

MATH2-ANA4 -  
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PIERRE GERVAIS  
[pierre.gervais@math.univ-toulouse.fr](mailto:pierre.gervais@math.univ-toulouse.fr)  
<https://pierre-gervais.apps.math.cnrs.fr/>

13 juin 2026



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Suites et séries de fonctions</b>	<b>7</b>
1.1	Suites de fonctions . . . . .	7
1.1.1	Types de convergence . . . . .	8
1.1.2	Outils pour montrer la convergence uniforme . . . . .	10
1.1.3	Propriétés de la convergence uniforme . . . . .	12
1.2	Séries de fonctions . . . . .	20
1.2.1	Rappel sur les séries numériques . . . . .	21
1.2.2	Modes de convergence . . . . .	24
1.2.3	Transcription des résultats sur les suites de fonctions . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Séries entières</b>	<b>29</b>
2.1	Rayon de convergence . . . . .	29
2.2	Développement en série entières . . . . .	33
2.3	L'exponentielle généralisée . . . . .	36
2.3.1	Exponentielle complexe et fonctions trigonométriques . . . . .	39
2.3.2	Exponentielle de matrice . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>45</b>
3.1	Présentation des séries de Fourier . . . . .	48
3.2	Critères de convergence des séries de Fourier . . . . .	52
3.3	Preuve du Lemme de densité . . . . .	57



# Introduction

Voici les notes de cours utilisées pour enseigner le module “Suites et séries de fonctions” au printemps 2026 à l’Université Paul Sabatier, basées sur celles de [Vincent Guedj](#) et [Jean-Marc Bouclet](#), ainsi que les feuilles de TDs basées sur celles de [Pierre Petit](#). Il s’agit de séances de cours-TD, réparties sur 14 semaines à raison de 4h par semaine.

Le module se décompose naturellement en trois parties à peu près équivalentes, les notes de cours sont ainsi divisées en trois chapitres de taille similaire.

## Objectifs

L’objectif de ce module est de définir les différents modes de convergence de suites et séries de fonctions, en soulignant le rôle de la convergence uniforme pour la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite, puis d’étudier le développement en série entière et en série de Fourier d’une fonction.

Il s’agit d’un sujet très classique et absolument incontournable pour la suite des études.

## Syllabus

Voici le syllabus de ce module.

### Suites et séries de fonctions (~4 semaines)

Convergence simple et uniforme d’une suite de fonctions : critère de Cauchy uniforme. Stabilité de la bornitude et régularité  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 0$ ) et résultats de permutation de limites/dérivées/intégrales. Exemples d’approximation uniforme : une fonction continue sur un segment par des fonctions en escaliers ou par des polynômes.

Rappels sur les séries numériques. Convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions. Adaptation des propriétés du paragraphe précédent à ce cadre.

### Séries entières (~5 semaines)

Convergences : rayon de convergence, lemme d’Abel, règle de D’Alembert. Convergence normale sur tout disque fermé contenu dans le disque ouvert de convergence. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières. Les coefficients des séries entières sont réels ou complexes.

Séries entières de la variable réelle : dérivation et primitivation sur l'intervalle ouvert de convergence. Expression des coefficients de la série entière en fonction des dérivées en 0 de la somme de la série entière. Développements en séries entières : développement sur  $\mathbb{C}$  de  $\exp z$ , sur le disque unité de  $1/(1-z)$ . Développement en séries entières de la variable réelle (exemples des fonctions exponentielle,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\arctan$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^a$ ). Développement de Taylor d'une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ .

Applications aux équations différentielles linéaires : définition, notion de solution. Résolution par recherche d'une solution développable en série entière. Développement en série entière d'une fonction qui est solution d'une équation différentielle linéaire. Exponentielle de matrices. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent. Dérivation de  $t \mapsto \exp(tA)$ , où  $A$  est une matrice carrée. Le calcul d'une exponentielle se limite au cas où  $A$  est diagonalisable ou d'ordre  $n \leq 3$ .

### Série de Fourier (~5 semaines)

Coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux  $2\pi$ -périodique. Applications des théorèmes généraux sur les séries de fonctions à ce contexte. On pourra montrer par exemple que la série de Fourier d'une fonction  $\mathcal{C}^1$  et  $2\pi$ -périodique converge normalement. Théorème de Dirichlet (preuve admise).

### Bibliographie

- Il existe de nombreuses notes de cours disponibles en ligne sur ce sujet très classique ; ce poly reprend et adapte les notes de [Jean-Marc Bouclet](#), adaptées par [Vincent Guedj](#), pour un module similaire de la précédente accréditation.
- Parmi les nombreux ouvrages qui couvrent le matériel de ce module, mentionnons *Tout-en-un pour la Licence, tome 1*, de Jean-Pierre Ramis et André Warusfel (dir.), Dunod (2018) : chapitres II.2 et II.4.

# Chapitre 1

## Suites et séries de fonctions

### Introduction

Beaucoup de problèmes mènent à considérer des fonctions définies comme des limites de suites de fonctions  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  ou même plus précisément des séries de fonctions  $f = \sum f_n$ . Par exemple, pour résoudre une équation fonctionnelle, c'est-à-dire dont l'inconnue est une fonction  $f$  (équation différentielle, équation aux dérivées partielles, équation intégrale...) on peut construire une suite de solutions  $f_n$  qui sont *presque* des solutions, et qui (on l'espère) converge vers une solution exacte<sup>1</sup>. On pourra alors être amené à se poser les questions suivantes :

- Est-ce que ces limites existent ?
- Sont-elles régulières ? (bornées, continues, dérivables,  $C^k \dots$ )
- Peut-on calculer leurs intégrales ?

Lorsque la suite converge *simplement*, on ne peut en général pas dire grand chose de la limite  $f$ . Le but de ce chapitre est de présenter et se familiariser avec la notion de convergence *uniforme* qui permet de déduire des informations intéressantes sur la limite.

### 1.1 Suites de fonctions

Dans cette partie,  $I$  désigne une partie a priori quelconque de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur  $I$ , i.e. pour chaque  $n$  on a une fonction  $f_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ .

Si une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$  est bornée (c'est le cas en particulier si  $\varphi$  est continue et  $I = [a, b]$ ), on définit

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in I} |\varphi(x)|.$$

Notons que cette *norme*  $\|\cdot\|_\infty$ , tout comme le module (resp. valeur absolue)  $|\cdot|$  sur  $\mathbb{C}$  (resp.  $\mathbb{R}$ ) satisfait les trois propriétés suivantes (**exercice**) :

---

1. Par exemple, pour résoudre une équation fonctionnelle  $\Phi[f] = 0$  on pourrait considérer une équation approximative  $\Phi_n[f_n] = 0$  plus facile à résoudre. Il faudra alors justifier que  $(f_n, \Phi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f, \Phi)$  en un certain sens afin de passer à la limite, et ainsi avoir une solution à l'équation initiale  $\Phi[f] = 0$ .

- (1). (Homogénéité)  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ .
- (2). (Inégalité triangulaire)  $\forall f, g$  bornées,  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .
- (3). (Séparation)  $\forall f$  bornée,  $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ .

### 1.1.1 Types de convergence

**Définition 1.1.** Soit une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , on définit les modes de convergence suivants :

- (1). On dit que  $(f_n)_n$  **converge simplement sur  $I$  vers  $f$**  si pour chaque  $x \in I$ , la suite  $(f_n(x))_n$  est convergente, c'est-à-dire

$$\text{pour chaque } x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) . \quad (1.1.1)$$

On notera alors  $f_n \xrightarrow{s} f$ .

- (2). On dit que  $(f_n)_n$  **converge uniformément sur  $I$  vers  $f$**  si

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 . \quad (1.1.2)$$

On notera alors  $f_n \xrightarrow{u} f$ .

**N.B.** En particulier, l'écart  $f_n - f$  est une fonction bornée sur  $I$ .

**Comparaison des modes de convergence** La convergence uniforme est bien entendu **plus forte** que la simple puisque  $f_n \xrightarrow{u} f$  implique

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et donc  $f_n \xrightarrow{s} f$ . Mais leur différence est plus profonde et est la suivante :

- (1). Dire que  $f_n \xrightarrow{s} f$  signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{I}}, \exists n_{\underline{\mathbf{x}}, \varepsilon} \geq 0 : (\forall n \geq n_{\underline{\mathbf{x}}, \varepsilon}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) . \quad (1.1.3)$$

Ici,  $n$  doit être suffisamment grand **en fonction de  $\underline{\mathbf{x}}$**  (en plus de  $\varepsilon$ ).

- (2). Dire que  $f_n \xrightarrow{u} f$  signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_\varepsilon, \underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{I}}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) . \quad (1.1.4)$$

Ici,  $n$  doit être suffisamment grand **uniformément en (*i.e.* indépendamment de)  $\underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{I}}$** , pour cette raison on dit aussi que  $f_n(x)$  tend vers  $f(x)$  **uniformément en  $\underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{I}}$** . On peut aussi écrire de manière plus compacte

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_\varepsilon, \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon) . \quad (1.1.5)$$



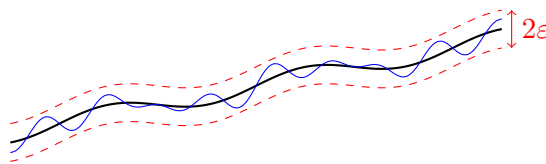


FIGURE 1.1 – En noir une fonction  $f$  et en bleu une fonction  $f_n$  telle que  $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ . Dire que  $f_n \xrightarrow{u} f$  signifie visuellement que peu importe la petitesse de  $\varepsilon$ , les fonctions  $f_n$  se resserrent autour de  $f$  à une distance  $\varepsilon$  à partir d'un certain rang  $n_\varepsilon$  suffisamment grand.

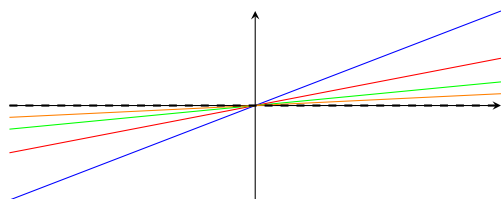
**Exercice 1.2.** Si  $(f_n)_n$  et  $(g_n)_n$  convergent simplement (resp. uniformément) vers  $f$  et  $g$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , il en va de même pour  $f + \lambda g$ .

**Exemples 1.3.** Considérons ces deux suites de fonctions définie sur  $I = \mathbb{R}$  :

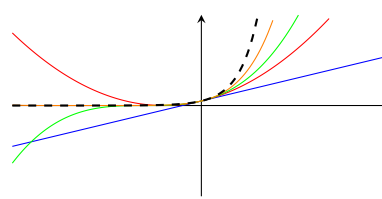
$$f_n(x) = \frac{x}{n} \quad \text{et} \quad f(x) = 0, \quad g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad g(x) = e^x.$$

Elles convergent simplement sur  $I$  mais pas uniformément.

En revanche, elle converge uniformément sur tout segment  $J = [a, b] \subset I$ , on dit qu'elle converge **localement uniformément** sur  $I$ .



