sont stables par f , on aura dans une base *adaptée* :

$$\text{Mat}(f) = \begin{bmatrix} \text{Mat} f|_F & 0 \\ 0 & \text{Mat} f|_G \end{bmatrix}.$$

→ Projections et symétries vectorielles

Définition

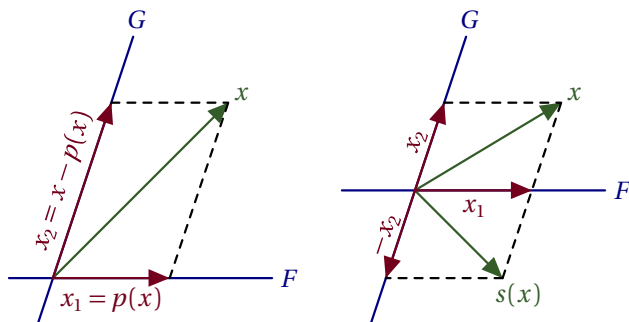
Soit $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.

- On appelle projection sur F parallèlement à G l'application linéaire p vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = x_1.$$

- On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application linéaire s vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$



Théorème : Caractérisation

Soient $p, s \in \mathcal{L}(E)$.

- p est une projection vectorielle sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$ si et seulement si $p \circ p = p$. Alors, $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$.
- s est une symétrie vectorielle par rapport $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ si et seulement si $s \circ s = \text{id}_E$. Alors, $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Dans une base adaptée, les matrices de p et s sont :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$$

p est diagonalisable et :

- $\dim \text{Im } p = \text{Tr}(p) = r$, $\dim \text{Ker } p = n - r$;
- $\chi_p = (X - 1)^r X^{n-r}$

s est diagonalisable et :

- $\dim \text{Ker}(s - \text{id}_E) = r$, $\dim \text{Ker}(s + \text{id}_E) = n - r$;
- $\chi_s = (X - 1)^r (X + 1)^{n-r}$

Si $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$, tout vecteur x de E se décompose de façon unique sous la forme $x = x_1 + \dots + x_n$ où $x_i \in E_i$. Notons alors, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, p_i l'application définie sur E par $p_i(x) = x_i$.

Théorème

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, p_i est la projection vectorielle sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n E_k$. De plus,

$$p_1 + \dots + p_n = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Calcul différentiel

Applications de classe \mathcal{C}^1

Soit $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ où E et F désignent deux e.v.n. sur \mathbb{R} de dimensions respectives p et n et \mathcal{U} un ouvert de E .

→ Différentielle

Définition : Différentielle en un point

L'application f est dite différentiable en $a \in \mathcal{U}$ s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(h)$$

L'application est alors unique, on l'appelle *différentielle* de f au point a . On la note df_a ou $df(a)$.

Notation : $o(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ où $\varepsilon : E \rightarrow F$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$.

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + df_a(h) + o(h)$$

Proposition

Si f est différentiable en a , f est continue en a .

- Si f et g sont différentiables en a , $\lambda g + \mu g$ aussi et :

$$d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$$

- Si f est différentiable en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

Définition : Différentielle, application de classe \mathcal{C}^1

- f est dite différentiable sur \mathcal{U} si f est différentiable en tout point de \mathcal{U} . On appelle alors différentielle de f l'application :

$$df : \begin{cases} \mathcal{U} \subset E \longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a \longmapsto df(a) = df_a \end{cases}$$

- L'application $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est dite de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} si f est différentiable sur \mathcal{U} et si sa différentielle df est continue sur \mathcal{U} .

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} , on dira aussi que f est continûment différentiable sur \mathcal{U} .

→ Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

Définition : Dérivée selon un vecteur

Soit $u \in E$. L'application f est dite dérivable en a selon le vecteur u si la fonction $t \mapsto f(a + tu)$ est dérivable en 0. On pose dans ce cas :

$$D_u(f)(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

Quand une fonction est différentiable, elle est dérivable dans toutes les directions.

Proposition

Si f est différentiable en a alors f est dérivable en a selon u pour tout vecteur $u \in E$ et $D_u(f)(a) = df_a(u)$.

On munit désormais E d'une b.o.n. (e_1, \dots, e_p) .

Définition : Dérivées partielles

Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on appelle dérivée partielle en a d'indice j la dérivée de f en a suivant e_j , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

Si f est différentiable en a , alors les dérivées partielles existent et :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df_a(e_j)$$

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{j=1}^p h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p h_j df_a(e_j) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

En notant dx_j les applications $h \mapsto h_j$,

$$df_a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) dx_p = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j$$

Théorème : Caractérisation

Soit $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$. f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} si et seulement si les dérivées partielles de f existent et sont continues en tout point de \mathcal{U} .

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} et $a \in \mathcal{U}$, alors :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(h)$$

Pour calculer la différentielle en un point, on peut revenir à la définition ou bien calculer les dérivées partielles.

- ▷ Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 et I un intervalle de \mathbb{R} . On considère les deux applications de classe \mathcal{C}^1 :

$$\varphi : \begin{cases} I \longrightarrow \mathcal{U} \\ t \longmapsto (x(t), y(t)) \end{cases} \quad \text{et} \quad f : \begin{cases} \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) \end{cases}$$

L'application $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$,

$$(f \circ \varphi)'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

- ▷ On considère les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \end{cases}$$

Alors F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \\ &\quad + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \\ &\quad + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \end{aligned}$$

→ Gradient associé à une fonction numérique

Soit $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **numérique**, supposée différentiable en a . On peut alors définir le gradient de f au point a par ses coordonnées dans une b.o.n. (e_1, \dots, e_p) :

$$\nabla f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix}$$

Le théorème de Riesz fournit une définition intrinsèque :

Définition : Gradient

On appelle gradient de f en a et on note $\nabla f(a)$ le vecteur associé à la forme linéaire df_a . Pour tout $h \in E$,

$$df_a(h) = \nabla f(a)^\top h = \nabla f(a) \cdot h$$

Si $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 ,

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + o(\|h\|)$$

Applications de classe \mathcal{C}^k

→ Dérivées partielles d'ordres supérieurs

On définit par récurrence les dérivées partielles d'ordres supérieurs :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right)$$

Définition : Application de classe \mathcal{C}^k

Une application est dite de classe \mathcal{C}^k sur un ouvert \mathcal{U} si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.

Théorème : Théorème de Schwarz

Soit $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 . Alors,

$$\forall a \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

→ Hessienne

La hessienne au point $a \in \mathcal{U}$ de la fonction numérique $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 est la matrice symétrique :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}$$

On dispose de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\|h\|^2)$$

Optimisation

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions numériques.

→ Condition d'ordre 1

Définition : Point critique

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathcal{U} .
On dit que $a \in \mathcal{U}$ est un point critique de f si :

$$df_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \text{ c'est-à-dire } \nabla f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = \vec{0}$$

f admet un maximum en $a \in \mathbb{R}^p$ si et seulement s'il existe un voisinage \mathcal{U} de a tel que :

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) \leq f(a)$$

La définition est analogue pour un minimum.

Théorème : CN d'existence d'un extremum

Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathcal{U} admet un extremum au point $a \in \mathcal{U}$ alors a est un point critique. Cela revient à dire que $\nabla f(a) = \vec{0}$.

La propriété est fausse ailleurs que sur un ouvert. De plus, tout point critique ne correspond pas nécessairement à un extremum (cas des points selles).

→ Condition d'ordre 2

Théorème : CS d'existence d'un extremum

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathcal{U} .
Si a est un point critique de f et $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a .

Pour $n = 2$, le déterminant et la trace nous permettent de trouver facilement le signe des valeurs propres.

Déterminants

Déterminant d'une matrice carrée

$\det(A)$ est un polynôme en les coefficients de la matrice.

Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (i) Le déterminant est n -linéaire par rapport aux colonnes. En particulier, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- (ii) $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
- (iii) $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.
Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- (iv) $\det(A^T) = \det(A)$.
- (v) Si A et B sont semblables, $\det(A) = \det(B)$.

Théorème : Déterminant triangulaire par blocs

Soit A une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ & & A_r \end{bmatrix} \text{ où } A_1 \in \mathcal{M}_{p_1}(\mathbb{K}), \dots, A_r \in \mathcal{M}_{p_r}(\mathbb{K})$$

Alors, $\det(A) = \det(A_1) \times \dots \times \det(A_r)$.

En général, $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Pour calculer certains déterminants, on pourra opérer sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des déterminants de matrices diagonales ou triangulaires (éventuellement par blocs). Effets des opérations du pivot :

- $C_i \leftrightarrow C_j$: on multiplie le déterminant par -1 .
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$: on multiplie le déterminant par λ .
- $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$: le déterminant reste identique.

Une autre possibilité pour calculer un déterminant consiste à le développer par rapport à une de ses lignes ou une de ses colonnes.

Définition : Mineurs et cofacteurs

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en ôtant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A . On appelle alors :

- mineur relatif à $a_{i,j}$ le scalaire $\det(A_{i,j})$.
- cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$.
- comatrice de A la matrice des cofacteurs de A .

La comatrice est souvent notée $\text{Com}(A)$ ou \tilde{A} .

Théorème : Développement

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) a_{i,j}$
- $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \det(A) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}_{\text{cofacteur}} a_{i,j}$

Si $ad - bc \neq 0$, alors $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Déterminant d'une famille de vecteurs

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel de dim. finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Le déterminant d'une famille \mathcal{F} de n vecteurs de E dans une base (quelconque) \mathcal{B} de E est le déterminant de sa matrice représentative. Notation : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

Pour une base \mathcal{B} de E , $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n -linéaire alternée sur E vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Théorème : Bases et déterminant

Soient $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases.

- Formule de changement de base

$$\det_{\mathcal{B}}(\cdot) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\cdot)$$

- Caractérisation d'une base

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_n) \text{ libre} &\iff (u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \\ &\iff \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Dans ce cas, } \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})}.$$

Déterminant d'un endomorphisme

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} choisie. On l'appelle déterminant de l'endomorphisme f et on le note $\det(f)$.

Théorème

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $\det(\text{id}_E) = 1$ et $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

(ii) $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

(iii) $f \in \text{GL}(E)$ si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$.

Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme, on se ramènera de façon quasi-systématique à un calcul de déterminant matriciel.

Orientation de l'espace, produit vectoriel

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormales de E .

$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est orthogonale donc $\det P = \pm 1$.

Définition : Orientation de l'espace

On dit que \mathcal{B} et \mathcal{B}' définissent la même orientation si et seulement si $\det P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = 1$.

