

Groupe A6 : séance de révision du 27/05/26

Exercice 1 Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $n \geq 1$ par $f_n(x) = \frac{1}{n+x}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$.
2. Même question pour la série $\sum_{n \geq 1} f_n$.
3. Même question pour la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f_n$.

Solution de l'exercice 1 Vu en séance.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad xu'' + 2u' + 4xu = 0, \quad u(0) = 1.$$

On cherche une solution de (E) développable en série entière.

1. Soit $u(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. On suppose que cette série entière $u(x)$ est solution de (E) . Justifier que la suite $(a_n)_n$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 2 \quad n(n+1)a_n + 4a_{n-2} = 0$$

et montrer que $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

2. Pour tout $p \geq 0$, donner la valeur de a_{2p+1} en fonction de p .
3. Pour tout $p \geq 0$, donner la valeur de a_{2p} en fonction de p .
4. Calculer le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ et en déduire que u est solution de l'équation (E) .
5. Donner le développement en série entière de $\sin(x)$.
6. Exprimer la solution u de (E) avec des fonctions élémentaires.

Solution de l'exercice 2

1. On écrit $xu''(x) + 2u'(x) + 4xu(x)$ comme une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sur $] -R, R[$. Comme c'est la fonction nulle, les coefficients $(b_n)_n$ sont nuls. On a, pour tout $x \in] -R, R[$:

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$u''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1},$$

$$xu''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$xu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} xu''(x) + 2u'(x) + 4xu(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \\ &= 2(0+1)a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + 4a_{n-1}) x^n \\ &= 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+1} + 4a_{n-1}) x^n \end{aligned}$$

Ce qui donne $b_0 = 2a_1 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $b_n = (n+2)(n+1)a_{n+1} + 4a_{n-1} = 0$, ce qui se réécrit par changement d'indice en

$$\forall n \geq 0, n(n+1)a_n + 4a_{n-2} = 0.$$

On a par ailleurs $a_0 = u(0) = 1$ et $2a_1 = 0$ donc $a_1 = 0$.

2. Si $a_{2(p-1)+1} = a_{2p-1} = 0$, alors $a_{2p+1} = \frac{-4}{(2p+1)(2p+2)} a_{2p-1} = 0$. Comme $a_1 = 0$, on a par récurrence sur p , $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geq 0$.
3. On a $a_{2p} = \frac{-4}{(2p+1)2p} a_{2p-2} = \frac{(-4)^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)} a_{2p-4} = \dots = \frac{(-4)^p}{(2p+1)!} a_0 = \frac{(-4)^p}{(2p+1)!}$.
4. On a $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{p \geq 0} a_{2p} x^{2p}$. On a $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a_{2(p+1)}}{a_{2p}} = 0$ donc la série entière $\sum_{p \geq 0} a_{2p} t^p$ a pour rayon de convergence $+\infty$, donc la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ également.
5. $\sin(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$.
6. On voit que $2xu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} 2^{2p+1} x^{2p+1} = \sin(2x)$. Donc pour $x \neq 0$,

$$u(x) = \frac{\sin(2x)}{2x}.$$

Exercice 3

On considère la fonction f , 2π -périodique, définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = (x - \pi)^2$. On notera $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier trigonométriques de f .

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Justifier que f est paire.
3. Calculer $a_n(f)$ pour tout $n \geq 0$ et $b_n(f)$ pour tout $n \geq 1$.
4. Justifier avec précision que la série de Fourier trigonométrique de f converge uniformément vers f .
5. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
6. La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos(nx))'$ converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R} ?
7. Donner la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Solution de l'exercice 3

- 1.
2. Pour $x \in [0, \pi]$, $-x \in [-\pi, 0]$ donc $-x + 2\pi \in [\pi, 2\pi] \subset [0, 2\pi]$. Donc

$$f(-x) = f(-x + 2\pi) = (-x + 2\pi - \pi)^2 = (-x + \pi)^2 = (x - \pi)^2 = f(x).$$

Donc f est paire sur $[-\pi, \pi]$ et 2π -périodique, donc paire.

3. Comme f est paire, on a, pour tout $n \geq 1$ $b_n(f) = 0$. Ensuite, pour $n = 0$, on a

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(t - \pi)^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Pour $n \geq 1$, on fait une double intégration par partie. On trouve :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left(\left[(t - \pi)^2 \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} (t - \pi) \sin(nt) dt \right) \\ &= \frac{-4}{n\pi} \left(\left[-(t - \pi) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt \right) = \frac{4\pi}{\pi n^2} = \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

4. On vérifie que la fonction est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. Ça implique que la série de Fourier converge (uniformément) vers la fonction f .
— f est continue sur $]0, 2\pi[$. On vérifie la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \pi \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

(pour la deuxième limite, on utilise ici la parité de f) Donc f est continue en 0 également. Par 2π -périodicité, f est continue sur \mathbb{R} .

- f est \mathcal{C}^1 sur $]0, 2\pi[$. Par 2π -périodicité, pour vérifier que f est \mathcal{C}^1 par morceaux, il suffit de vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f'(x)$ existent et sont dans \mathbb{R} (ce qui est immédiat).
- 5. On a donc pour $x \in [0, 2\pi[$,

$$(x - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

On évalue en $x = \pi$, ça donne

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

- 6. Non, cette série de fonction ne converge pas uniformément, sinon la limite serait de classe \mathcal{C}^1 . Ce n'est pas le cas car cette limite est $f - \frac{\pi^2}{3}$ et f n'est pas \mathcal{C}^1 (cf le graphe).
- 7. On utilise l'égalité de Parseval :

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$$

ce qui donne

$$\frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{5}.$$

Donc

$$8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 8S = \pi^4(1/5 - 1/9) = \frac{4\pi^4}{45}.$$

Donc $S = \frac{\pi^4}{90}$.