(a)  $f_n(x)$  pour  $n = 1, 2, 4, 8$



(b)  $g_n(x)$  pour  $n = 1, 2, 3, 6$

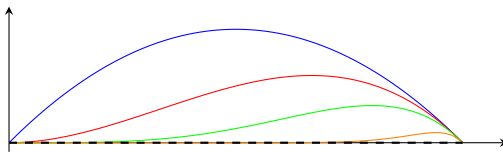
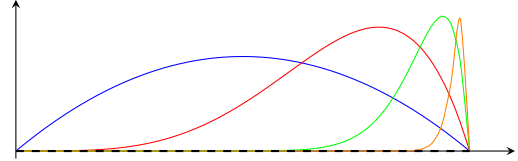
Le deuxième exemple est un cas particulier d'un résultat que nous montrerons plus tard : toute fonction continue est limite simple (et même localement uniforme) de fonctions polynomiales (Théorème 1.22).

**Exercice 1.4.** En déterminant leur tableaux de variations, montrer que cette suite converge uniformément sur  $I = [0, 1]$  :

$$f_n(x) = x^n(1 - x) \quad \text{et} \quad f(x) = 0,$$

mais que celle-ci converge simplement mais pas uniformément :

$$g_n(x) = nx^n(1 - x) \quad \text{et} \quad g(x) = 0.$$

(a)  $f_n(x)$  pour  $n = 1, 2, 4, 16$ (b)  $g_n(x)$  pour  $n = 1, 4, 16, 64$ 

### 1.1.2 Outils pour montrer la convergence uniforme

Voyons à présent plusieurs outils pratiques pour montrer la convergence uniforme de fonctions.

Ce premier critère a l'avantage de reformuler la convergence uniforme d'une suite de fonctions **sans parler de sa limite**, ce qui sera particulièrement pratique pour l'étude de séries de fonctions pour lesquelles on est en pratique capable de montrer leur convergence, mais pas de les calculer.

**Proposition 1.5** (Critère de Cauchy uniforme). *La suite  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $I$  si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 0 : (\forall m, n \geq n_\varepsilon, \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon) . \quad (1.1.6)$$

*Démonstration.* Nous montrerons d'abord le sens direct, puis le sens indirect. Notons que le critère de Cauchy uniforme se réécrit ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 0 : (\forall m, n \geq n_\varepsilon, x \in I, \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon) . \quad (1.1.7)$$

*Étape 1: Sens direct.* Supposons que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ . Alors, par définition, pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $n_\varepsilon \geq 0$  tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon, x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon .$$

Il suit que pour tous  $m, n \geq n_\varepsilon$  et  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq 2\varepsilon . \end{aligned}$$

En remplaçant  $\varepsilon$  par  $\varepsilon/2$ , on a ainsi montré (1.1.7). Cela conclut cette étape.

*Étape 2: Sens indirect.* Supposons que  $(f_n)_n$  soit uniformément de Cauchy, on va d'abord construire sa limite simple  $f$ , puis montrer que la convergence est uniforme.

Soit  $x \in I$ , la suite numérique  $(f_n(x))_n$  est de Cauchy, d'après (1.1.7). Comme  $\mathbb{C}$  est complet, elle est convergente, et on pose  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Par construction,  $f_n$  converge simplement vers  $f$ , mais montrons que la convergence est en fait uniforme. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par critère de Cauchy uniforme (1.1.6), il existe  $n_\varepsilon \geq 0$  tel que

$$\forall m, n \geq n_\varepsilon, x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon ,$$

donc en faisant tendre  $m \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\forall n \geq n_\varepsilon, x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon .$$

Autrement dit, pour tout  $n \geq n_\varepsilon$  on a  $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ . En conclusion,  $f_n \xrightarrow{u} f$ , ce qui conclut cette étape et la preuve.  $\square$

Ce prochain critère permet de justifier que si certaines expressions faisant intervenir une suite de fonction convergeant uniformément sont elles aussi uniformément convergentes.

**Théorème 1.6.** Soit  $f_n : I \rightarrow J$  une suite de fonctions convergeant **uniformément** vers  $f$  sur  $I$ , et  $\Phi : J \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction **uniformément continue**. Alors  $\Phi \circ f_n \xrightarrow{u} \Phi \circ f$ .

En particulier, par le théorème de Heine, si  $\Phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  et  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une suite de fonctions bornées convergeant uniformément vers  $f$ , alors  $\Phi \circ f_n \xrightarrow{u} \Phi \circ f$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall u, v \in J, |u - v| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |\Phi(u) - \Phi(v)| \leq \varepsilon .$$

Ainsi pour  $n \geq n_\varepsilon$  assez grand, on a

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (\forall x, y \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \delta_\varepsilon) ,$$

et par suite

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |\Phi(f_n(x)) - \Phi(f(x))| \leq \varepsilon ,$$

autrement dit pour tout  $n \geq n_\varepsilon$  on a  $\|\Phi \circ f_n - \Phi \circ f\|_\infty \leq \varepsilon$ . Cela conclut la preuve.  $\square$

**Exemple 1.7.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions **positives** ( $J = \mathbb{R}_+$ ) convergeant uniformément vers  $f$ , alors on a que

$$\log(1 + f_n) \xrightarrow{u} \log(1 + f), \quad \frac{1}{1 + f_n} \xrightarrow{u} \frac{1}{1 + f} \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + f_n} \xrightarrow{u} \sqrt{1 + f} .$$

Soit  $(g_n)_n$  une suite de fonctions **bornées** convergeant uniformément vers  $g$ , alors on a que

$$g_n^{100} \xrightarrow{u} g^{100} \quad \text{et} \quad e^{g_n} \xrightarrow{u} e^g .$$

### 1.1.3 Propriétés de la convergence uniforme

Le principal “défaut” de la convergence simple est qu’une suite de fonctions “gentilles” ne converge pas forcément vers une fonction “gentille”. Nous allons voir plusieurs exemples suivis de résultats où la convergence uniforme (voire mieux) règle ce problème.

Notons cependant que dans la plupart des exemples, le problème est lié à un seul point  $x_* \in I$ . On pourra régler ce problème en “coupant” ce point.

**Exercice 1.8** (Couper les point problématiques). *Montrer, pour chacun des contreexemples suivants, qu’en remplaçant  $I$  par un autre “éloigné de  $x_*$  d’une distance  $\delta \in ]0, 1[$ ”, on tombe bien dans le cadre du théorème qui le suit :*

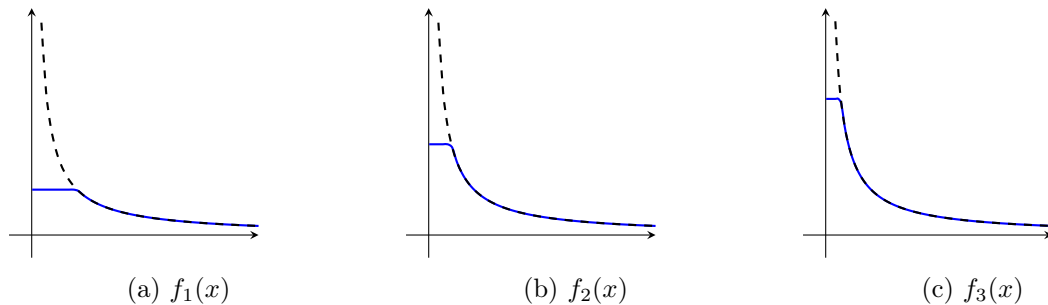
- Pour l’Exemple 1.9,  $x_* = 0$  et  $J = [\delta, +\infty[$
- Pour l’Exemple 1.12,  $x_* = 1$  et  $J = [0, 1 - \delta]$
- Pour l’Exemple 1.15,  $x_* = 0$  et  $J = [\delta, 1]$
- Pour l’Exemple 1.17,  $x_* = 0$  et  $J = [-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$

**Préservation de la bornitude** On se demande quand est-ce qu’une suite de fonction bornées converge vers une fonction bornée.

**Exemple 1.9** (Bornées + cvg. simple  $\not\Rightarrow$  lim. bornée). *Considérons la suite de fonctions définie sur  $I = ]0, +\infty[$*

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

*La suite converge simplement mais pas uniformément.*



**Théorème 1.10** (Bornées + cvg. unif.  $\Rightarrow$  lim. bornée). *Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions bornées sur  $I$ . Si la suite converge **uniformément** vers  $f$  sur  $I$ , alors  $f$  est **bornée** sur  $I$ .*

*Démonstration.* Il existe  $n_* \geq 0$  tel que (par exemple)  $\|f_{n_*} - f\|_\infty \leq 1$ , donc puisque  $f_{n_*}$  est bornée par hypothèse

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_{n_*}\|_\infty + \|f_{n_*}\|_\infty \leq 1 + \|f_{n_*}\|_\infty < \infty ,$$

donc  $f$  est bornée.  $\square$

Enfin, un dernier critère, moins souvent utile, laissé en exercice. En réalité, il s'agit du cas d'une série (télescopique) de fonctions.

**Exercice 1.11.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions telle que  $\sum_{n=0}^\infty \|f_{n+1} - f_n\|_\infty < \infty$ , à l'aide du critère de Cauchy, montrer que la suite converge uniformément.

**Préservation de la continuité** On se demande quand est-ce qu'une suite de fonction continues converge vers une fonction continue, mais aussi quand on peut échanger les limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right). \quad (1.1.8)$$

**Exemple 1.12** ( $\mathcal{C}^0 + \text{cvg. simple} \not\Rightarrow \text{lim. continue}$ ). Considérons la suite définie sur  $I = [0, 1]$

$$f_n(x) = x^n \quad \text{et} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

La suite converge simplement mais pas uniformément.

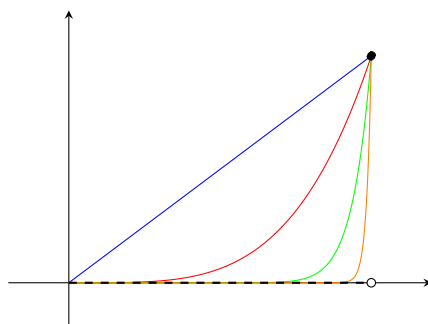


FIGURE 1.5 –  $f_n(x)$  pour  $n = 1, 4, 16, 64$

**Théorème 1.13** ( $\mathcal{C}^0 + \text{cvg. unif.} \Rightarrow \text{lim. } \mathcal{C}^0$ ). Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions **continues** sur  $I$ . Si la suite converge **uniformément** vers  $f$  sur  $I$ , alors  $f$  est **continue** sur  $I$ .

De plus, pour tout  $x_0 \in \bar{I}$ <sup>2</sup> tel que la limite suivante existe dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

2. L'ensemble noté  $\bar{I}$ , appelé *adhérence* de  $I$ , représente l'ensemble des limites  $\lim_n x_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  où  $(x_n)_n \subset I$ .

*Démonstration.* Montrons que  $f$  est continue sur  $I$  puis que l'on peut permuter les limites.