Orienter l'espace consiste à choisir arbitrairement une base orthonormale de E . Toutes celles qui définissent la même orientation seront dites directes. Les autres indirectes.

Par convention, les bases orthonormales directes de \mathbb{R}^3 sont celles qui respectent la règle des trois doigts (ou règle du tire-bouchon).

Endomorphismes d'un espace euclidien

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ désignera par la suite un espace euclidien.

Adjoint d'un endomorphisme

Théorème : Représentation des formes linéaires

Pour toute forme linéaire φ , il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a | x \rangle$$

Définition : Adjoint d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | v(y) \rangle$$

On l'appelle adjoint de u et on le note u^* .

Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

De plus, $u \mapsto u^*$ est linéaire et involutive.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors, F^\perp est stable par u^* .

Proposition : Matrice de l'adjoint dans une b.o.n.

Soient \mathcal{B} une base orthonormale de E . On pose $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = M^\top$.

Isométries vectorielles

→ Matrices orthogonales

Définition : Matrices orthogonales

On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si et seulement si $M^\top M = M M^\top = I_n$.

Une matrice orthogonale est inversible, d'inverse M^\top et de déterminant ± 1 .

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (groupe orthogonal) et on note $SO_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 (groupe spécial orthogonal). $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des groupes.

Théorème : Caractérisation

Une matrice est orthogonale si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- ses colonnes forment une famille orthonormale.
- ses lignes forment une famille orthonormale.

Une matrice orthogonale s'interprète comme la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée. Lorsque les bases de départ et d'arrivée ont même orientation, son déterminant vaut +1.

→ Isométries vectorielles

Définition

Soit u un endomorphisme de E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) u conserve la norme : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$
- (ii) u conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$$

- (iii) $u^* \circ u = \text{id}_E$

On dit alors que u est une isométrie vectorielle de E (ou un endomorphisme orthogonal).

Une isométrie vectorielle est bijective, c'est un automorphisme. La composée d'isométries (positives) reste une isométrie (positive) : $O(E)$ et $SO(E)$ sont des groupes.

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel stable par $u \in O(E)$. Alors, F^\perp est stable par u .

Théorème : Caractérisation à l'aide d'une b.o.n.

Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- l'image d'une b.o.n. est une b.o.n.
- sa matrice dans une b.o.n. est orthogonale.

$u \in SO(E)$ ssi l'image d'une b.o.n.d. est une b.o.n.d.

→ Symétries orthogonales

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors, $E = F \oplus F^\perp$.

Définition : Symétries orthogonales

- On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp .
- Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Expression analytique d'une réflexion σ par rapport à l'hyperplan $\text{Vect}(a)^\perp$:

$$\forall x \in E, \quad \sigma(x) = x - 2 \frac{\langle x | a \rangle}{\|a\|^2} a$$

Théorème : Caractérisation

Une symétrie vectorielle est orthogonale ssi sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

→ Classification des isométries planes

- Les isométries positives du plan sont les rotations.

$$M \in SO_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Cas particuliers : id_E ($\theta = 0$), $-\text{id}_E$ ($\theta = \pi$).

- Les isométries négatives de l'espace sont les réflexions.

$$M \in O_2^-(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

Endomorphismes autoadjoints

Définition : Endomorphisme autoadjoint

On appelle endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) tout endomorphisme u vérifiant $u^* = u$, i.e. :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle$$

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Les projecteurs orthogonaux sont autoadjoints, ce sont même les seuls projecteurs à l'être.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par u , alors F^\perp est stable par u .

Proposition : Caractérisation à l'aide d'une b.o.n.

Un endomorphisme est autoadjoint si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- pour une/toute b.o.n. (e_1, \dots, e_n) de E ,

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle u(e_i)|e_j \rangle = \langle e_i|u(e_j) \rangle$$

- sa matrice dans une b.o.n. est symétrique.

Théorème : Théorème spectral

Si $u^* = u$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormale. Autrement dit, il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de u .

Théorème : Théorème spectral – version matricielle

Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \quad P^{-1}MP = P^\top MP \text{ diagonale}$$

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux, toutes ses valeurs propres sont réelles.

Définition : Endomorphisme autoadjoint positif

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Les trois assertions sont équivalentes :

- (i) pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x \rangle \geq 0$
- (ii) $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$
- (iii) il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = v^* \circ v$

On dit alors que u est positif.

Définition : Endomorphisme autoadjoint déf. positif

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Les trois assertions sont équivalentes :

- (i) pour tout $x \neq 0_E$, $\langle u(x)|x \rangle > 0$
- (ii) $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$
- (iii) il existe $v \in \text{GL}(E)$ tel que $u = v^* \circ v$

On dit alors que u est défini positif.

On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints (définis) positifs.

Équations différentielles linéaires

Équations linéaires scalaires d'ordres 1 et 2

→ Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 et l'équation homogène associée :

$$y' = a(t)y + b(t) \quad (E) \quad y' = a(t)y \quad (H)$$

Théorème

On suppose $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues sur l'intervalle I . Soit A une primitive de a sur I .

- L'équation homogène $y' = a(t)y$ admet pour solution générale $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- L'équation $y' = a(t)y + b(t)$ admet pour solution générale $t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{A(t)}$ où y_p est une solution particulière de l'équation complète.

On peut même écrire :

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(x) e^{-A(x)} dx \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

On considère maintenant l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 et son équation homogène associée, où les fonctions $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues sur l'intervalle I :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad \text{et} \quad a(t)y' + b(t)y = 0$$

Théorème : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I .

Corollaire : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I ,

- l'ensemble \mathcal{S}_H des solutions de (H) est une droite vectorielle;
- l'ensemble \mathcal{S}_E des solutions de (E) est une droite affine de direction \mathcal{S}_H .

Plan de résolution :

- Identification de l'équation.
- Mise sous forme résolue/normalisée en divisant par $a(t)$ sur les intervalles où a ne s'annule pas.
- Résolution de l'équation homogène $y' = f(t)y$.
 $y(t) = \lambda e^{F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Résolution de l'équation avec second membre.
On recherche une solution particulière y_0 de (E) . S'il n'y a pas de solution évidente, on utilise la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)e^{F(t)}$.
La solution générale est $y(t) = \lambda e^{F(t)} + y_p(t)$.
- Recollement éventuel des solutions (souvent via un DL).
- Utilisation des conditions initiales.

→ Équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et on note (H) l'équation homogène associée :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (E)$$

On suppose $a, b, c, d : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle I .

Théorème : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I .

Théorème : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I ,

- l'ensemble \mathcal{S}_H des solutions de (H) est un plan vectoriel;
- l'ensemble \mathcal{S}_E des solutions de (E) est un plan affine de direction \mathcal{S}_H .

Proposition : Principe de superposition

Si y_1 est solution de l'équation $a y'' + b y' + c y = d_1(t)$ et y_2 de l'équation $a y'' + b y' + c y = d_2(t)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de $a y'' + b y' + c y = d_1(t) + d_2(t)$.

Résolution de (H) lorsque les coefficients sont constants :
On résout l'équation caractéristique $aX^2 + bX + c = 0$ de discriminant associé Δ .

- Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 .
 $y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, une racine réelle double r .
 $y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{r t}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.
 $y(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

On peut déterminer une solution particulière de (E) lorsque le second membre $d(t)$ est de la forme :

- $d(t) = P(t)e^{mt}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$, on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = Q(t)e^{mt}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P) + k$, k étant l'ordre de multiplicité de m en tant que racine de l'équation caractéristique.
- $d(t) = \cos(\omega t)$, on passe en complexe.

On pourra utiliser le principe de superposition.

Résolution lorsque les coefficients ne sont pas constants :
(on se laisse guider par l'énoncé)

- Recherche de solutions polynomiales (on commence par l'étude du degré).
- Recherche de solutions développables en série entière.
- Recherche d'une solution sous la forme $y(t) = z(t)y_0(t)$ où y_0 est une solution déjà connue (méthode dite de Lagrange).
- Changement de variables ou d'inconnues.

Systèmes différentiels linéaires

COMPLÉMENTS HORS PROGRAMME

→ Systèmes différentiels à coefficients continus

Soit le système linéaire à coefficients continus suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Il se réécrit sous la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec :

$$X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n); \quad A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K})); \quad B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$$

De manière équivalente,

$$x' = a(t)(x) + b(t) \text{ avec } a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E)) \text{ et } b \in \mathcal{C}(I, E)$$

Théorème : Cauchy-Lipschitz linéaire

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Si $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues sur I , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

Théorème : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ sont continues sur l'intervalle I ,

- l'ensemble \mathcal{S}_H des solutions de $X' = A(t)X$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n ;
- l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de direction \mathcal{S}_H .

→ Équations différentielles linéaires scalaires

On peut transformer une équation linéaire scalaire d'ordre n en un système différentiel linéaire d'ordre 1.

$$x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \dots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} \iff X' = A(t)X$$

$$\text{avec } X = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

- L'ensemble des solutions de l'équation $X' = AX$ sur un intervalle est donc un e.v. de dimension n .
- Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \dots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

→ Méthode de variation des constantes

Il s'agit de trouver les solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ connaissant une base (X_1, \dots, X_n) de l'équation homogène $X' = A(t)X$. La famille (X_1, \dots, X_n) est alors qualifiée de système fondamental des solutions.

$$X' = A(t)X + B(t) \iff \lambda_1'(t)X_1(t) + \dots + \lambda_n'(t)X_n(t) = B(t)$$

Pour l'équation scalaire $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda' x_1 + \mu' x_2 = 0 \\ \lambda' x_1' + \mu' x_2' = c \end{cases}$$

→ Wronskien d'une équation linéaire d'ordre 2

Définition : Wronskien

On appelle wronskien de deux solutions x_1 et x_2 de $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, l'application :

$$W : t \mapsto \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)$$

Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, avec a ne s'annulant pas sur I .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions

(ii) $\forall t \in I, W(t) \neq 0$ (iii) $\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$

→ Résolution des systèmes à coefficients constants

Lorsque le système différentiel linéaire est à coefficients constants, on sait le résoudre explicitement.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'équation homogène $X' = AX$ admet pour solution générale $X : t \mapsto e^{tA}C$ où $C \in \mathbb{K}^n$.

Théorème : Cas diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Il existe alors une base (X_1, \dots, X_n) de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, éventuellement multiples. Les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme :

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} X_n \text{ avec } C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}$$

Lorsque le système est à coefficients réels et que l'on diagonalise A dans \mathbb{C} , il suffit d'extraire les parties réelles et imaginaires de $e^{\lambda t} X$ pour trouver les solutions.

