

DM-Séries Intégrales

Exercice 1.

Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n^{\frac{2}{3}} + 1}{n\sqrt{n} + n^2},$
2. $\sum \frac{\ln(1+n)}{(\sqrt{2})^n},$
3. $\sum \frac{\cos \pi n}{n^{\frac{3}{4}} - 6n^{\frac{1}{4}} + 12},$
4. $\sum n^n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)^n.$

Exercice 2.

On considère la série $\sum \frac{(-1)^n}{n + 2 \cos n^2}.$

1. Cette série est-elle absolument convergente ?
2. Montrer qu'en revanche la série $\sum \frac{(-1)^n}{n + 2 \cos n^2} - \frac{(-1)^n}{n}$ est absolument convergente.
3. En déduire la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n + 2 \cos n^2}.$

Exercice 3.

1. Montrer qu'au voisinage de 0 on a :

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + x^2 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{\frac{1}{k}} \in]0, 1[.$$

(Indication $\sqrt{e} \simeq 1,648.$)

- (b) En déduire le signe de $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
- (c) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$?

(d) Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) \quad \text{et} \quad u_n = e^{V_n}.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. (a) Montrer que :

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln(1 - \frac{1}{k}) \right].$$

(b) Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$.

(c) En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$ avec $K > 0$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k.$$

5. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.