*Étape 1: Continuité.* Soit  $x \in I$ , montrons que  $f$  est continue en  $x$ . Considérons, pour  $\varepsilon > 0$  arbitraire, un rang  $n_\varepsilon \geq 0$  tel que  $\|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty \leq \varepsilon$ . On a donc pour tout  $y \in I$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|}_{\leq \|f - f_{n_\varepsilon}\|_\infty \leq \varepsilon} + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(y)| + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(y) - f(y)|}_{\leq \|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty \leq \varepsilon} \\ &\leq 2\varepsilon + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(y)|. \end{aligned}$$

Puisque  $f_{n_\varepsilon}$  est continue, on en déduit  $\lim_{y \rightarrow x} |f(x) - f(y)| \leq 2\varepsilon$ , et puisque  $\varepsilon$  est arbitraire, on en déduit ensuite (en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) que  $\lim_{y \rightarrow x} |f(x) - f(y)| = 0$ , c'est-à-dire  $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$ . En conclusion,  $f$  est continue sur  $I$ .

*Étape 2: Permutation des limites.* Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x_0} f_n(y) = +\infty$ , on vérifie dans ce cas que

$$f(y) = f_n(y) + f(y) - f_n(y) \geq f_n(y) - \|f - f_n\|_\infty,$$

ainsi en faisant tendre  $y \rightarrow x_0$

$$\lim_{y \rightarrow x_0} f(y) \geq \lim_{y \rightarrow x_0} f_n(y) - \|f - f_n\|_\infty,$$

et donc puisque  $(\|f - f_n\|_\infty)_n$  est bornée, on conclut  $\lim_{y \rightarrow x_0} f(y) = +\infty$ , et on procède similairement pour  $-\infty$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x_0} f_n(y) = \ell \in \mathbb{R}$ , on a

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_n(x)| + \left| f_n(x) - \lim_{y \rightarrow x_0} f_n(y) \right| + \left| \lim_{y \rightarrow x_0} f_n(y) - \ell \right|$$

ainsi, en prenant

$$— n_\varepsilon \text{ assez grand de sorte à } \|f - f_{n_\varepsilon}\|_\infty \leq \varepsilon \text{ ainsi que } \left| \lim_{y \rightarrow x_0} f_{n_\varepsilon}(y) - \ell \right| \leq \varepsilon$$

$$— y \text{ dans un voisinage}^3 \text{ de } x_0 \text{ tel que } \left| \lim_{y \rightarrow x_0} f_{n_\varepsilon}(y) - \ell \right| \leq \varepsilon,$$

on obtient alors que pour  $y$  dans un voisinage de  $x_0$  on a bien  $|f(y) - \ell| \leq 3\varepsilon$ . Cela conclut la preuve.  $\square$

**Exercice 1.14** (Continuité unif. + cvg. unif  $\Rightarrow$  Continuité unif.). *En adaptant légèrement la preuve du Théorème 1.13, montrer que la convergence uniforme préserve également la continuité uniforme.*

---

3. Si  $x_0$  est fini, cela signifie “assez proche de”, si  $x_0 = +\infty$ , cela signifie “assez grand (vers les positifs)” et si  $x_0 = -\infty$ , cela signifie “assez grand (vers les négatifs)”

**Permuter limite et intégrale** On se demande quand est-ce qu'il est possible d'échanger la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx . \quad (1.1.9)$$

**Exemple 1.15** (Cvg. simple  $\not\Rightarrow$  lim. integ.). *Considérons la suite de fonctions définie sur  $I = [0, 1]$*

$$f_n(x) = n^2 x^n (1 - x) \quad \text{et} \quad f(x) = 0 .$$

*La suite converge simplement mais pas uniformément, et on a*

$$\int_0^1 f_n(x) \, dx = \frac{2n}{n+2} - \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x) \, dx = 0 .$$

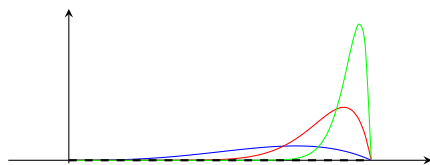


FIGURE 1.6 –  $f_n(x)$  pour  $n = 3, 10, 25$

**Corollaire 1.16** (Cvg. unif.  $\Rightarrow$  lim. integ.). *Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions **continues** sur  $I = [a, b]$ . Si la suite converge **uniformément** sur  $I$ , alors on a (1.1.9).*

*Démonstration.* Soit  $f$  la limite uniforme de  $f_n$  (continue par le Théorème 1.13), on a

$$\left| \int_a^b f_n(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 .$$

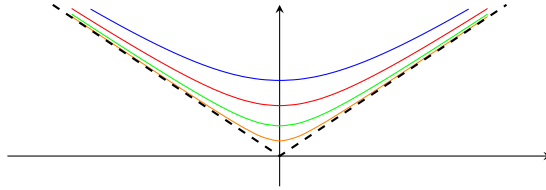
Ce qui conclut la preuve. □

**Préservation de la dérivabilité** On se demande quand est-ce qu'une suite de fonction dérivables converge vers une fonction dérivable, mais aussi s'il est possible d'échanger la limite et la dérivation

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n' , \quad (1.1.10a)$$

ou dit de manière plus explicite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) . \quad (1.1.10b)$$

FIGURE 1.7 –  $f_n(x)$  pour  $n = 2, 3, 5, 10$ 

**Exemple 1.17** ( $\mathcal{C}^1 + \text{cvg. unif.} \not\Rightarrow \text{lim. } \mathcal{C}^1$ ). Considérons la suite de fonctions définie sur  $I = [-1, 1]$  pour  $n \geq 1$

$$f_n(x) = \sqrt{n^{-2} + x^2} \quad \text{et} \quad f(x) = |x| .$$

La suite converge uniformément, mais la limite n'est pas dérivable.

**Théorème 1.18** ( $\mathcal{C}^1 + \text{dérivées cvg. unif.} + \text{cvg. simple en un point} \Rightarrow \text{lim. } \mathcal{C}^1$ ). Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions  $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{C})$  avec  $I = [a, b]$  telles que

$$f'_n \xrightarrow{u} g \quad \text{et} \quad \exists x_0 \in I : f_n(x_0) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} ,$$

alors il existe  $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{C})$  tel que

$$f'_n \xrightarrow{u} f' = g \quad \text{et} \quad f_n \xrightarrow{u} f .$$

En conséquence, on a bien (1.1.10).

*Démonstration.* Par le [Théorème fondamental de l'analyse](#), on a pour tout  $x \in I$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt ,$$

et en passant à la limite  $n \rightarrow \infty$  à  $x$  fixé, on a

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \ell + \int_{x_0}^x g(t) dt ,$$

ce qui est bien défini par le Corolaire 1.16 et car  $g$  est continue par le Théorème 1.13. On en déduit que  $g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$  est une primitive de  $f$  et donc que  $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{C})$  avec  $f' = g$  et  $f(x_0) = \ell$ .

Pour l'instant, on a établi que  $f$  est la limite simple de  $f_n$ , mais cette convergence est en fait uniforme :

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \right| \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt - \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \right| \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + \int_{x_0}^x \|f' - f'_n\|_{\infty} dt . \end{aligned}$$



Puisque  $|x - x_0| \leq b - a$ , on en déduit

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a) \|f' - f'_n\|_\infty$$

et comme ce majorant ne dépend pas de  $x$ , on en déduit

$$\|f - f_n\|_\infty \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a) \|f' - f'_n\|_\infty \rightarrow 0 ,$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

On peut généraliser par récurrence ce résultat à la préservation du caractère  $\mathcal{C}^r$  d'une suite de fonctions (**exercice**).

**Corollaire 1.19.** *Soit un entier  $r \geq 1$ , et  $(f_n)_n$  une suite de fonctions  $\mathcal{C}^r(I; \mathbb{C})$  avec  $I = [a, b]$  tels que pour certains  $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$*

$$f_n^{(r)} \xrightarrow{u} g \quad \text{et} \quad \forall s \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(s)}(x_s) \text{ existe ,}$$

*alors il existe  $f \in \mathcal{C}^r(I; \mathbb{C})$  tel que*

$$\forall s \in \llbracket 0, r \rrbracket, \quad f_n^{(s)} \xrightarrow{u} f^{(s)} .$$

**Remarque 1.20.** *Il est important que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(s)}(x_s)$  existe pour tout  $s \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ , autrement on pourrait considérer par exemple*

$$f_n(x) = f(x) + n p(x) \quad \text{où} \quad p \in \mathbb{R}_{r-1}[X] ,$$

*qui ne convergerait même pas simplement vers  $f$ .*

**Convergence uniforme avec des fonctions “simples”** On se demande si on peut approximer n'importe quelle fonction continue par une suite de fonctions “simples”, à savoir des polynômes ou des fonctions en escalier. Dans le premier cas, il s'agit d'une réciproque du Théorème 1.13, mais en se restreignant à des fonctions  $f_n$  polynomiales.

**Exemple 1.21** (Domaine non-borné  $\not\Rightarrow \exists$  approximation polynomiale). *Il n'existe aucune suite de fonctions polynomiales  $(f_n)_n$  telle que  $f_n \xrightarrow{u} \exp$  sur  $I = \mathbb{R}_+$ .*

*Indication : Croissances comparées.*

**Théorème 1.22** (Weierstrass – Domaine borné  $\Rightarrow \exists$  approximation polynomiale). *Soit  $I$  un segment et  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ . En définissant*

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) \quad \text{où} \quad b_{k,n}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

*on a que  $f_n \xrightarrow{u} f$  sur  $I$ .*

*Démonstration.* Puisque si  $I = [a, b]$ , on peut considérer à la place  $\tilde{f}(x) = f(a + (b - a)x)$  pour  $x \in [0, 1]$ . Il suffit donc de traiter le cas  $I = [0, 1]$ .

On souhaite estimer  $|f(x) - f_n(x)|$  uniformément en  $x \in [0, 1]$ . Puisque  $\sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = 1$ , on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) |f(x) - f(k/n)|.$$

Pour les valeurs de  $k$  telles que  $x \approx k/n$ , on a  $f(k/n) \approx f(x)$ , et donc le terme dans la somme est proche de 0. Les autres valeurs de  $k$  seront traitées avec l'estimation clé de l'Étape 1.