On retrouve le résultat du théorème en écrivant :

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = P D P^{-1} X \iff P^{-1} X' = D P^{-1} X \\ &\iff Y' = D Y \text{ avec } Y = P^{-1} X \end{aligned}$$

Le calcul de P^{-1} est inutile.

Cette méthode fonctionne également lorsque A est seulement trigonalisable ou bien lorsque le système comporte un second membre.

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition

On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- φ est une forme bilinéaire :
Pour tous $x_1, x_2, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$$

Pour tous $x, y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$

- φ est symétrique : $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- φ est définie positive :

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, x) = 0 \iff x = 0_E$$

(E, φ) est alors appelé espace préhilbertien réel.
Si $\dim E < +\infty$, E est qualifié d'espace euclidien.

Exemples fondamentaux d'espaces préhilbertiens réels :

- $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $(P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ$.
- $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$.
- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A, B) \mapsto \text{Tr}(B^T A)$.

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. On a alors :

$$\forall x, y \in E, \quad |(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

L'application $x \mapsto \sqrt{(x|x)} = \|x\|$ est une norme sur E .

Identités remarquables vérifiées par la norme euclidienne :

Pour tous $x, y \in E$,

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$.
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$.
- Identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

- Identité de polarisation :

$$(x|y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Orthogonalité

→ Familles orthonormales

Soient $x, y \in E$.

Définition

x et y sont dits orthogonaux si $(x|y) = 0$.

Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les autres.

Théorème : Pythagore

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff (x|y) = 0.$$

Définition : Familles orthogonales et orthonormales

Soit I un ensemble d'indices fini ou infini.

- Une famille de vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ de E est dite orthogonale si :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \implies (e_i|e_j) = 0.$$

- Elle est dite orthonormale si ses vecteurs sont de plus unitaires.

Cela revient à dire que pour tout $(i, j) \in I^2, (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$.

Théorème

- Une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre.
- Une famille orthonormale est libre.

Théorème : Décomposition dans une BON

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E .

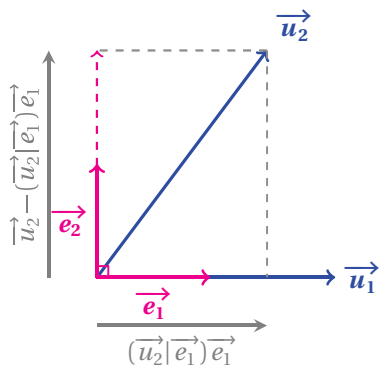
$$\forall x \in E, \quad x = (x|e_1)e_1 + \dots + (x|e_n)e_n = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$$

Proposition

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . On considère $x, y \in E$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$. On a alors :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n (x|e_i)(y|e_i) = X^T Y$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 = X^T X$$



Tout espace euclidien admet une base orthonormale, que l'on peut construire à l'aide de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On part d'une base (u_1, \dots, u_n) quelconque de E et on construit pas à pas une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) en posant :

$$e'_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k | e_i) e_i \quad \text{puis} \quad e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}$$

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (u_1, \dots, u_n) une famille libre de vecteurs de E . Il existe alors une famille orthonormale (e_1, \dots, e_n) de E telle que :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$$

→ Orthogonal d'une partie

Définition : Orthogonal

Soit F une partie de E . On appelle orthogonal de F l'ensemble :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F (x|y) = 0\}$$

F^\perp est un espace vectoriel.

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

- $u \in F^\perp$ si et seulement si u est orthogonal aux vecteurs d'une base de F .
- Si F est de dimension **finie**, $E = F \oplus F^\perp$.
- Si E est de plus un espace euclidien, $(F^\perp)^\perp = F$ et :

$$\dim F^\perp = \dim(E) - \dim(F)$$

Corollaire : Inégalité de Bessel

Soient (e_1, \dots, e_p) une famille orthonormale de E et

$$x \in E. \text{ Alors } \sum_{i=1}^p (x|e_i)^2 \leq \|x\|^2.$$

Il y a égalité si et seulement si $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

→ Projection orthogonale et distance

Dans toute cette partie, F est supposée de dimension finie. On a $E = F \oplus F^\perp$.

Définition

On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à F^\perp .

Théorème

On note p la projection orthogonale sur F .

- $p(x)$ est entièrement caractérisé par :

$$p(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p(x) \in F^\perp$$

- Si (e_1, \dots, e_p) est une base orthonormale de F alors

$$p(x) = (x|e_1)e_1 + \dots + (x|e_p)e_p$$

Définition

Soit $x \in E$. On appelle distance de x à F le réel

$$d(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\|$$

Théorème

Soit $x \in E$. $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur F .

Espaces vectoriels normés et topologie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Norme et distance

Définition : Norme sur un espace vectoriel

Une norme est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$
- $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

(E, N) est un espace vectoriel normé.

$(E, \|\cdot\|)$ désigne désormais un \mathbb{K} -espace vectoriel normé.

Une norme sur E vérifie l'inégalité triangulaire étendue :

$$\forall x, y \in E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Exemples de normes à connaître :

- Normes sur \mathbb{K}^n – pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- Normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ – pour $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|; \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}; \quad \|f\|_\infty = \sup_I |f|$$

- Norme euclidienne : si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien réel, alors $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ définit une norme sur E .
- Norme produit : si (E_i, N_i) sont p espaces vectoriels, on peut munir $E_1 \times \dots \times E_p$ de la norme définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad N(x) = \sup_{1 \leq i \leq p} N_i(x_i)$$

Définition : Distance associée à une norme

On appelle distance associée à $\|\cdot\|$ l'application :

$$d : \begin{cases} E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \longmapsto \|x - y\| \end{cases}$$

Proposition

Une distance d associée à une norme $\|\cdot\|$ vérifie :

- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

- la boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ est

$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$$

- la boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ est

$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$$

- la sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ est

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$$

Une partie A est bornée si, et seulement si,

$$\exists M > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x\| \leq M$$

Comparaison de normes

Soient N et N' deux normes définies sur E .

Proposition

Toute suite convergeant au sens de N converge aussi au sens de N' si, et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E, N'(x) \leq \alpha N(x)$.

Définition : Normes équivalentes

N et N' sont équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$$

L'équivalence des normes est une relation d'équivalence.

Théorème : Équivalence des normes

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffit de construire une suite de vecteurs telle que $N(u_n) \leq \alpha N'(u_n)$ est impossible, en passant à la limite.

Notions générales de topologie

→ Voisinages, ouverts et fermés

Soit A une partie de E et $x \in E$.

Définition : Voisinage, ouvert, fermé

- A est un voisinage de x s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
- A est un ouvert de E si :

$$\forall x \in A, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset A$$

- A est un fermé de E si son complémentaire $A^c = E \setminus A$ est un ouvert.

\emptyset et E sont des parties ouvertes et fermées de E .

- Toute réunion d'ouverts est un ouvert, toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- Toute réunion finie de fermés est un fermé, toute intersection de fermés est un fermé.

Théorème : Caractérisation séquentielle

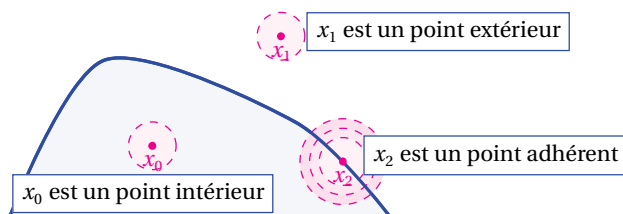
A est une partie fermée de E si et seulement si la limite de toute suite convergente de A est dans A .

Deux normes équivalentes définissent sur un espace la même topologie : les parties ouvertes et les parties fermées sont les mêmes pour l'une comme pour l'autre.

→ Intérieur, adhérence et frontière

Définition : Point intérieur, point adhérent

- x est un point intérieur à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
- x est un point adhérent à A si pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.



Définition : Intérieur, adhérence et frontière

- L'intérieur de A est l'ensemble $\overset{\circ}{A}$ des points intérieurs à A .
- L'adhérence de A est l'ensemble \overline{A} des points adhérents à A .
- La frontière de A est l'ensemble $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

- $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$.
- L'intérieur de A est la réunion de tous les ouverts inclus dans A , c'est même le plus grand ouvert de A .
- L'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés contenant A , c'est le plus petit des fermés contenant A .

Proposition : Caractérisation séquentielle

Un point x de E est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x .

$$\begin{aligned} a \in \overline{A} &\iff \forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \\ &\iff d(a, A) = 0 \end{aligned}$$

Si A est une partie bornée et non vide de \mathbb{R} , $\sup(A)$ et $\inf(A)$ appartiennent à \overline{A} .

Définition

Soient A et B deux parties de E .

- On dit que A est dense dans E si $\overline{A} = E$.
- On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.

De façon équivalente, A est dense dans B si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- tout élément de B est limite d'une suite de A .
- pour tout $x \in B$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Continuité dans un espace vectoriel normé

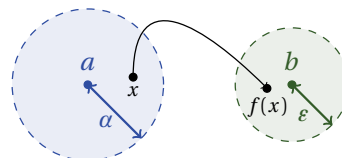
Soient $f : E \rightarrow F$, où E et F désignent des espaces vectoriels munis des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et $A \subset E$.

→ Limites

Définition

f admet comme limite $b \in F$ en $a \in \overline{A}$ si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \implies \|f(x) - b\|_F < \varepsilon$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, f(B(a, \alpha)) \subset B(b, \varepsilon) \\ &\iff \forall V \in \mathcal{V}(b), \exists U \in \mathcal{V}(a), f(U) \subset V \end{aligned}$$

→ Continuité

f est continue en $a \in A$ ssi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

Les opérations classiques sur les limites nous permettent de montrer que :

- l'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ des fonctions continues sur A est un espace vectoriel.
- l'ensemble $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ des fonctions continues sur A et à valeurs dans \mathbb{K} est une \mathbb{K} -algèbre (le produit de deux fonctions continues est en particulier continu).
- si $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow G$ sont continues avec $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est continue sur A .

Proposition : Caractérisation séquentielle

f est continue en $a \in A$ si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a , $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F . Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = f(a)$$

Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense de E sont égales.

Applications lipschitziennes

Définition

f est dite lipschitzienne de rapport $K \geq 0$ si :

$$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \cdot \|x - y\|_E$$

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, lien avec les accroissements finis.

Proposition

Toute fonction lipschitzienne est continue.

$x \mapsto \|x\|$ et $x \mapsto d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ sont continues.

Caractérisations topologiques de la continuité

Si $X \subset F$ et $f : E \rightarrow F$,

$$f^{-1}(X) = \{x \in E \mid f(x) \in X\} \subset E$$

$A \subset f^{-1}(X)$ si et seulement si $f(A) \subset X$.