*Étape 1: Identité préliminaire.* En utilisant que pour tout entiers  $0 \leq a \leq b$  et  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$a \binom{b}{a} = \binom{b-1}{a-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = 1,$$

on peut montrer (**exercice**) les identités

$$\sum_{k=0}^n k b_{k,n}(x) = nx \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) b_{k,n}(x) = n(n-1)x^2,$$

dont on déduit la formule clé de cette preuve :

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{k,n}(x) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

*Étape 2: Estimation de convergence.* Puisque  $f$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$  ([Théorème de Heine](#)), pour tout  $\varepsilon > 0$  donné il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad (|x - y| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Pour chaque  $x \in [0, 1]$ , on distingue les indices  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket = A(x) \cup B(x)$  ainsi :

$$A(x) := \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket : |x - k/n| \leq \delta_\varepsilon\} \quad \text{et} \quad B(x) := \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket : |x - k/n| \geq \delta_\varepsilon\}.$$

De cette façon, on a

$$\sum_{k \in A(x)} b_{k,n}(x) |f(k/n) - f(x)| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) \leq \varepsilon,$$

et en utilisant que pour  $k \in B(x)$  on a  $1 \leq \delta_\varepsilon^{-2}(x - k/n)^2$ , l'estimation clé de l'Étape 1 implique

$$\sum_{k \in B(x)} b_{k,n}(x) |f(k/n) - f(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta_\varepsilon^2} \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) (x - k/n)^2 = \frac{\|f\|_\infty}{2\delta_\varepsilon^2 n}.$$

Puisque les majorants des deux sommes sont indépendants de  $x \in [0, 1]$ , on conclut

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2\delta_\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon .$$

Puisque  $\varepsilon$  est arbitraire, on en déduit (en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ , c'est-à-dire  $f_n \xrightarrow{u} f$ . Cela conclut la preuve.  $\square$

Le polynôme défini dans le Théorème de Weierstrass 1.22 porte aussi le nom de **Courbe de Bézier** et est utilisé dans les domaines de l'infographie ou l'industrie pour tracer des courbes définies par des “points de contrôles” (ici  $M_k^0 := (k/n, f(k/n))$  où  $0 \leq k \leq n$ ). Afin de construire  $f_n(x)$ , on construit récursivement pour chaque  $1 \leq \ell \leq n$  les points  $(M_k^\ell)_{k=0}^{n-\ell}$  par interpolation :

$$\forall 0 \leq k \leq n - \ell, \quad M_k^\ell(x) = (1 - x)M_k^{\ell-1}(x) + xM_{k+1}^{\ell-1}(x),$$

on obtient alors que  $f_n(x) = M_n^n(x)$ .

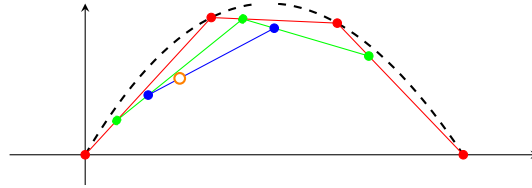


FIGURE 1.8 – Ici  $n = 3$  et  $x = 1/4$ . Le graphe de  $f$  est en pointillé. Les points remplis sont les points de contrôles  $M_k^\ell(x)$  et le point orange non-rempli correspond à  $(x, f_3(x))$ . La courbe définie par l'ensemble de ces derniers pour tout  $x$  est la *Courbe de Bézier* associée à ces points de contrôle.

**Théorème 1.23** (Uniformément continue  $\Rightarrow \exists$  approximation en escalier). *Soit  $f$  une fonction uniformément continue sur un intervalle ouvert  $I$  (pas forcément borné), pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction  $f_\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{C}$  constante par morceaux telle que  $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ .*

**N.B. :**  $f$  est uniformément continue par exemple si elle continue sur un segment  $I = [a, b]$  ou si elle est **Lipschitzienne**.

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ , puisque  $f$  est uniformément continue, il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall x, y \in I, \quad (|x - y| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon) .$$

On découpe  $I$  en segments délimités par  $(x_n)_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon}$  et de de taille  $\delta_\varepsilon$  au plus :

- Si  $I = ]-\infty, +\infty[$ , on pose  $x_n = n\delta_\varepsilon$  avec  $n \in \mathcal{N}_\varepsilon := \mathbb{Z}$ .
- Si  $I = ]-\infty, b[$ , on pose  $x_n = b + n\delta_\varepsilon$  avec  $n \in \mathcal{N}_\varepsilon := -\mathbb{N}$ .
- Si  $I = ]a, +\infty[$ , on pose  $x_n = a + n\delta_\varepsilon$  avec  $n \in \mathcal{N}_\varepsilon := \mathbb{N}$ .
- Si  $I = ]a, b[$ , on pose  $x_n = a + n\frac{b-a}{N_\varepsilon}$  avec  $n \in \mathcal{N}_\varepsilon = \llbracket 0, N_\varepsilon \rrbracket$  où  $N_\varepsilon \geq \frac{b-a}{\delta_\varepsilon}$ .

On définit alors  $f_\varepsilon$  par morceaux comme suit :

$$f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) \quad \text{si } x \in ]x_n, x_{n+1}[ ,$$

et pour tout  $x_n$  qui n'est pas au bord de  $I$ , on pose aussi  $f_\varepsilon(x_n) = f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)$ . Ainsi pour tout  $x \in [x_n, x_{n+1}]$  on a  $|f(x) - f(x_n)| \leq \varepsilon$  puisque  $|x - x_n| \leq \delta_\varepsilon$ , et donc pour tout  $x \in I$  on a  $|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ . Autrement dit,  $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

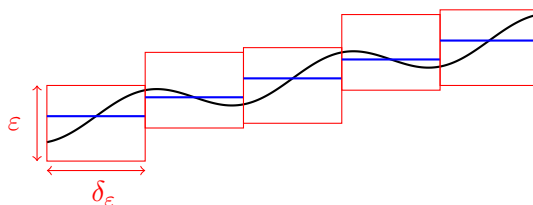


FIGURE 1.9 – En noir la fonction  $f$  et en bleu la fonction  $f_\varepsilon$ . Dire que  $f$  est uniformément continue signifie visuellement que, peu importe la petitesse de  $\varepsilon$ , on pourra trouver un rectangle de hauteur  $\varepsilon$  suffisamment étroit (de largeur  $\delta_\varepsilon$ ) tel qu'il soit possible de recouvrir le graphe de  $f$  par des copies de ce rectangle, sans que  $f$  ne s'en échappe par le haut ou le bas.

**Exercice 1.24.** À l'aide du Théorème 1.23 et en utilisant le fait que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  on a  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ , montrer que pour tout  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{C})$ , on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \quad \text{où} \quad \|f\|_p := \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

On admettra que  $\|\cdot\|_p$  satisfait l'inégalité triangulaire.

## 1.2 Séries de fonctions

Les séries de fonctions sont un cas particulier de suite de fonctions :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{où} \quad f_n = \sum_{k=0}^n u_k ,$$

et leur étude combine les techniques liées à celle des suites de fonctions et des séries numériques. Pour cette raison, on commence par un rappel sur ces dernières.

### 1.2.1 Rappel sur les séries numériques

Soit  $(u_n)_n$  une suite de nombres complexes, on dit que la série numérique  $\sum u_n$  **converge** lorsque

$$\exists U \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} U ,$$

ce qui revient à dire par le critère de Cauchy que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 : \left( \forall M \geq N \geq N_\varepsilon, \left| \sum_{n=N}^M u_n \right| \leq \varepsilon \right) .$$

On dit qu'elle **converge absolument** lorsque  $\sum |u_n|$  converge, ce qui revient à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 : \left( \forall M \geq N \geq N_\varepsilon, \sum_{n=N}^M |u_n| \leq \varepsilon \right) .$$

Contrairement aux somme finies, **l'ordre des termes est important** : par exemple, pour tout  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , il existe un réarrangement (bijection)  $\varphi_\ell : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi_\ell(n)} = \ell \quad \text{où} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} .$$

En général, ce résultat est vrai pour toute série  $\sum u_n$  **semi-convergente**, c'est-à-dire qui converge simplement mais pas absolument (*Théorème de réarrangement de Riemann*). Autrement dit :

$$\forall \varphi \text{ bijection de } \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \sum |u_n| < \infty ,$$

et si la série converge absolument, on peut même *sommer par paquets* : si  $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  avec  $A_n \cap A_k = \emptyset$  alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k \in A_n} u_k \right) .$$

Pour ces raisons, la notation utilisée pour une série est signifiante : si  $\sum u_n$  est semi-convergente, alors les notations

$$\sum_{n \geq 0} u_n \quad \text{et surtout} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

sont ambiguës car l'ordre de sommation n'est pas explicite, il est donc préférable de noter  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  dans ce cas, et de réserver les deux autres notations ci-dessus pour les séries absolument convergentes.

Rappelons à présent les principaux critères pour montrer la convergence d'une série.

**Critères pour des séries à termes positifs** Commençons par présenter des critères pour les séries à termes positifs, ce qui permet en particulier de prouver la **convergence absolue** d'une série.

Soient deux suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  de réels **strictement positifs** (pour simplifier). Le principe élémentaire de comparaison

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq C v_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{N-1} u_n + C \sum_{n=N}^{\infty} v_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

mène aux critères de comparaisons suivants :

- Si  $u_n \sim v_n$  alors  $\sum u_n < \infty \Leftrightarrow \sum v_n < \infty$ .
- Si  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  (en part. si  $u_n = o(v_n)$ ) alors  $\sum u_n < \infty \Leftarrow \sum v_n < \infty$ .

**Attention :** L'hypothèse que les suites à comparer soient positives est cruciale ; un contreexemple classique est la suite  $u_n = (-1)^n / \sqrt{n} \sim v_n = 1/n + (-1)^n \sqrt{n}$ , en effet  $\sum u_n$  converge (mais pas absolument) tandis que  $\sum v_n$  non.

L'exemple le plus simple de série dont on sait distinguer les cas de convergence/divergence est la série géométrique  $\sum q^n$  ; elle converge (vers  $\frac{1}{1-q}$ ) si et seulement si  $|q| < 1$ . En effet, rappelons à toutes fins utiles que pour  $q \neq 1$

$$(1-q) \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \sum_{n=0}^{N-1} (q^n - q^{n+1}) = 1 - q^N \quad \text{ainsi} \quad \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

En comparant à une série géométrique, on peut alors affirmer que  $\sum u_n$  converge dans les cas suivants :

- (**Règle de d'Alembert**) Si  $\limsup u_{n+1}/u_n < 1$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \leq q u_n$  pour un certain  $q \in ]0, 1[$  et  $n$  assez grand.
- (**Règle de Cauchy**) Si  $\limsup (u_n)^{1/n} < 1$ , c'est-à-dire  $u_n \leq q^n$  pour un certain  $q \in ]0, 1[$  et  $n$  assez grand.

Enfin, pour des séries de la forme  $u_n = f(n)$  avec  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  **décroissante**, le simple fait que  $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n)$  permet de comparer avec l'intégrale impropre  $\int_0^\infty f(x) dx$  :

$$(\text{Comp. série-intégrale}) \quad \int_0^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=0}^\infty f(n) \leq f(0) + \int_0^\infty f(x) dx.$$

Similairement, notant que  $\int_1^\infty = \sum \int_{2^n}^{2^{n+1}} f$  ainsi que  $2^{n+1} f(2^n) \leq \int_{2^n}^{2^{n+1}} f dx \leq 2^n f(2^n)$ , on peut montrer une version du **critère de condensation de Cauchy**. En étant plus malin, on peut le prouver dans une version plus satisfaisante :

$$(\text{Cond. de Cauchy}) \quad \sum_{n=1}^\infty f(n) \leq \sum_{n=0}^\infty 2^n f(2^n) \leq 2 \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

On peut comprendre ce critère, *en un sens*, en la version discrète du changement de variable  $x = 2^y$  qui donne  $\int f(x) dx = \int 2^y f(2^y) dy \times \log 2$ .