Théorème : Image réciproque et continuité

Une application de E dans F est continue si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vraie :

- L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E .
- L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E .

Par exemple, si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue,

$$\{x \in E, f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \text{ est ouvert ;}$$

$\{x \in E, f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in E, f(x) = 0\}$ sont fermés.

→ Applications linéaires

La continuité d'une application linéaire se ramène par linéarité à sa continuité en 0.

Théorème : Continuité d'une application linéaire

L'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue si, et seulement si il existe $C > 0$ tel que,

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

Pour justifier la continuité d'une application linéaire,

- on peut invoquer un argument de dimension :

Théorème

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

- on peut majorer $\|u(x)\|$ afin de trouver C tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq C \|x\|$.

Pour justifier la non-continuité, on peut chercher une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u(x_n)\| > n \|x_n\|$.

Tout noyau d'application linéaire en dimension finie est fermé et plus généralement :

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé est fermé.

→ Applications polynomiales et multilinéaires

Théorème : Continuité d'une application multilinéaire

L'application multilinéaire u de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F est continue si, et seulement si il existe $C > 0$ tel que,

$$\forall x \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad \|u(x)\|_F \leq C \cdot \|x_1\|_{E_1} \times \cdots \times \|x_n\|_{E_n}$$

- toute application polynomiale définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue.
- toute application multilinéaire définie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ supposé de dimension finie est continue.

Corollaire : Théorème des bornes atteintes

Si f est une application continue sur un compact et à valeurs dans \mathbb{R} , f est bornée et atteint ses bornes.

Fonctions d'une variable réelle

À l'exception de la dernière partie, on ne considère que des fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

Continuité

→ Continuité en un point, sur un intervalle

f est continue en $x_0 \in I$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e. si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

La somme, le produit et la composée de fonctions continues sont continues.

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f continue sur I avec $a, b \in I$ vérifiant $a < b$. Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. (TVI bis)

Une fonction continue qui change de signe sur I s'annule (au moins une fois) sur I .

Théorème : Théorème des bornes atteintes

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

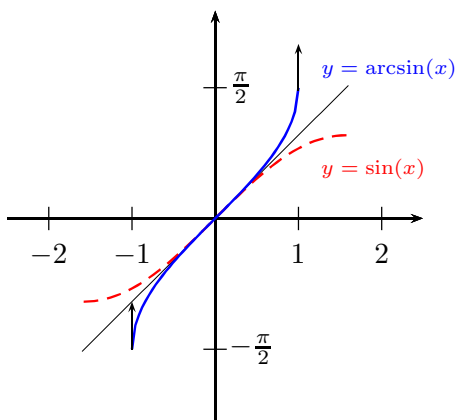
On remarquera qu'en général, $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$.

Théorème : Théorème de la bijection

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. De plus, la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue et de même monotonie que f .

Le graphe de f^{-1} est symétrique à celui de f par rapport à la première bissectrice.

→ Fonctions circulaires réciproques



Représentation de la fonction arcsin

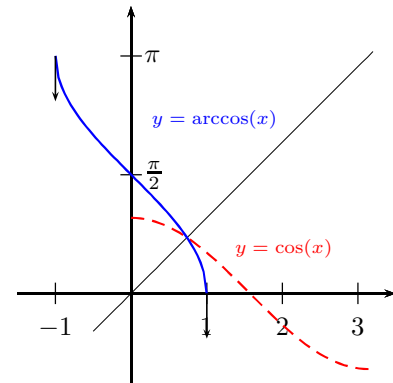
La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x$$

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) = x$$

La fonction arcsin est enfin impaire :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$



Représentation de la fonction arccos

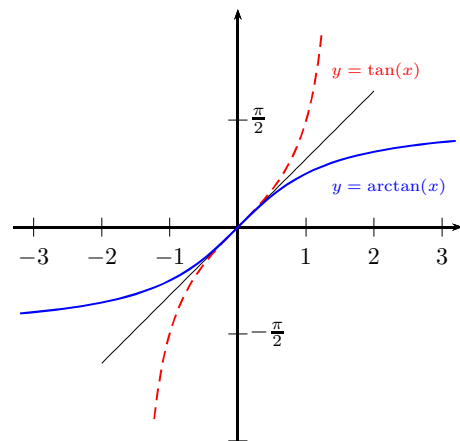
La fonction arccos est définie et continue sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, \pi]$. Elle est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$$

$$\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x$$

La fonction arccos vérifie enfin :

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$



Représentation de la fonction arctan

La fonction arctan est définie et continue sur \mathbb{R} et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x$$

La fonction arctan est impaire et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{sgn}(x) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Dérivabilité

f est dérivable en $x_0 \in I$ si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite finie en x_0 .

Théorème

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

f est dérivable en x_0 si et seulement si,

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$$

La somme, le produit et la composée de fonctions dérivables sont dérivables.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}; \quad (g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$$

Théorème : Dérivabilité de la bijection réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I et f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Dérivées des fonctions circulaires réciproques :

$$\forall x \in]-1, 1[, \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Théorème : Limite de la dérivée

Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. Si $f'(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 ,

- f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$;
- f' est de plus continue en x_0 .

Théorème : Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^n sur I . Alors, fg est également de classe \mathcal{C}^n sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Théorème : Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f'(x) = 0$.

Théorème : Formule des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Si $|f'|$ est majorée par un réel M sur I , on a alors (inégalité des accroissements finis) :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(y) - f(x)| \leq M|x - y|$$

Application à l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Formules de Taylor

Soient f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I et $a, b \in I$.

- Formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

- Inégalité de Taylor-Lagrange

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{où } M = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.$$

- Formule de Taylor-Young

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((b-a)^n)$$

Ces formules sont utiles pour déterminer un développement limité, pour justifier l'existence d'un développement en série entière, etc.

Développements limités et relations de comparaison

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0 , sauf éventuellement en x_0 . On dit que :

- f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \quad \left[\text{notation : } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \right]$$

- f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad \left[\text{notation : } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)) \right]$$

- f est dominée par g au voisinage de x_0 si :

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \text{ est bornée } \left[\text{notation : } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(g(x)) \right]$$

Proposition : Lien entre \sim et o

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o(g(x))$$

Définition : Développement limité

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

À connaître : Opérations usuelles sur les développements limités, intégration terme à terme (sans oublier la constante d'intégration), utilisation de la formule de Taylor-Young...

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\
\cos x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\
\sin x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\operatorname{ch} x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\
\operatorname{sh} x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Développements limités usuels

Fonctions convexes

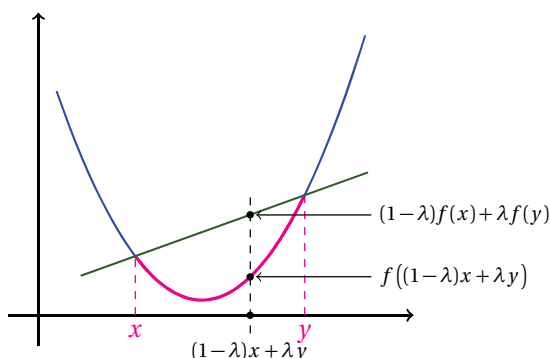
→ Généralités

Définition : Fonction convexe, fonction concave

Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de \mathbb{R} si pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Une application f est dite concave lorsque $-f$ est convexe.



Une fonction est convexe si et seulement si son graphe est au-dessous de toutes ses cordes.

Proposition : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs de somme 1. Alors,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

→ Caractérisations géométriques

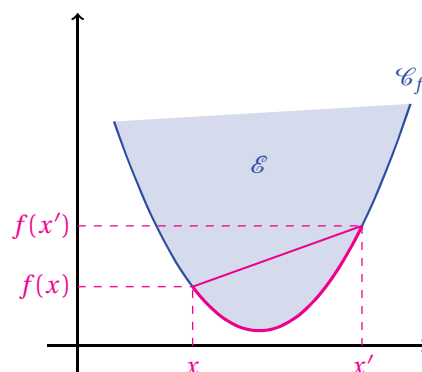
Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle épigraphe de f l'ensemble des points du plan situés au-dessus du graphe de f . Autrement dit,

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}$$

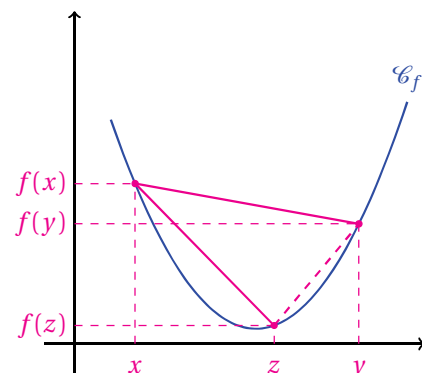
Proposition

Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .



Théorème : Croissance de la pente

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. f est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$.



Corollaire : Inégalité des pentes

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x, y, z \in I$ vérifiant $x < z < y$. Alors,

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

→ Caractérisation par la dérivée

La croissance de la dérivée permet d'établir facilement la convexité d'une fonction dérivable.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I . Alors, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est convexe
- (ii) f' est croissante
- (iii) le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes

Corollaire

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I . Alors f est convexe (resp. concave) si et seulement si $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$).

Fonctions vectorielles

On appelle fonction vectorielle d'une variable réelle toute fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. Si $E = \mathbb{R}^p$, une telle fonction sera de la forme :

$$f : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ t \longmapsto (f_1(t), \dots, f_p(t)) \end{cases}$$

Les fonctions numériques $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$ sont appelées *fonctions composantes* ou *fonctions coordonnées* de f . Si E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, on peut toujours écrire $f = f_1 e_1 + \dots + f_p e_p$.

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$, où E est de dimension p .

→ Dérivabilité d'une fonction vectorielle

f est dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe. Alors,

$$f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0) \cdot f'(t_0) + o(t - t_0)$$

La dérivabilité de f équivaut à celle de ses fonctions composantes. De plus,

- Toute combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable.
- Toute composée de fonctions dérivables est dérivable.
- Si $f : I \rightarrow F$ et $g : I \rightarrow G$ sont dérivables sur I et $B : F \times G \rightarrow E$ est bilinéaire, $B(f, g)$ est dérivable et :

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$$

Application classique : dérivation d'un produit scalaire ou d'un produit vectoriel.

L'application f est dite de classe \mathcal{C}^k sur I si elle est dérivable k fois sur I et si sa dérivée k -ième, notée $f^{(k)}$, est continue sur I .