**Exemple 1.25.** La série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ , et  $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\alpha}(\log n)^{-\beta}$  converge si et seulement si  $(\alpha, \beta) \in ]1, \infty[ \times \mathbb{R} \cup \{1\} \times ]1, \infty[$ .

**Critères de type intégration par partie** Les séries peuvent être étudiées avec des intuitions venant de l'étude d'intégrales impropres, ce qui est possible grâce aux correspondances intuitives suivantes :

$$f(x) \longleftrightarrow u_n, \quad f'(x) \longleftrightarrow u_{n+1} - u_n, \quad \int_0^x f(t) dt \longleftrightarrow \sum_{k=0}^n u_k.$$

Par exemple, dire qu'une fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  admet une limite en  $+\infty$  revient à dire que l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} f' dt$  converge puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t) dt,$$

et de façon analogue, dire qu'une suite  $(u_n)_n$  converge revient à dire que la série télescopique associée converge :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k).$$

Une autre grande technique de calcul intégral admettant un analogue discret est l'*intégration par partie* :

$$\int_x^y f'(t)g(t)dt = f(y)g(y) - f(x)g(x) - \int_x^y f(t)g'(t)dt.$$

Cela permet de montrer que certaines intégrales convergent ; pour  $\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$  et  $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$  telles que

$$\int_0^\infty |\varepsilon'(t)|dt < \infty, \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, \quad B(x) = \int_0^x b(t)dt \text{ bornée},$$

on obtient par une intégration par partie

$$\int_0^x \varepsilon(t)B'(t)dt = \underbrace{\varepsilon(x)B(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0} - \int_0^x \varepsilon'(t)B(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} - \int_0^\infty \varepsilon'(t)B(t)dt, \quad (1.2.11)$$

où l'intégrale de droite converge *absolument* puisque  $B$  est borné.

**Exemple 1.26.**  $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$  converge, avec  $\varepsilon(x) = 1/x$  et  $b = \sin$  (donc  $B = -\cos$ ).

Dans le cas des sommes, en s'inspirant la preuve de l'intégration par partie, on considère l'identité suivante mimiquant la règle de dérivation  $f'g + fg' = (fg)'$  :

$$(u_{n+1} - u_n)v_n + u_{n+1}(v_{n+1} - v_n) = u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n,$$

ainsi, en sommant sur  $n \in \llbracket M, N-1 \rrbracket$ , on obtient par télescopage la *Formule de sommation par parties* (ou *Transformation d'Abel*) :

$$(SPP) \quad \sum_{n=M}^{N-1} (u_{n+1} - u_n)v_n + \sum_{n=M}^{N-1} u_{n+1}(v_{n+1} - v_n) = u_N v_N - u_M v_M .$$

On peut ainsi adapter la stratégie (1.2.11) afin d'établir plusieurs critères de convergence. Considérons deux suites  $(\varepsilon_n)_n$  et  $(b_n)_n$  telles que

$$\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq m \geq 0, \quad \left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq C ,$$

en particulier  $C = 1$  si  $b_n = (-1)^n$ . Alors la série  $\sum \varepsilon_n b_n$  converge dans les cas suivants :

— (Critère d'Abel) Si  $\sum |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n| < \infty$ , de plus

$$\forall n \geq 0, \quad \left| \sum_{k \geq n} \varepsilon_k b_k \right| \leq C \sum_{k \geq n} |\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k| .$$

— (Test de Dirichlet) Si  $(\varepsilon_n)_n$  est décroissante, de plus

$$\forall n \geq 0, \quad \left| \sum_{k \geq n} \varepsilon_k b_k \right| \leq C \varepsilon_n .$$

— (Séries alternée) Cas particulier du test de Dirichlet où  $b_n = (-1)^n$  et donc  $C = 1$ .

**Exemple 1.27.** La série  $\sum (-1)^n n^{-p}$  converge pour tout  $p > 0$ .

Cela conclut cette section de rappels sur les séries numériques.

### 1.2.2 Modes de convergence

**Définition 1.28.** Soit  $(u_n)_n$  une suite de fonctions  $u_n : I \rightarrow \mathbb{C}$  pour un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , et  $U_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$  la somme partielle. On définit les modes de convergence suivants :

(1). On dit que la série de fonctions  $\sum u_n$  **converge simplement sur  $I$**  si la suite de fonctions  $(U_n)_n$  converge simplement sur  $I$ , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = U(x) ,$$

pour une certaine fonction  $U : I \rightarrow \mathbb{C}$ .



- (2). On dit que la série de fonctions  $\sum u_n$  **converge uniformément sur  $I$**  si la suite de fonctions  $(U_n)_n$  converge uniformément sur  $I$ , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n u_k - U \right\|_{\infty} = 0 ,$$

pour une certaine fonction  $U : I \rightarrow \mathbb{C}$ .

Le prochain mode de convergence est spécifique aux séries de fonctions et est l'analogie de la convergence absolue, mais uniformément en  $x \in I$  :

- (3). On dit que la série de fonctions  $\sum u_n$  **converge normalement sur  $I$**  si la suite numérique  $\sum \|u_n\|_{\infty}$  converge.

**Comparaison des différents modes de convergence** La différence entre convergence simple ou uniforme n'est pas particulièrement plus profond que dans le cas des suites de fonctions, mais on peut néanmoins comparer leur formulation quantifiées en termes de critère de Cauchy :

- (1). La série  $\sum u_n$  converge simplement lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists N_{x,\varepsilon} \geq 0 : \left( \forall M \geq N \geq N_{x,\varepsilon}, \left| \sum_{n=N}^M u_n(x) \right| \leq \varepsilon \right) .$$

Ici, le rang  $N_{x,\varepsilon}$  dépend de  $x$  et  $\varepsilon$ .

- (2). La série  $\sum u_n$  converge uniformément lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \geq 0 : \left( \forall M \geq N \geq N_{\varepsilon}, \left\| \sum_{n=N}^M u_n \right\|_{\infty} \leq \varepsilon \right) .$$

Ici, le rang  $N_{\varepsilon}$  dépend seulement de  $\varepsilon$ .

- (3). La série  $\sum u_n$  converge normalement lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \geq 0 : \left( \forall M \geq N \geq N_{\varepsilon}, \sum_{n=N}^M \|u_n\|_{\infty} \leq \varepsilon \right) .$$

Ici, le rang dépend seulement de  $\varepsilon$  et la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  est à l'intérieur de la somme.

On sait déjà que la convergence uniforme implique la convergence simple d'après la section sur les suites de fonctions, la nouveauté ici est que la convergence normale implique la convergence uniforme puisque si  $\sum u_n$  converge normalement, alors par l'inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{n=0}^N u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 .$$

On a donc en conclusion

**cvg. normale  $\Rightarrow$  cvg. uniforme  $\Rightarrow$  cvg. simple.**

En pratique, pour montrer la convergence normale on utilisera les mêmes techniques que pour la convergence absolue de séries numériques appliquée à la série numérique  $\sum v_n$  avec  $v_n = \|u_n\|_\infty$ . Et comme pour les séries numériques, lorsque ce n'est pas possible, on pourra effectuer une sommation par partie pour tout  $x \in I$  afin d'utiliser un des critères adaptés (Critère d'Abel, Test de Dirichlet, Séries alternées) uniformément en  $x \in I$ . Voici deux résultats clé en main pour de telles situations :

**Théorème 1.29** (Critère d'Abel uniforme). *Soient  $(\varepsilon_n)_n, (b_n)_n$  deux suites de fonctions sur  $I$  telles que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\|_\infty < \infty, \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} 0, \quad \text{et} \quad \forall n \geq m \geq 0, \quad \left\| \sum_{k=m}^n b_k \right\|_\infty \leq C,$$

alors la série  $\sum \varepsilon_n b_n$  converge uniformément et on a

$$\forall n \geq 0, \quad \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k b_k \right\|_\infty \leq C \sum_{k=n}^{\infty} \|\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k\|_\infty.$$

**N.B. :** Si  $\|\sum_{k=0}^n b_k\|_\infty \leq M$  pour tout  $n \geq 0$ , on peut prendre  $C = 2M$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout  $M \geq 0$  la série  $\sum_{n=M}^{\infty} \varepsilon_n b_n$  converge uniformément ainsi que l'estimation

$$\left\| \sum_{n=M}^{\infty} \varepsilon_n b_n \right\|_\infty \leq C \sum_{n=M}^{\infty} \|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\|_\infty.$$

Soit  $M \geq 0$ , on pose pour tout  $n \geq M$

$$B_n := \sum_{k=M}^{n-1} b_k \quad \text{où} \quad B_M = 0 \quad \text{et} \quad \|B_n\|_\infty \leq C$$

afin d'appliquer la transformation d'Abel avec  $u_n = b_n = B_{n+1} - B_n$  et  $v_n = \varepsilon_n$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n=M}^{N-1} b_n \varepsilon_n &= \varepsilon_N B_N - \varepsilon_M B_M - \sum_{n=M}^{N-1} B_{n+1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \\ &= \varepsilon_N B_N - \sum_{n=M}^{N-1} B_{n+1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n). \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

La somme dans la dernière ligne converge normalement lorsque  $N \rightarrow \infty$  :

$$\sum_{n=M}^{N-1} \|B_{n+1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)\|_\infty \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\|_\infty < \infty,$$

ainsi la somme dans (1.2.12) converge uniformément lorsque  $N \rightarrow \infty$ , on déduit

$$\left\| \sum_{n=M}^{\infty} b_n \varepsilon_n \right\|_{\infty} \leq C \sum_{n=M}^{\infty} \|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\|_{\infty} ,$$

où le terme  $\varepsilon_N B_N$  a disparu puisque  $\varepsilon_N \xrightarrow{u} 0$  et  $B_N$  est borné.  $\square$

**Corollaire 1.30** (Test de Dirichlet uniforme). *Soient  $(\varepsilon_n)_n, (b_n)_n$  deux suites de fonctions sur  $I$  telles que*

$$\forall n \geq 0, \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} 0, \quad \text{et} \quad \forall n \geq m \geq 0, \quad \left\| \sum_{k=m}^n b_k \right\|_{\infty} \leq C ,$$

alors la série  $\sum \varepsilon_n b_n$  converge uniformément et on a

$$\forall n \geq 0, \quad \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k b_k \right\|_{\infty} \leq C \|\varepsilon_n\|_{\infty} .$$

**N.B.** : Si  $b_n = (-1)^n$ , on peut prendre  $C = 1$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que puisque  $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$ , on a par télescopage

$$\sum_{k=n}^{\infty} \|\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \right\|_{\infty} = \|\varepsilon_n\|_{\infty} .$$

$\square$

**Méthodologie pour prouver la convergence uniforme** Afin de montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions  $\sum u_n$  sur un ensemble  $I$ , on peut essayer d'appliquer les théorèmes impliquant la convergence uniforme du plus fort au plus faible :

- (1). Tenter de montrer la convergence normale sur  $I$ , c'est-à-dire  $\sum \|u_n\|_{\infty} < \infty$ .