Calcul intégral

Intégration sur un segment

→ Construction et propriétés

On définit l'intégrale en approchant sur le segment $[a, b]$ toute fonction continue par morceaux par une suite de fonctions en escalier.

Ainsi, $\int_a^b f$ existe pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b]; \mathbb{K})$.

Propriétés de l'intégrale : ($f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b]; \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$)

- Linéarité : $\int_a^b \lambda f + g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad (c \in [a, b])$
- Positivité : $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$ (seulement pour $a < b$)
- Croissance : $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$ (idem)
- Inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$ (idem)

Théorème

Soit f une fonction *positive* et *continue* sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f = 0 \iff f \text{ est identiquement nulle sur } [a, b].$$

→ Primitives

Une primitive d'une fonction continue f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I et $a, b \in I$.

$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I .

Si F est une primitive de f , $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Toutes les primitives sur un même intervalle sont égales à une constante près.

→ Recherche de primitives

Il existe de nombreuses façons de calculer des primitives.

- Reconnaissance de formes usuelles. Ex. : $f'f^\alpha$ se « primitive » en $\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, en $\ln|f|$ si $\alpha = -1$.
- Intégration par parties
Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

- Changement de variables

Si $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\varphi : [a, b] \rightarrow J$ de classe \mathcal{C}^1 ,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$$

- Fractions rationnelles

Intégration directe lorsqu'elles sont du type $\frac{1}{(x-a)^n}$.

Sinon, on décompose en éléments simples.

$x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ se primitive en $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$.

- Fractions rationnelles en exp : on pose $u = e^x$.
- Produit d'un polynôme par une exponentielle
On effectue des intégrations par parties successives jusqu'à éliminer le polynôme.
- Produit d'un polynôme trigonométrique par une exponentielle : on passe en complexe.

→ Calcul approché d'intégrales

La méthode des rectangles (ici « à gauche ») est à connaître.

Théorème : Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue (p.m) sur $[a, b]$. Alors,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Pour $a = 0$ et $b = 1$, on trouve :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Intégrales généralisées

I désigne désormais un intervalle quelconque de \mathbb{R} .

→ Définition

Définition

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

Si $\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow b^-$, on

dit que l'intégrale converge et on note $\int_a^b f$ la limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale impropre diverge.

Il y a deux types d'intégrales impropres : l'intégrale de fonctions non bornées sur un intervalle borné ($x \mapsto \ln x$ sur $]0, 1[$) et celle de fonctions continues sur un intervalle non borné ($x \mapsto e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$).

On peut étendre la définition précédente au cas $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$. Pour un intervalle de la forme $]a, b[$ on découpe l'intégrale en deux.

→ Étude de la nature d'une intégrale

On peut quelquefois calculer une primitive et passer à la limite pour prouver la convergence/divergence.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ CV ssi } \alpha > 1; \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ CV ssi } \alpha < 1;$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \text{ CV ssi } \alpha > 0; \quad \int_0^1 \ln t \, dt \text{ CV.}$$

Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité en b (attention, $b \neq \infty$!), $\int_a^b f$ converge.

$$\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f} \text{ où } \tilde{f} \text{ est le prolongement continu de } f$$

Théorème : Divergence grossière à l'infini

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Si f admet une limite $\ell \neq 0$ en $+\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Contrairement aux séries, on ne peut rien dire lorsque la limite n'existe pas.

→ Intégrales de fonctions positives

On dispose de plusieurs méthodes lorsque la fonction est positive (ou tout du moins de signe constant).

Théorème : Règle de majoration

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues p.m. sur I telles que $0 \leq f \leq g$. Alors,

$$(i) \quad \int_I g \text{ converge} \Rightarrow \int_I f \text{ converge.}$$

$$\text{Dans ce cas, } \int_I f \leq \int_I g$$

$$(ii) \quad \int_I f \text{ diverge} \Rightarrow \int_I g \text{ diverge.}$$

Théorème : Règle des équivalents

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues p.m. sur I , de signe constant au voisinage de b , telles que $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} g(t)$. Alors,

$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont de même nature.}$$

Théorème : Comparaison séries/intégrales

Soit f une application continue par morceaux, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$. Alors,

$$\sum f(n) \text{ et } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ sont de même nature.}$$

Des encadrements séries-intégrales permettent en outre d'obtenir des équivalents de sommes et d'intégrales.

Théorème : Règle du petit o et du grand O

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. On suppose g continue, positive et d'intégrale convergente sur $[a, b[$.

- si $f = o(g)$ alors $\int_a^b f$ converge (absolument);
- si $f = O(g)$ alors $\int_a^b f$ converge (absolument).

Ainsi, g intégrable $\Rightarrow f$ intégrable (cf. ci-dessous).

Application à $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$.

→ Calcul intégral

On se placera sur un segment avant d'utiliser une intégration par parties, quitte à passer à la limite.

Théorème : Changement de variable

Soient $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 .

$\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature et en cas de convergence, elles sont égales.

Idem pour φ strictement décroissante (aux bornes près).

→ Convergence absolue et fonctions intégrables

Définition

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue p.m. sur $[a, b[$.

On dit que $\int_a^b f$ est absolument convergente

lorsque $\int_a^b |f|$ converge.

Théorème : CV absolue \Rightarrow CV

Une intégrale absolument convergente converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ est semi-convergente.}$$

Définition

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue p.m. sur I est dite intégrable si $\int_I f$ est absolument convergente.

Les propriétés de linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles et inégalité triangulaire se vérifient encore pour des fonction intégrables sur un intervalle quelconque.

Théorème

L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables et continues sur I muni de $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_I |f|$ est un espace vectoriel normé.

Ce résultat est faux pour des fonctions seulement supposées continues par morceaux.

Théorèmes de Lebesgue

→ Convergence dominée

Théorème : Convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (p.m.) sur I .
- La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f .
- Il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur I vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \quad (\text{hypothèse de domination})$$

Alors, les fonctions f et f_n sont intégrables sur I et,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$$

Théorème : Convergence dominée (extension)

Soit $(f_x)_{x \in I}$ une famille de fonctions définies sur J à valeurs dans \mathbb{K} . Soit également x_0 un point adhérent à I (ou bien $x_0 = \pm\infty$). On suppose que :

- Pour tout $x \in I$, f_x est continue (p.m) sur J .
- Pour tout $t \in J$, $f_x(t) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(t)$ où f est une fonction continue par morceaux sur J .
- Il existe $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que pour tous $(x, t) \in I \times J$, $|f_x(t)| \leq \varphi(t)$.

Alors, les fonctions f_x et f sont intégrables sur J et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_J f_x(t) dt = \int_J f(t) dt$$

→ Intégration terme à terme

Pour des fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ positives,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(x) dx \right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

Cette égalité a lieu dans $[0, +\infty]$.

Théorème : Intégration terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (p.m.) sur I .
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux.
- La série $\sum \int_I |f_n|$ converge. (\triangle valeur abs.)

Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(x) dx \right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

Intégrales à paramètre

On note I et J deux intervalles de \mathbb{R} et on considère :

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt \quad \text{avec } f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$$

Déterminer le domaine de définition de g revient à étudier pour chaque $x \in I$ l'existence d'une intégrale.

→ Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème : Continuité sous le signe \int

Si une fonction $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ vérifie :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue p.m. sur J .
- Il existe $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors, $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est définie et continue sur I .

L'hypothèse de domination peut simplement être vérifiée sur tout segment K inclus dans I , c'est-à-dire :

$$\forall (x, t) \in K \times J, |f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$$

La continuité de g sur tout K assure sa continuité sur I . Si $J = [a, b]$ est un segment et f est continue sur $I \times [a, b]$, la domination sur tout segment est toujours vérifiée.

→ Dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Théorème : Théorème de Leibniz

Si une fonction $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ vérifie :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue (p.m.) sur J .
- Il existe $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors, $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

On peut là encore se contenter d'une domination sur tout segment inclus dans I . L'hypothèse de domination est toujours vérifiée lorsque J est un segment.

Extension aux fonctions de classe \mathcal{C}^k : on opère en plusieurs fois sur f' , f'' , ... ou bien on raisonne par récurrence. On peut également appliquer directement :

Théorème : Théorème de Leibniz – version \mathcal{C}^n

Si une fonction $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ vérifie :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^n sur I .
- Pour tous $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur J et $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ continue (p.m.).
- Il existe $\varphi_n : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_n(t)$$

Alors, $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^n sur I et

$$\forall x \in I, \quad g^{(n)}(x) = \int_J \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) dt$$

Ces hypothèses sont à savoir retrouver.

Probabilités discrètes

Dénombrement

Soient Ω un ensemble à n éléments et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Définition

- Un p -uplet ou une p -liste de Ω est une famille de p éléments de Ω .
- Un arrangement de p éléments de Ω est un p -uplet constitué d'éléments de Ω distincts.
- Une permutation de Ω est un arrangement de Ω à n éléments.
- Une combinaison de p éléments de Ω est un sous-ensemble de Ω contenant p éléments.

On modélise les tirages successifs avec remise à l'aide de listes, les tirages successifs sans remise avec des arrangements et les tirages simultanés avec des combinaisons.

Théorème

- Il y a n^p p -listes de Ω .
- Il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p éléments de Ω .
- Il y a $n!$ permutations de Ω .
- Il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons de p éléments de Ω .

Soient $n, p, m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \bullet \binom{n}{0} &= 1, \binom{n}{1} = n & \bullet \binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} \\ \bullet p \binom{n}{p} &= n \binom{n-1}{p-1} & \bullet \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \binom{n}{p} \\ \bullet \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= 2^n & \bullet \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} &= \binom{n+m}{p} \end{aligned}$$

Probabilités discrètes

→ Tribus et probabilités

Définition : Tribu

Une tribu sur Ω est une partie \mathcal{A} de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie :

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

La donnée d'un univers Ω (au plus dénombrable ou non) et d'une tribu \mathcal{A} définit un espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) ; tout élément de \mathcal{A} est appelé événement de Ω .

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

Définition : Système complet d'événements

On appelle système complet d'événements toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'événements telle que :

- Pour tous i et j distincts, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Définition : Probabilité

On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) toute application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant :

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) \quad (\sigma\text{-additivité})$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est appelé espace probabilisé.

Une probabilité est une application qui opère sur les événements. La σ -additivité assure la convergence des séries manipulées.

Proposition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{A}$.

- $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$.

- Si $\mathbf{P}(A) = 0$, l'événement A est dit négligeable ou quasi-impossible.
- Si $\mathbf{P}(A) = 1$, l'événement A est dit presque sûr ou quasi-certain.