**Ex.** :  $\sum \frac{e^{\cos(x)}}{n^2}$  où  $I = \mathbb{R}$ , ainsi  $\|u_n\|_{\infty} = \frac{e}{n^2}$ .

- (2). Si la convergence n'est pas normale, on tente d'appliquer les théorèmes issus de la sommation par partie : on cherche  $u_n = b_n \varepsilon_n$  où

$$\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} 0 \quad \text{et} \quad \forall N \geq 0, \quad \left\| \sum_{n=0}^N b_n \right\|_{\infty} \leq M .$$

**Ex.** :  $b_n = (-1)^n$  ou  $b_n = \cos(\omega n)$  avec  $\omega \notin 2\pi\mathbb{Z}$ .

- (a) On vérifie que  $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$  (en particulier  $\varepsilon_n \geq 0$ ).

**Ex.** :  $\sum (-1)^n \frac{e^{\cos(x)}}{n}$  où  $I = \mathbb{R}$ , ainsi  $b_n = (-1)^n$  et  $\varepsilon_n(x) = \frac{e^{\cos(x)}}{n}$  avec  $\|\varepsilon_n\|_{\infty} = \frac{e}{n}$ .

- (b) Si  $(\varepsilon_n)_n$  n'est pas décroissante, on vérifie que la série  $\sum (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$  converge normalement.

**Ex.** :  $\sum \left\{ (-1)^n e^{\cos(x)} \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k^2} \right\}$  où  $I = \mathbb{R}$ , ainsi  $\varepsilon_n = e^{\cos(x)} \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k^2}$  et  $b_n = (-1)^n$ .

On peut éventuellement avoir besoin de restreindre l'ensemble  $I$  à un sous-ensemble  $J$  pour pouvoir montrer que  $\varepsilon_n$  tend uniformément vers 0, ou que les sommes partielles de  $b_n$  sont bornées.

**Attention :** Si les fonctions sont continues et bornées, cela permet seulement de conclure que la série est continue sur l'union de tels  $J$  et bornée sur chaque  $J$ .

**Ex. :**  $\sum_{n \geq 0} \sqrt{x} e^{-nx}$  ne converge pas normalement sur  $[0, \infty[$  mais sur tout intervalle  $[\delta, \infty[$  avec  $\delta > 0$ , on peut donc seulement conclure qu'elle est continue sur  $]0, \infty[ = \cup_{\delta > 0} [\delta, \infty[$  et bornée sur chaque  $[\delta, \infty[$ . C'est optimal : cette série vaut 0 pour  $x = 0$  et  $\frac{\sqrt{x}}{1-e^{-x}} \sim_{0+} \frac{1}{\sqrt{x}}$  pour  $x > 0$ , elle est donc discontinue et explose en 0.

### 1.2.3 Transcription des résultats sur les suites de fonctions

Les résultats de la section sur les suites de fonctions s'appliquent immédiatement aux séries de fonctions. Énonçons les tout de même.

**Corollaire 1.31** ( $\mathcal{C}^0 + \text{cvg. unif.} \Rightarrow \text{lim. } \mathcal{C}^0$ ). Soit  $(u_n)_n$  une suite de fonctions **continues** sur  $I$ . Si la série  $\sum u_n$  converge **uniformément** vers  $U$  sur  $I$ , alors  $U$  est **continue** sur  $I$ .

**Corollaire 1.32** ( $\mathcal{C}^0 + \text{cvg. unif.} \Rightarrow \text{lim. integ.}$ ). Soit  $(u_n)_n$  une suite de fonctions **continues** sur  $I = [a, b]$ . Si la série  $\sum u_n$  converge **uniformément** sur  $I$ , alors

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx ,$$

en particulier, la série numérique de droite converge.

**Corollaire 1.33.** Soit un entier  $r \geq 1$ , et  $(u_n)_n$  une suite de fonctions  $\mathcal{C}^r(I; \mathbb{C})$  avec  $I = [a, b]$  tels que pour certains  $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$  et une certaine fonction  $V : I \rightarrow \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^N u_n^{(r)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{u} V \quad \text{et} \quad \forall s \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, \quad \sum u_n^{(s)}(x_s) \text{ converge simplement} ,$$

alors il existe  $U \in \mathcal{C}^r(I; \mathbb{C})$  tel que

$$\forall s \in \llbracket 0, r \rrbracket, \quad \sum_{n=0}^N u_n^{(s)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{u} U^{(s)} \quad \text{et} \quad U^{(r)} = V .$$

## Chapitre 2

# Séries entières

Le cas “le plus simple” de séries de fonctions  $\sum u_n$  est celui où chaque terme est un monôme ; c’est-à-dire  $u_n(x) = a_n x^n$ , ainsi la série de fonction s’apparente à un “polynôme infini”, qualifiée de **série entière**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R, \quad (0 < R \leq \infty).$$

Les polynômes ont l’avantage d’avoir une structure permettant plusieurs manipulations agréables, celles-ci restent valables pour les séries entières, notamment car elles convergent en un sens très fort (convergence normale localement).

On verra que dans ce cas, une telle fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et ses dérivées en 0 sont liées aux coefficients  $(a_n)_n$ , ce qui permet de réécrire la série entière comme un “développement de Taylor infini” :

$$f^{(n)}(0) = n! a_n, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!}.$$

Réciproquement, on verra sous quelles conditions une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  admet un tel développement, on la qualifiera d’**analytique**.

Dans ce chapitre, nous verrons le lien entre les caractères  $\mathcal{C}^\infty$  et analytique, ainsi que des formules pour calculer le rayon de convergence  $R$ .

### 2.1 Rayon de convergence

**Théorème 2.1** (Définition de rayon de convergence). *Soit  $(a_n)_n$  une suite de nombres complexes, on qualifie la série de fonctions  $\sum a_n z^n$  de **série entière**. Celle-ci converge pour tout complexe  $z$  dans le **disque de convergence***

$$\mathcal{D}(0; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\},$$

où le **rayon de convergence**  $R \in [0, \infty]$  est défini par

$$R := \sup \{0 \leq r < \infty : (a_n r^n)_n \text{ est bornée} \} .$$

Plus précisément, elle converge normalement sur tout disque fermé plus petit :

$$\overline{\mathcal{D}}(0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} \quad \text{avec} \quad r < R .$$

*Démonstration.* Observons tout d'abord que l'ensemble dont  $R$  est la borne supérieure est un intervalle contenant 0 :

$$I = \{0 \leq r < \infty : (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\} = [0, R[ \quad \text{ou} \quad [0, R] .$$

En effet, si  $r \in I$ , c'est-à-dire  $(a_n r^n)_n$  est bornée, alors  $(a_n \rho^n)_n$  aussi pour tout  $0 \leq \rho \leq r$  :

$$|a_n| \rho^n = |a_n| r^n \underbrace{(\rho/r)^n}_{\leq 1} \leq |a_n| r^n .$$

Soit  $r < R$ , montrons la convergence normale sur  $\overline{\mathcal{D}}(0; r)$ . Considérons

$$\rho \in ]r, R[ \quad \text{et} \quad C := \sup_{n \geq 0} |a_n| \rho^n < \infty \quad \text{car} \quad \rho \in I$$

on a ainsi le contrôle géométrique suivant en notant  $q := r/\rho \in ]0, 1[$  :

$$\|a_n(\cdot)^n\|_{\infty, \overline{\mathcal{D}}(0; r)} \leq |a_n| r^n \leq |a_n| \rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leq C q^n .$$

On en conclut que la série  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur  $\overline{\mathcal{D}}(0; r)$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

Le rayon de convergence indique pour quelles valeurs de  $z$  la série  $\sum a_n z^n$  est comparable à une série géométrique convergente, comme le montre l'exercice suivant.

**Exercice 2.2.** Montrer que si le rayon de convergence est non-nul, il peut également se caractériser ainsi :

$$\{r \geq 0 : \exists M > 0, q \in [0, 1[ \text{ tels que } |a_n r^n| \leq M q^n\} = [0, R[ .$$

Similairement aux séries numériques, on peut établir un critère de Cauchy ou de d'Alembert qui **donnent une formule pour le rayon de convergence**. Avant de les présenter, rappelons les notions de limite supérieures et inférieures, ainsi que leur lien avec les limites.

**Rappels sur les limites supérieures et inférieures** Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels, on définit sa **limite supérieure** et **limite inférieure**

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{u_k, k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{u_k, k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ces quantités **existent toujours (quitte à être infinies)** et vérifient les propriétés suivantes :

- (1). Si la suite n'est pas majorée,  $\limsup u_n = +\infty$ , et si elle n'est pas minorée  $\liminf u_n = -\infty$ .
- (2). La suite  $(u_n)_n$  admet une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$  si et seulement si  $\limsup u_n = \liminf u_n$ , dans ce cas

$$\lim u_n = \limsup u_n = \liminf u_n.$$

Elles correspondent respectivement à la plus grande et plus petite valeur d'adhérence (voir Figure 2.1), plus précisément :

- (3). Il existe des sous-suites  $(u_{\varphi(n)})_n$  et  $(u_{\psi(n)})_n$  convergentes dans  $\overline{\mathbb{R}}$  telles que

$$\lim u_{\varphi(n)} = \liminf u_n \quad \text{et} \quad \lim u_{\psi(n)} = \limsup u_n.$$

- (4). Pour toute sous-suite  $(u_{\varphi(n)})_n$  convergente dans  $\overline{\mathbb{R}}$  on a

$$\liminf u_n \leq \lim u_{\varphi(n)} \leq \limsup u_n.$$

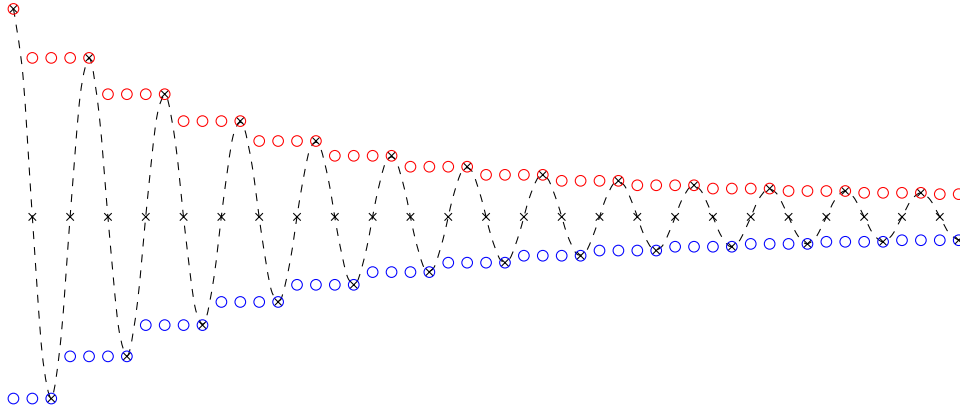


FIGURE 2.1 – Une suite  $(u_n)_n$  représentée par des croix noires, la suite  $(\sup\{u_k, k \geq n\})_n$  en cercles rouges, et la suite  $(\inf\{u_k, k \geq n\})_n$  en cercles bleus.