→ Distribution de probabilités

On appelle distribution de probabilités discrète sur Ω toute famille de réels positifs indexée par Ω et de somme égale à 1.

Théorème

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable.

- Soit \mathbf{P} une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$. Alors, $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilités.
- Si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilités, il existe une unique probabilité \mathbf{P} définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$.

Dans le cas fini, on appelle probabilité uniforme sur Ω l'unique probabilité qui prend la même valeur pour chaque événement élémentaire.

→ Propriétés

Proposition : Continuité croissante

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (au sens de l'inclusion), alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

De même, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements (au sens de l'inclusion), $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

Ainsi, pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^p A_n\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^p A_n\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Proposition : Sous-additivité

• Si (A_1, \dots, A_n) est une famille d'événements, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(A_k)$$

• Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements et si la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

→ Conditionnement et indépendance

Théorème / Définition : Probabilité conditionnelle

Soit A un événement tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. L'application

$$\mathbf{P}_A : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R} \\ B \longmapsto \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} \end{cases}$$

est une probabilité sur Ω . On l'appelle probabilité conditionnelle relative à A (ou sachant A).

En tant que probabilité, \mathbf{P}_A vérifie toutes les propriétés énoncées précédemment.

Théorème : Formule des probabilités composées

Soient $n \geq 2$ et (A_1, A_2, \dots, A_n) une famille d'événements telle que $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Théorème : Formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B , la série de terme général $\mathbf{P}(B \cap A_n)$ est convergente et :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B|A_n) \mathbf{P}(A_n)$$

Théorème : Formule de Bayes

Soient A et B deux événements,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} \times \mathbf{P}(B|A)$$

Définition : Indépendance

- Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.
- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. Ces événements sont dits (mutuellement) indépendants si pour toute partie finie $J \subset I$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$

L'indépendance mutuelle d'une famille d'événements implique qu'ils sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse.

Variables aléatoires discrètes

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et E un ensemble quelconque (souvent \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Définition : Variable aléatoire discrète

On appelle variable aléatoire réelle discrète toute application $X : \Omega \rightarrow E$ telle que :

- $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable ;
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, $(X = x) = X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

X désigne désormais une variable aléatoire discrète.

$$X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Pour tout $A \subset X(\Omega)$, $(X \in A) \in \mathcal{A}$; la famille $((X = x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

→ Loi d'une variable aléatoire

Définition : Loi d'une variable aléatoire

On appelle loi de probabilité de X l'application :

$$\mathbf{P}_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \longmapsto \mathbf{P}(X \in A) \end{cases}$$

\mathbf{P}_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

La loi de X est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Notations usuelles :

- Si X suit la loi de probabilité $\mathcal{L} : X \sim \mathcal{L}$;
- Si X et Y suivent la même loi : $X \sim Y$.

Si X est à valeurs dans E et $f : E \rightarrow F$, alors $f(X)$ est une variable aléatoire, de loi donnée par :

$$\forall A \subset f(X(\Omega)), \mathbf{P}_{f(X)}(A) = \mathbf{P}(f(X) \in A) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) \in A}} \mathbf{P}(X = x)$$

On généralise aux fonctions de plusieurs variables.

En particulier,

$$\mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n = x) = \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ x_1 + \dots + x_n = x}} \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

→ Vecteurs aléatoires discrets

(X, Y) désigne un couple de variables aléatoires discrètes.

Définition : Lois conjointe et marginales

- La loi conjointe de X et de Y est la loi de (X, Y) . Elle est donnée par la distribution de probabilités :

$$(\mathbf{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

- Les lois marginales de (X, Y) sont celles de X et Y .

La formule des probabilités totales permet de trouver les lois marginales à partir de la loi conjointe.

Définition : Lois conditionnelles

- On appelle loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ la loi définie par $(\mathbf{P}(X = x | Y = y))_{x \in X(\Omega)}$;
- On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ la loi définie par $(\mathbf{P}(Y = y | X = x))_{y \in Y(\Omega)}$.

On étend les définitions suivantes aux n -uplets de variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) .

Définition : (Mutuelle) indépendance

Les variables X_1, \dots, X_n sont dites indépendantes si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

L'indépendance se traduit de manière équivalente par : pour tout $(A_1, \dots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

L'indépendance deux à deux ne garantit pas l'indépendance mutuelle.

Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Plus généralement (lemme des coalitions), si les variables X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

→ Famille infinie de variables aléatoires

On considère une famille infinie $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Alors,

- les variables X_i sont dites indépendantes si pour toute partie finie J de I , la famille $(X_i)_{i \in J}$ est indépendante.
- si les variables X_i suivent de plus toutes la même loi, on dira que $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.).

→ Moments d'une variable aléatoire

Soit X une v.a.d. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans \mathbb{C} .

Définition : Espérance

La variable X est dite d'espérance finie si la famille $(x \mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, on appelle espérance de X le nombre complexe :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x)$$

En pratique, pour $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, on justifiera la convergence absolue de $\sum x_n \mathbf{P}(X = x_n)$.

Si X^r admet une espérance, on appelle moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ le nombre complexe $\mathbf{E}(X^r)$. On note L^r l'ensemble des variables aléatoires admettant un moment d'ordre r .

Théorème : Théorème de transfert

Soit $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. $f(X)$ est d'espérance finie ssi la famille $(f(x) \mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Et alors,

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbf{P}(X = x)$$

L'espérance est linéaire, positive, croissante et vérifie l'inégalité triangulaire. Si $|X| \leq Y$ et $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.

Si X est à valeurs dans \mathbb{N} et d'espérance finie,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n)$$

Théorème : Espérance et indépendance

Soient $X, Y \in L^1$ indépendantes.

Alors, $XY \in L^1$ et $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

La réciproque est fausse.

On ne considère désormais que des variables réelles.

Définition : Variance

Si $X \in L^2$, $(X - \mathbf{E}(X))^2$ est d'espérance finie. On appelle variance de X et on note $\mathbf{V}(X)$ le réel positif :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = x)$$

On appelle écart type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition : Formule de Koenig-Huygens

Si $X \in L^2$, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$.

Une inégalité importante : $|XY| \leq \frac{X^2 + Y^2}{2}$.

Définition

Si $X, Y \in L^2$, alors $(X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))$ est d'espérance finie. On appelle covariance de X et Y et on note $\text{cov}(X, Y)$ le réel :

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$$

Si $\text{cov}(X, Y) = 0$, les variables sont dites *décorrélées*.

On suppose par la suite que $X, Y \in L^2$.

Théorème : Formule de Kœnig-Huygens

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y).$$

Proposition

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{V}(aX + bY) = a^2\mathbf{V}(X) + b^2\mathbf{V}(Y) + 2ab\text{cov}(X, Y)$$

Plus généralement,

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) + 2 \times \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

$$\text{En cas de décorrélation, } \mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i).$$

Cas particulier : $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\mathbf{E}(XY)^2 \leq \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$.
En particulier, $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$.

→ Fonctions génératrices

Définition : Fonction génératrice

Si X est à valeurs dans \mathbb{N} , la fonction génératrice de la variable X est définie par :

$$G_X : t \mapsto \mathbf{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)t^n$$

La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(X = n)t^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$ et converge normalement sur $D_f(0, 1)$.

Théorème : Fonction génératrice et moments

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

- (i) La variable aléatoire X admet une espérance $\mathbf{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1. Si tel est le cas, $\mathbf{E}(X) = G'_X(1)$.
- (ii) La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

Théorème : Somme de variables indépendantes

Si X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N} et indépendantes, alors, pour tout $t \in]-r, r[$ où $r = \min(R_X, R_Y)$,

$$G_{X+Y}(t) = \mathbf{E}(t^{X+Y}) = \mathbf{E}(t^X)\mathbf{E}(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$$

→ Inégalités de concentration et convergence

Lemme : Inégalité de Markov

Si X est à valeurs positives et admet une espérance,

$$\forall a > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

Proposition : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X admet un moment d'ordre 2,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Théorème : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2.

En notant m l'espérance commune et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

→ Lois usuelles

| Nom | Notation | $X(\Omega)$ | $\mathbf{P}(X = k)$ | $\mathbf{E}(X)$ | $\mathbf{V}(X)$ |
|-----------|---|------------------------------|--|-----------------|--------------------|
| Bernoulli | $\mathcal{B}(p)$ | $\{0, 1\}$ | $\begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ q & \text{si } k = 0 \end{cases}$ | p | pq |
| Binomiale | $\mathcal{B}(n, p)$ | $\llbracket 0, n \rrbracket$ | $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ | np | npq |
| Uniforme | $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ | $\llbracket 1, n \rrbracket$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ |
| Géométr. | $\mathcal{G}(p)$ | \mathbb{N}^* | $q^{k-1}p$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{q}{p^2}$ |
| Poisson | $\mathcal{P}(\lambda)$ | \mathbb{N} | $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ | λ | λ |

- Si $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}(m_i, p)$ sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(m_1 + \dots + m_n, p)$.

Réduction d'endomorphismes

Éléments propres

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

→ Généralités

Définition

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u associé au vecteur propre $x \in E$ si :

$$u(x) = \lambda x \text{ avec } x \neq 0_E$$

On appelle spectre de u et on note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u .

- On appelle sous-espace propre associé à λ l'espace vectoriel $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$.

Théorème

- Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

→ Polynôme caractéristique

On suppose désormais E de dimension finie n .

Définition

On appelle polynôme caractéristique de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le polynôme $\chi_M = \det(X I_n - M)$.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres.

M et M^\top ont même polynôme caractéristique.

Définition

On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de toute matrice représentative de u .

Théorème

- Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u .
- $\chi_u = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$.
- La somme des valeurs propres (complexes) vaut $\text{Tr}(u)$ et leur produit $\det(u)$.

Lorsque E est un \mathbb{C} -espace vectoriel, u admet exactement n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité. Lorsque E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, elle en admet au plus n .

Si F est stable par u , le polynôme caractéristique $\chi_{u|_F}$ de l'endomorphisme induit divise χ_u .

Théorème

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ d'ordre de multiplicité $m(\lambda)$.

$$1 \leq \dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)) \leq m(\lambda)$$

Si λ est valeur propre simple, alors $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est une droite vectorielle.

Polynômes d'endomorphismes et de matrices

Proposition

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, les sous-espaces $\text{Im}(P(u))$ et $\text{Ker}(P(u))$ sont stables par u .

→ Polynômes annulateurs et polynôme minimal

Définition : Polynôme annulateur

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. P est appelé polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

La définition est identique pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En dimension finie, il existe toujours un polynôme annulateur non trivial (donc une infinité).