**Théorème 2.3** (Critère de Cauchy). *Soit  $(a_n)_n$  une suite de complexes, le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  satisfait*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} ,$$

où par convention  $1/0 = \infty$  et  $1/\infty = 0$ .

*Démonstration.* On se concentre sur le cas où la limite supérieure est non-nulle et finie, et on définit  $\mathcal{R} \in ]0, \infty[$  par

$$\frac{1}{\mathcal{R}} := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} .$$

Rappelons que

$$I = \{r \geq 0 : (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\} = [0, R] \quad \text{ou} \quad [0, R[ ,$$

ainsi, pour prouver  $R = \mathcal{R}$  il suffit de montrer que

$$0 < \mathcal{R}_- < \mathcal{R} < \mathcal{R}_+ \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{R}_- \in I \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_+ \notin I) .$$

*Étape 1: Montrons que  $\mathcal{R}_- \in I$ .* Puisque  $1/\mathcal{R} < 1/\mathcal{R}_-$ , par définition de la limite supérieure, il existe  $N \geq 0$  tel que pour tout  $n \geq N$

$$\sup \left\{ |a_k|^{1/k} , k \geq n \right\} \leq \frac{1}{\mathcal{R}_-} \quad \text{c'est-à-dire} \quad |a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{\mathcal{R}_-} ,$$

ou, écrit différemment

$$\forall n \geq N, \quad \mathcal{R}_-^n |a_n| \leq 1 ,$$

ainsi, on a bien  $\mathcal{R}_- \in I$ .

*Étape 2: Montrons que  $\mathcal{R}_+ \notin I$ .* Puisque  $1/\mathcal{R} > 1/\mathcal{R}_+$ , on a aussi  $1/\mathcal{R} > (1 + \varepsilon)/\mathcal{R}_+$  pour un  $\varepsilon > 0$  assez petit. Par définition de la limite supérieure, il existe  $N \geq 0$  assez grand tel que

$$\forall n \geq N , \quad \sup \left\{ |a_k|^{1/k} , k \geq n \right\} > \frac{1 + \varepsilon}{\mathcal{R}_+} .$$

Cela signifie que pour tout  $n \geq N$ , il existe un  $k(n) \geq n$  tel que

$$|a_{k(n)}|^{1/k(n)} \geq \frac{1 + \varepsilon}{\mathcal{R}_+} \quad \text{c'est-à-dire} \quad |a_{k(n)}| \mathcal{R}_+^{k(n)} \geq (1 + \varepsilon)^{k(n)} .$$

On en conclut que  $(a_n \mathcal{R}_+^n)_n$  n'est pas bornée puisque la sous-suite  $(a_{k(n)} \mathcal{R}_+^{k(n)})_n$  ne l'est pas, donc  $\mathcal{R}_+ \notin I$ . Cela conclut la preuve.  $\square$

**Corollaire 2.4** (Critère de d'Alembert). *Soit  $(a_n)_n$  une suite de complexes non-nuls telle que  $\left( \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_n$  converge dans  $[0, \infty]$ , alors le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  satisfait*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$



*Démonstration.* Sous ces hypothèses, on a (**exercice**)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

Cela permet de conclure.  $\square$

## 2.2 Développement en série entières

On se demande à présent pour quelles fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  la formule de “Taylor infinie” est satisfaite :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} .$$

Avant de répondre à cette question, il s’agit de vérifier qu’une fonction définie par une série entière est effectivement de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Théorème 2.5** (Série entière  $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$ ). *Considérons une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence non-nul. La fonction définie par  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$  et*

$$\forall k \geq 0, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}, \quad \text{en particulier} \quad f^{(n)}(0) = n! a_n ,$$

de plus, ces séries entières ont également pour rayon de convergence  $R$ .

*Démonstration.* Étant donné que pour tout  $k, n \geq 0$

$$\frac{d^k}{dx^k} (a_n x^n) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n, \end{cases}$$

par le Corolaire 1.31, il suffit de montrer que la série entière  $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$  a également pour rayon de convergence  $R$  car elle convergera donc normalement par le Théorème 2.1. En effet, on peut calculer son rayon de convergence par le critère de Cauchy :

$$\left( \frac{(n+k)!}{n!} |a_n| \right)^{1/n} = (n+1)^{1/n} (n+2)^{1/n} \dots (n+k)^{1/n} |a_n|^{1/n},$$

et, puisque pour tout  $i \geq 0$  fixé on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+i)^{1/n} = 1$ , on en déduit que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+k)!}{n!} |a_n| \right)^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} .$$

Cela conclut cette preuve.  $\square$

On se demande à présent dans quelle mesure la réciproque est vraie, c’est-à-dire quelles sont les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  que l’on peut écrire sous forme de série entière, ce que l’on appelle analytiques.

**Définition 2.6** (Fonctions analytiques). Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  pour un intervalle ouvert  $I$ . On dit que  $f$  est **analytique** (ou **développable en série entière**) en  $x_0 \in I$  s'il existe un rayon  $0 < r_0 \leq \infty$  tel que

$$\forall |x - x_0| < r_0, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

On dit que  $f$  est **analytique sur  $I$**  si elle est analytique en tout point de  $I$ .

**Exercice 2.7** (Analytique en  $x_0 \Rightarrow$  Analytique près de  $x_0$ ). En remarquant que, pour tout autre point  $|x_1 - x_0| < r_0$ , on a

$$f^{(k)}(x_1) = \sum_{n=k}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x_1 - x_0)^{n-k}}{(n-k)!}$$

et en utilisant le binôme de Newton, montrer que  $f$  est analytique en  $x_1$  et déterminer un rayon  $r_1 > 0$ .

Commençons par noter que les fonctions lisses ne sont pas toutes analytiques.

**Exemple 2.8** ( $C^\infty \not\Rightarrow$  Analytique). Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$ , cependant  $f^{(n)}(0) = 0$  pour tout  $n \geq 0$  (on dit qu'elle est **plate en 0**) et donc

$$\forall x > 0, \quad f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = 0.$$

En effet, on peut montrer que pour tout  $n \geq 0$ , on a  $f^{(n)}(x) = f(x)x^{-2n}P_n(x)$  où  $P_n$  est le polynôme défini par récurrence

$$P_{n+1}(x) = (1 - 2nx)P_n(x) + x^2P_n'(x) \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1,$$

et donc que  $f^{(n)}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et en particulier que  $f^{(n)}(0) = 0$  par croissances comparées.

**Théorème 2.9** (Dérivées =  $\mathcal{O}(A^n n!)$   $\Rightarrow$  Analytique). Soit  $f \in C^\infty(I; \mathbb{C})$  pour un intervalle ouvert  $I$  et satisfaisant pour certaines constantes  $C, A > 0$

$$\forall n \geq 0, \quad \|f^{(n)}\|_\infty \leq CA^n n!,$$

alors  $f$  est analytique sur  $I$  : pour tout  $x_0 \in I$  et  $r_0 := \min\{1/A, \text{dist}(x_0, I^c)\}$

$$\forall |x - x_0| < r_0, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

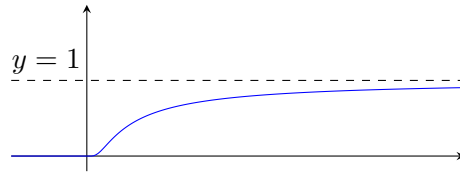


FIGURE 2.2 – Graphe de la fonction présentée dans l'Exemple 2.8.

*Démonstration.* Il s'agit d'une simple conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} + r_N(x-x_0),$$

où le reste satisfait  $|r_N(x)| \leq C|A(x-x_0)|^N$ , ainsi, en se restreignant à  $|x-x_0| < 1/A$ , le reste tend vers 0 à vitesse géométrique, ce qui permet de faire tendre  $N \rightarrow \infty$ . Cela conclut la preuve.

Notons que nous prenons  $r_0 = \min\{1/A, \text{dist}(x_0, I^c)\}$  et pas simplement  $r_0 = 1/A$  afin de s'assurer que  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subset I$ .  $\square$

**Exercice 2.10** (Réciproque locale du Théorème 2.9). En utilisant l'inégalité  $\binom{k}{n} \leq 2^k$ , montrer que si une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est analytique en un point  $x_0 \in I$  alors

$$\forall n \geq 0, \quad \|f^{(n)}\|_{\infty, J} \leq CA^n n!,$$

pour certains  $C, A > 0$  et  $J = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ . En déduire qu'une telle estimation existe sur tout segment  $[a, b] \subset I$ .

Pour finir, montrons que le produit de deux fonctions analytiques est lui aussi une fonction analytique.

**Théorème 2.11** (Produit de Cauchy). Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence non-nuls  $R_a$  et  $R_b$ , alors on a

$$\forall |z| < \min\{R_a, R_b\}, \quad \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

où la série entière de droite, appelée **produit de Cauchy**, a un rayon de convergence minoré par  $\min\{R_a, R_b\}$  et les coefficients sont donnés par la convolution de  $(a_n)$  et  $(b_n)$  :

$$c_n = (a * b)_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

*Démonstration.* Soit  $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ , puisque pour tout  $|z| < r < \min\{R_a, R_b\}$  on a que pour une certaine constante  $C > 0$

$$\forall n \geq 0, \quad |a_n| r^n \leq C, \quad |b_n| r^n \leq C,$$

et donc, en notant  $q := \frac{|z|}{r} \in ]0, 1[$ , on a que

$$\forall n \geq 0, \quad |a_n||z|^n \leq Cq^n, \quad |b_n||z|^n \leq Cq^n. \quad (2.2.1)$$

Considérons le produit des séries tronquées :

$$\left( \sum_{n=0}^N a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^N b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{2N} z^n \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ 0 \leq n_1, n_2 \leq N}} a_{n_1} b_{n_2}.$$

On sépare les puissances de  $z$  plus petites que  $N - 1$  des autres :

$$\left( \sum_{n=0}^N a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^N b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n z^n + \underbrace{\sum_{n=N}^{2N} z^n \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ 0 \leq n_1, n_2 \leq N}} a_{n_1} a_{n_2}}_{R_N(z)}. \quad (2.2.2)$$

Puisque les inégalités (2.2.1) donnent pour  $n_1 + n_2 = n$

$$|z^n a_{n_1} b_{n_2}| = |a_{n_1} z^{n_1}| |a_{n_2} z^{n_2}| \leq C^2 q^n,$$

et que la somme intérieure contient au plus  $n + 1$  termes, on en déduit

$$|R_N(z)| \leq C^2 \sum_{n=N}^{2N} (n+1) q^n.$$

Par croissances comparées, puisque  $0 < q < 1$ , il existe une constante  $M_q > 0$  telle qu'on ait  $(n+1)q^n \leq M_q q^{n/2}$  pour tout  $n \geq 0$ , d'où

$$|R_N(z)| \leq M_q C^2 \sum_{n=N}^{2N} q^{n/2} \leq C^2 M_q \frac{q^{N/2}}{1 - q^{1/2}},$$

ainsi, on peut faire tendre  $N \rightarrow \infty$  dans (2.2.2) pour conclure la preuve.  $\square$

**Exercice 2.12.** Soit  $f$  une fonction analytique en 0 et  $f(0) \neq 0$ , montrer que  $1/f$  est analytique en 0 et donner une borne inférieure de son rayon de convergence en 0.