→ Polynômes annulateurs et valeurs propres

Théorème

Si P annule u , toute valeur propre de u est racine de P . Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Attention, l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur contient les valeurs propres mais n'est pas égal, en général, au spectre de u .

→ Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème : Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie est un polynôme annulateur. En d'autres termes, si E est de dimension finie,

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Proposition

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est X^n .

Diagonalisation

Définition

- Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
- Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de vecteurs propres de f . Dans cette base, la matrice de f est diagonale.

Théorème : CNS de diagonalisabilité

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) u est diagonalisable
- (ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda$
- (iii) $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda)$
- (iv) χ_u est scindé et, $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda = m(\lambda)$
- (v) il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u .

Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples.

Théorème : CS de diagonalisabilité (1)

Si χ_u est scindé et n'admet que des racines simples alors u est diagonalisable.

Théorème : CS de diagonalisabilité (2)

- Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable à l'aide d'une base orthonormale de vecteurs propres.
- Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale.

Plan de diagonalisation (à l'aide de χ_u) :

- Étude de la diagonalisabilité de u .
 - On détermine χ_u .
 - Si χ_u n'est pas scindé, u n'est pas diagonalisable.
 - Si χ_u est scindé, on compare $\dim E_\lambda$ et $m(\lambda)$.
- Diagonalisation de u lorsque c'est possible.
On détermine une base de E_λ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ en résolvant $u(x) = \lambda x$ et on concatène les bases obtenues.

Corollaire

Si u est diagonalisable, alors pour tout sous-espace vectoriel F non réduit à $\{0_E\}$ et stable par u , l'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

Trigonalisation

Définition : Trigonalisabilité

- Un endomorphisme u de E est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
- Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème : CNS de trigonalisabilité

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) u est trigonalisable.
- (ii) son polynôme caractéristique est scindé.
- (iii)
 u est annulé par un polynôme scindé.

Toute matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $T = P^{-1}MP$ avec T une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée par les valeurs propres de M .

Lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, on cherchera généralement T sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Séries entières

Une série entière de variable réelle ou complexe z est une série de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Son domaine de convergence est le domaine de définition de :

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Rayon de convergence

→ Définition et propriétés

Lemme : Lemme d'Abel

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément $R \in \mathbb{R}_+$ défini par :

$$R = \sup \{ r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$$

Théorème

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

- Si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$ alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$ alors on ne peut rien dire.

En d'autres termes,

$$R = \sup \{ r \geq 0 \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument} \}$$

→ Détermination pratique du rayon de convergence

On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

Théorème : Encadrement

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $|z_0| \leq R$
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $|z_0| \geq R$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $|z_0| = R$.

Théorème : Comparaison

- si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, $R_a \geq R_b$.
- si $|a_n| \sim_{n \rightarrow +\infty} |b_n|$, $R_a = R_b$.
- si $a_n = o(b_n)$ $_{n \rightarrow +\infty}$, $R_a \geq R_b$.

On appliquera également la règle de d'Alembert (pour une série numérique à termes strictement positifs) ou, lorsque $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, sous la forme :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+ \implies R = \frac{1}{\ell}$$

Théorème

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

→ Opérations sur les séries entières

Théorème : Somme et produit

- $\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence R avec $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ ou $R \geq R_a$ si $R_a = R_b$.
- $\sum \lambda a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R_a si $\lambda \neq 0$ ou $+\infty$ si $\lambda = 0$.
- Le produit de Cauchy des deux séries est de la forme $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et son rayon de convergence R vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.

Régularité de la somme

Soient la série entière $\sum a_n z^n$, $R > 0$ son rayon de convergence et $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sa somme.

→ Continuité

Théorème

Une série entière converge normalement, donc uniformément, sur $D_f(0, r)$ pour tout $r < R$.

Attention, il n'y a *a priori* pas convergence normale sur le domaine de convergence, seulement sur tout disque fermé inclus dans le domaine ouvert!

Théorème : Continuité

La somme d'une série entière réelle est continue sur le disque ouvert de convergence.

Pour justifier la continuité au bord du domaine, on s'intéressera à la convergence uniforme ou on appliquera (dans le cas réel) le théorème radial.

Théorème : Théorème de convergence radiale d'Abel

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge.

$$\text{Alors, } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Dans le cas réel, la somme est continue sur le domaine de convergence.

→ Dérivation et intégration terme à terme (cas réel)

On suppose désormais que $\sum a_n x^n$ est une série entière de la variable réelle. f est alors définie sur l'intervalle I , où $]-R, R[\subset I \subset [-R, R]$.

Théorème : Dérivation terme à terme

f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$, $\sum n a_n x^{n-1}$ est une série entière de rayon de convergence R et :

$$\forall x \in] -R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Théorème : Intégration terme à terme

On note F une primitive de f . $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence R et :

$$\forall x \in] -R, R[, \quad F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Développements en série entière

Définition

Une application est développable en série entière sur $] -r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R avec $R \geq r$ telle que :

$$\forall x \in] -r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Théorème

Si f admet un développement en série entière sur $] -r, r[$ alors f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -r, r[$, son développement en série entière est unique et est donné par sa série de Taylor : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

La réciproque est fautive : toute fonction de classe \mathcal{C}^∞ n'est pas développable en série entière.

→ Détermination pratique

- Utilisation des développements usuels (♥).
- Dérivation et intégration terme à terme.
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Décomposition en éléments simples.
- Utilisation d'une équation différentielle.

→ Développements en série entière usuels

| | |
|-----------|---|
| $+\infty$ | $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ |
| $+\infty$ | $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} ; \quad \text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ |
| $+\infty$ | $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} ; \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ |
| $R=1$ | $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n ; \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ |
| $R=1$ | $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (\alpha \notin \mathbb{N})$ |

Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

→ Modes de convergence

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{K} .

Définition : Convergence simple

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur I si :

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

Établir la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ revient à montrer la convergence de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout $x \in I$.

Définition : Convergence uniforme

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang sur I et :

$$\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\text{c'est-à-dire : } \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

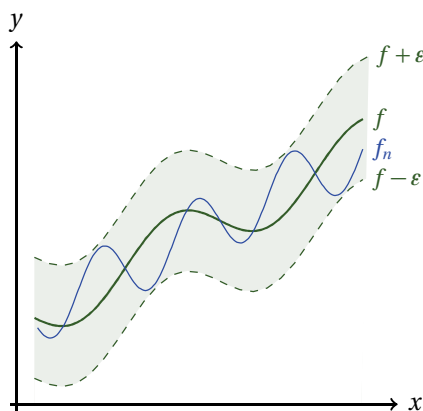


Illustration de la convergence uniforme

Proposition : CVU \Rightarrow CVS

Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I , alors elle converge simplement vers f sur I .

Méthode : établir la convergence uniforme

On commence par déterminer la limite simple f de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. S'offrent deux possibilités :

- 1 La borne supérieure sur I de $|f_n - f|$ s'obtient parfois par simple étude de fonction. Il suffit dans ce cas de passer à la limite.
- 2 Le calcul explicite de la borne sup est malaisé, on majore alors en cherchant $M_n \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq M_n \quad \text{avec} \quad M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Méthode : établir la non-convergence uniforme

Les possibilités sont multiples. On peut justifier :

- 1 la non-convergence simple (condition *minimale*) ;
- 2 le non-respect des théorèmes de continuité et de double limite.
- 3 l'existence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$|f_n(u_n) - f(u_n)| \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

→ Convergence uniforme, continuité et double limite

En cas de convergence uniforme, la continuité se transmet par passage à la limite.

Théorème : Continuité de la limite uniforme

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{K} convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a , alors f est continue en a .

La continuité étant une propriété locale, on peut se contenter de travailler seulement au voisinage de a .

Théorème : Théorème de la double limite

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{K} convergeant uniformément vers f sur I et soit a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a , alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Ce résultat généralise le précédent.

→ Convergence uniforme, intégration sur un segment

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{K} , convergeant uniformément sur le segment $[a, b]$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

Si l'intervalle n'est pas borné, on cherchera à exploiter le théorème de convergence dominée.

Proposition : Convergence uniforme et primitives

Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{K} , convergeant uniformément vers f sur tout segment de I . Soit $x_0 \in I$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt \quad \text{et} \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I .

→ Convergence uniforme et dérivation

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- (f_n) converge simplement sur I vers f .
- (f'_n) converge uniformément sur (tout segment de) I vers une fonction g .

Alors (f_n) converge uniformément vers f sur (tout segment de) I , f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$.

La convergence uniforme de la suite des dérivées s'établira sur l'intervalle I ou, si nécessaire, seulement sur tout segment inclus dans I .

Corollaire

Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^p sur I .
- Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I vers une fonction f_k .
- $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f_p .

Alors (f_n) converge uniformément vers $f = f_0$ sur tout segment de I . La fonction f est de plus de classe \mathcal{C}^p sur I et pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f^{(k)} = f_k$.

Séries de fonctions

→ Modes de convergence

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{K} . On appelle :

- somme partielle au rang n la fonction $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$;
- série de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition : Convergence simple, uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (respectivement uniformément) sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (respectivement uniformément) sur I .

En cas de convergence, on pose :

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

La convergence uniforme d'une série entraîne sa convergence simple.

Proposition

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Il n'est souvent pas commode de justifier la convergence uniforme d'une série de fonctions : il faut au préalable montrer la convergence simple pour ensuite étudier la convergence uniforme du reste vers 0.

Définition : Convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I (à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, I}$ converge.

Pour justifier la convergence normale, on établit souvent la majoration $\|f_n\|_{\infty} \leq \alpha_n$ avec $\sum \alpha_n$ convergente.

Théorème

Si la série de fonctions converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I .

$$\text{Dans ce cas, } \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty, I} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty, I}.$$

CV normale

\Rightarrow

CV uniforme

\Rightarrow

CV simple

Toute série convergeant uniformément ne converge pas nécessairement normalement. La majoration uniforme du reste est souvent aisée lorsqu'une série $\sum (-1)^n u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées :

$$\forall x \in I, \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)|$$

Sous condition, $\|R_n\|_{\infty} \leq \|u_{n+1}\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

→ Continuité et double limite

Théorème

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans \mathbb{K} convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a .

En pratique, la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I assure la continuité sur I . Cette condition s'avère pratique lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme (ou mieux, normale) sur I .

Théorème : Théorème de la double limite

Soient $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans \mathbb{K} et a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a .
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

Alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet

une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

→ **Dérivation et intégration d'une série de fonctions****Théorème : Dérivation terme à terme**

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- $\sum f_n$ converge simplement sur I .
- $\sum f'_n$ converge uniform. sur tout segment de I .

Alors, $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$$

On généralise alors aux séries de fonctions de classe \mathcal{C}^p .

Corollaire : Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^p sur I .
- Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I .
- $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^p sur I et,

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

Théorème : Intégration terme à terme (segment)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{K} , convergeant uniformément sur le segment $[a, b]$. Alors $\sum \int_a^b f_n(x) dx$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

Les fonctions en escalier et les fonctions continues sont continues par morceaux.

Proposition

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Théorème : Approximation uniforme (segment)

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Approximation uniforme**Définition : Fonctions continues par morceaux**

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux si pour une certaine subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

- $f|_{x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- $f|_{x_i, x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}

La subdivision (x_0, \dots, x_n) est dite adaptée à f .

Suites numériques et vectorielles

Suites numériques classiques

- Suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

- Suite géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

- Suite arithmético-géométrique

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = au_n + b \quad (a \neq 1) \end{cases}$$

On note ℓ le point fixe de la suite : $\ell = a\ell + b$. $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a et $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$.

- Suite récurrente linéaire d'ordre 2

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

On résout l'équation caractéristique $X^2 - aX - b = 0$ de discriminant associé Δ .

- (i) Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 .

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- (ii) Si $\Delta = 0$, une racine réelle double r .

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + n\mu)r^n$$

- (iii) Si $\Delta < 0$, deux racines complexes $\rho e^{\pm i\theta}$.

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

Convergence des suites numériques

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne ici une suite à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

La limite, lorsqu'elle existe, est unique. Toute suite convergente est bornée, mais la réciproque est fausse.

→ Cas des suites réelles

Axiome de la borne supérieure : toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Théorème : Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.

Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Outre les théorèmes de comparaison et des gendarmes, le théorème suivant est à connaître.

Théorème : Suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant :

(i) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

(ii) $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

→ Suites extraites et valeurs d'adhérence

Toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante est appelée suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ puisque $\varphi(n) \geq n$.

Théorème

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors toute suite extraite converge vers ℓ .

Théorème : Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Relations de comparaison

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites numériques réelles avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on dit que :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Notation : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$;

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Notation : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$;

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\frac{u_n}{v_n}$ est borné.

Notation : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ .

De plus, si deux suites sont équivalentes, les termes généraux sont de même signe à partir d'un certain rang.

Théorème

Pour deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ données,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n)$$

Suites vectorielles

On note $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension quelconque.

→ Convergence d'une suite

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq M$.
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

On dit qu'elle diverge sinon.

On remarquera que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition

- La limite d'une suite, lorsqu'elle existe est unique.
- Toute suite convergente est bornée.

L'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et l'application $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est une forme linéaire sur cet espace.

Proposition

Soient p espaces vectoriels normés (E_i, N_i) . On pose $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ et on munit E de la norme produit notée N . Une suite $u = (u_1, \dots, u_p)$ de E converge si, et seulement si, chaque suite u_i converge dans E_i . Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{1,n}, \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{p,n} \right)$$

Une suite définie sur un espace vectoriel normé produit converge si et seulement si chacune des suites composantes converge. Ainsi,

- pour étudier une suite à valeurs dans \mathbb{K}^p , on se ramènera à l'étude des p suites composantes (elles, à valeurs dans \mathbb{K}).
- pour déterminer la nature d'une suite à valeurs dans \mathbb{C} , on pourra étudier la convergence des parties réelle et imaginaire.

→ Suites extraites et valeurs d'adhérence

Définition : Suite extraite

On appelle suite extraite ou sous-suite d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Définition : Valeur d'adhérence

On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E toute limite d'une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition

Une suite converge vers $\ell \in E$ si, et seulement si, toutes ses sous-suites convergent vers ℓ .

La limite est donc l'unique valeur d'adhérence d'une suite convergente. Ainsi, une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

Si K est une partie compacte de E , toute suite admet au moins, par définition, une valeur d'adhérence dans K .

Séries numériques et vectorielles

Sommes classiques

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Si } q \neq 1, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ et } \sum_{k=p}^n q^k = q^p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ et } x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Convergence des séries numériques

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est supposée à valeurs dans \mathbb{K} .
On appelle :

- somme partielle au rang n le terme $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
 - série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $\sum u_n$.
 - somme de la série de terme général la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- La série de terme général u_n est dite convergente lorsque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On appelle alors :
- somme de la série la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{Notation : } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

- reste au rang n la différence $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant ses premiers termes.

Petit passage en revue des techniques au programme permettant de déterminer la nature d'une série.

→ Divergence grossière

Théorème

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la série diverge (de manière grossière).

La réciproque est fautive comme le montre l'exemple $\sum \frac{1}{n}$.

→ Calcul direct

Théorème : Série géométrique

$\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ (pour $x \in \mathbb{C}$).
Dans ce cas, sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$.

On peut également prouver la convergence de séries à l'aide de sommes télescopiques.

Proposition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ssi la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

→ Cas des séries à termes positifs

Attention, ces résultats ne sont valables que pour des séries à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang).

Théorème

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs. Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée alors la série converge. Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Théorème : Règle de majoration

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

(i) $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge.

$$\text{Et alors, } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge.

Théorème : Règle des équivalents

On suppose $\sum v_n$ à termes positifs et $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Alors, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème : Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes *strictement* positifs vérifiant de plus $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Théorème : Comparaison séries/intégrales

Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue, positive et décroissante, $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Ce théorème fournit de nouvelles séries de référence.

Théorème : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème : Règles du petit o et du grand O

Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente.

- Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge (absolument).
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge (absolument)

→ Convergence absolue

Lorsque la série n'est plus à termes positifs (cas réel ou complexe), on étudie sa convergence absolue.

Définition

On dit que $\sum u_n$ converge absolument lorsque la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème : CV abs \Rightarrow CV

Une série absolument convergente est convergente.

La réciproque est fausse : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

→ Produit de Cauchy

Théorème : Produit de Cauchy

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy converge (absolument) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \quad \text{avec } w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

→ Critère spécial des séries alternées

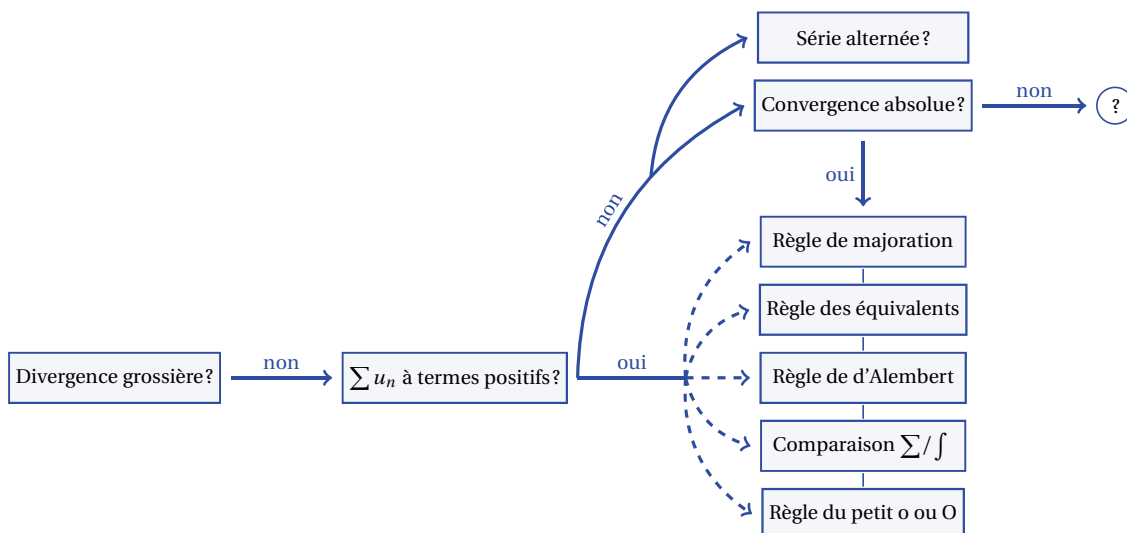
Théorème : Théorème spécial des séries alternées

Soit $\sum (-1)^n \alpha_n$ une série à termes réels telle que :

$$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ positive, } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$$

Alors $\sum (-1)^n \alpha_n$ converge et $|R_n| = |S - S_n| \leq \alpha_{n+1}$.
 R_n est de plus du signe du premier terme « négligé ».

Application à l'étude de la convergence uniforme de certaines séries de fonctions.



Familles sommables

Ensembles dénombrables

Définition : Ensemble dénombrable

- Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et \mathbb{N} .
- Il sera dit *au plus* dénombrable s'il est fini ou en bijection avec \mathbb{N} .

Si E est dénombrable, on peut numéroter ses éléments :

$$E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{N}^* , \mathbb{Z} , \mathbb{N}^2 , \mathbb{Q} sont dénombrables.

- Le produit cartésien d'un nombre *fini* d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- La réunion *finie* ou *dénombrable* d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Les ensembles \mathbb{R} , $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.

Familles sommables de nombres complexes

$(u_i)_{i \in I}$ désigne une famille de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable I .

→ Cas des familles de réels positifs

Définition

La famille de réels positifs $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si

$$\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I, J \text{ finie} \right\} \text{ est majoré.}$$

Dans ce cas, on pose : $\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ finie}}} \sum_{i \in J} u_i$

Si $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, on pose $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

Proposition : Lien avec les séries numériques

La famille de réels positifs $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Dans ce cas, $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Théorème : Sommation par paquets (cas positif)

Soient $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition d'un ensemble dénombrable I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. Alors,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

Cette dernière égalité est une égalité dans $[0, +\infty]$. Si la somme est finie, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

→ Cas des familles de nombres réels ou complexes

Définition

La famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est dite sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i \in I}$ l'est.

Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de complexes, la famille est sommable si, et seulement si, $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ le sont. On pose alors :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

Toute combinaison linéaire de familles sommables est sommable et pour une famille sommable $(u_i)_{i \in I}$:

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$$

Théorème : Sommation par paquets (cas complexe)

Soient (I_n) une partition de I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes supposée sommable. Alors,

(i) pour tout entier n , $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable ;

(ii) la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} |u_i| \right)$ converge.

De plus, $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$.

Application aux séries doubles

Théorème : Tonelli discret

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels positifs.

Alors, $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}$.

C'est à nouveau une égalité dans $[0, +\infty]$.

Théorème : Fubini discret

Si la famille de complexes $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est som-

mable, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

On retrouve également le théorème du produit de Cauchy.