## 2.3 L'exponentielle généralisée

On donne du sens en toute généralité à l'exponentielle définie sur un espaces vectoriel  $E$ ; on souhaite donner du sens à l'expression

$$\forall a \in E, \quad \exp(a) = e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Cela requiert, d'une part, de pouvoir multiplier des éléments d'un espace vectoriel pour bien définir  $a^n$ , et d'autre part, de pouvoir parler de convergence pour bien définir  $\sum_{n=0}^{\infty}$ . Un cadre adapté est celui des **algèbres de Banach**, c'est-à-dire un espace vectoriel  $E$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  et d'une multiplication tel que

- $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel complet : toute suite de Cauchy converge.
- $E$  est stable par multiplication : pour tout éléments  $a, b \in E$ , on a  $ab \in E$  et il existe un *élément neutre*  $1_E$  tel que pour tout  $a \in E$  on ait  $a1_E = 1_E a = a$ .
- La multiplication est sous-additive :  $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ .

Attention, **la multiplication n'est pas nécessairement commutative** : il est possible que  $ab \neq ba$ .

Même si il n'a pas été nommé dans les années précédentes de licence, ce concept n'est pas nouveau ; on connaît déjà plusieurs exemples d'algèbres de Banach :

- (1). Les nombres réels munis de  $\|x\| = |x|$ , l'élément neutre est 1.
- (2). Les nombres complexes munis de  $\|z\| = |z|$ , l'élément neutre est 1.
- (3). Les fonctions bornées sur un ensemble  $I \subset \mathbb{R}$  munies de  $\|f\| = \|f\|_\infty$ , l'élément neutre est la fonction constante égale à 1.

L'exemple suivant est probablement nouveau, et pour celui-ci la multiplication n'est pas commutative :

- (4). Les matrices carrées  $M_{d \times d}(\mathbb{K})$ , avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , munies de la norme

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = \sup_{\|y\|_* = 1} \|Ay\|_* ,$$

où  $\|\cdot\|_*$  est une norme quelconque sur  $\mathbb{C}^d$ , par exemple la norme euclidienne. La multiplication est le produit matriciel et l'élément neutre est la matrice identité.

Dans ce cours, **on pourra se limiter à un de ces exemples d'algèbre de Banach.**

**Définition 2.13.** Soit  $E$  une algèbre de Banach, on définit l'*exponentielle généralisée* sur  $E$  par la série entière

$$\forall a \in E , \quad \exp(a) = e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} .$$

Cette série entière a un rayon de convergence infini (même définition que pour  $E = \mathbb{C}$  en remplaçant le module  $|\cdot|$  par  $\|\cdot\|$ ). Par convention, on définit

$$\exp(0) = 1_E .$$

En général, il est faux que  $e^{a+b} = e^a e^b$ , cependant c'est le cas si  $ab = ba$ , et en particulier pour les scalaires :

$$E = \mathbb{K} , \quad \text{donc} \quad \forall z, w \in \mathbb{K} , \quad \exp(z + w) = \exp(z) \exp(w) ,$$

ou encore pour les multiples d'une même matrice  $A \in M_{d \times d}(\mathbb{K})$  :

$$E = M_{d \times d}(\mathbb{K}) , \quad \text{et} \quad \forall t, s \in \mathbb{R} , \quad \exp((t + s)A) = \exp(tA) \exp(sA) .$$

**Théorème 2.14.** Soit  $E$  une algèbre de Banach et  $a, b \in E$ , on a

$$ab = ba \quad \Rightarrow \quad \exp(a + b) = \exp(a) \exp(b) .$$

*Démonstration.* Notons dans cette preuve la série exponentielle tronquée par

$$E_N(z) = \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} .$$

Nous allons montrer que, puisque  $ab = ba$ , la formule du binôme permet d'écrire

$$E_N(a + b) = E_N(a)E_N(b) + R_N(a, b)$$

où le reste  $R_N$  tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow \infty$  par l'inégalité de Taylor.

*Étape 1: Réécriture de  $E_N(a + b)$  par la formule du binôme.* On commence par remarquer que puisque  $ab = ba$ , on peut utiliser la formule du binôme :

$$\frac{(a + b)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} .$$

On peut ainsi réécrire la série tronquée de l'exponentielle de  $a + b$  ainsi :

$$E_N(a + b) = \sum_{0 \leq k \leq n \leq N} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{0 \leq k \leq N} \frac{a^k}{k!} \sum_{k \leq n \leq N} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} .$$

En changeant de variable dans la somme intérieure pour  $m = n - k \in \llbracket 0, N - k \rrbracket$ , on obtient donc

$$E_N(a + b) = \sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!} \sum_{m=0}^{N-k} \frac{b^m}{m!} = E_N(a)E_N(b) + R_N(a, b) ,$$

où on a noté le reste

$$R_N(a, b) = - \sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!} \sum_{m=N-k+1}^N \frac{b^m}{m!} .$$

*Étape 2: Convergence par l'inégalité de Taylor.* Montrons que ce reste tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow \infty$  à l'aide de l'inégalité de Taylor :

$$\forall r \geq 0, \quad \sum_{n=M}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \leq \frac{r^M e^r}{M!} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 , \quad (2.3.3)$$

puisque à  $r \geq 0$  fixé on a bien  $\frac{r^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (**exercice**). Par l'inégalité triangulaire et la sous-additivité de la norme de  $E$ , on a

$$\|R_N(a, b)\| \leq \sum_{k=0}^N \frac{\|a\|^k}{k!} \sum_{m=N-k+1}^N \frac{\|b\|^m}{m!} .$$

On ne peut pas appliquer directement l'inégalité de Taylor (2.3.3) sur l'une de ces sommes, on découpe alors cette expression en deux doubles sommes ou au moins l'une des sommes démarre à un indice  $M \rightarrow \infty$  :

$$\|R_N(a, b)\| = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{\|a\|^k}{k!} \sum_{m=N-k+1}^N \frac{\|b\|^m}{m!} + \sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor+1}^N \frac{\|a\|^k}{k!} \sum_{m=N-k+1}^N \frac{\|b\|^m}{m!} .$$

Puisque  $N - \lfloor N/2 \rfloor \geq \lfloor N/2 \rfloor$  on a ainsi

$$\begin{aligned} \|R_N(a, b)\| &\leq \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{\|a\|^k}{k!} \sum_{m=\lfloor N/2 \rfloor}^N \frac{\|b\|^m}{m!} + \sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor}^N \frac{\|a\|^k}{k!} \sum_{m=0}^N \frac{\|b\|^m}{m!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|a\|^k}{k!} \sum_{m=\lfloor N/2 \rfloor}^{\infty} \frac{\|b\|^m}{m!} + \sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor}^{\infty} \frac{\|a\|^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|b\|^m}{m!} \\ &\leq \frac{e^{\|a\|+\|b\|} (\|b\|^{\lfloor N/2 \rfloor} + \|a\|^{\lfloor N/2 \rfloor})}{\lfloor N/2 \rfloor!} , \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Taylor (2.3.3) dans la dernière ligne. Cela permet de conclure la preuve puisque  $\lfloor N/2 \rfloor \rightarrow \infty$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 2.3.1 Exponentielle complexe et fonctions trigonométriques

Dans cette section, on définit les fonctions cos et sin à partir de la définition de l'exponentielle complexe comme série entière, et on montre leurs propriétés fondamentales.

L'exponentielle complexe est définie comme

$$\forall z \in \mathbb{C} , \quad e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

D'après le Théorème 2.14, en séparant la partie réelle et imaginaire de l'argument  $z = a+ib$ , on a

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} .$$

Notons que par linéarité et multiplicativité de  $z \mapsto \bar{z}$  on a

$$\overline{\exp(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\left( \frac{z^n}{n!} \right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z}) .$$

En particulier, par l'identité précédente, on a également

$$e^{i\theta} \overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^{(i-i)\theta} = e^0 = 1 ,$$

autrement dit, on a  $|e^{i\theta}| = 1$ .

**Les fonctions cosinus et sinus** On s'intéresse à la partie réelle et imaginaire de  $e^{i\theta}$ , que l'on appellera cos et sin :

$$\cos(\theta) := \Re(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) := \Im(e^{i\theta}) ,$$

ce qui permet de réécrire l'identité  $|e^{i\theta}| = 1$  sous la forme

$$1 = |e^{i\theta}|^2 = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 .$$

Puisque  $(i\theta)^{2n} = (-1)^n \theta^{2n}$  et  $(i\theta)^{2n+1} = i(-1)^n \theta^{2n+1}$ , on peut identifier la partie réelle et imaginaire de  $e^{i\theta}$  :

$$\Re(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \Im(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

En particulier, cos est paire et sin est impaire. D'autre part, puisque  $\frac{d}{d\theta}(e^{i\theta}) = ie^{i\theta}$ , ce qui implique

$$\cos'(\theta) + i \sin'(\theta) = i(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta) ,$$

et on en déduit les identités différentielles par identification :

$$\cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos .$$

**Définition de  $\pi$**  On souhaite définir  $\pi$  comme la première racine positive de sin, c'est-à-dire que l'on souhaite poser

$$\pi := \inf\{\omega > 0 : \sin(\omega) = 0\} > 0 .$$

Pour que cela soit possible, il faut montrer

- (1). que cet ensemble est minoré par une valeur  $\delta > 0$  (*i.e.* sin  $\neq 0$  sur  $]0, \delta[$ ),
- (2). que cet ensemble est non-vide (*i.e.* sin s'annule quelque part sur  $]0, +\infty[$ ).

Puisque  $\sin(\theta) \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \theta$ , on sait que  $\sin(\theta) > 0$  pour  $0 < \theta \leq \delta$  avec  $\delta > 0$  petit, ce qui vérifie le premier point. De plus, puisque la suite  $\left(\frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)_n$  est décroissante à partir de  $n \geq 6$ , le critère des séries alternées implique que

$$\sum_{n=0}^5 (-1)^n \frac{4^{2n}}{(2n)!} \approx 0,7 \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n=6}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n}}{(2n)!} \right| \leq 0,01 ,$$

et donc  $\sin(4) < 0$ , ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, sin s'annule sur  $[\delta, 4]$ , ce qui vérifie le second point.



**Périodicité du cosinus et du sinus** Puisque  $\sin > 0$  sur  $]0, \pi[$  et que  $\cos' = -\sin$ , on en déduit que  $\cos$  est strictement décroissante sur  $]0, \pi[$  et donc  $\cos(\pi) < \cos(0) = 1$  par continuité. Or, on a également

$$1 = \cos(\pi)^2 + \sin(\pi)^2 = \cos(\pi)^2 ,$$

donc  $\cos(\pi) = -1$ , c'est-à-dire  $e^{i\pi} = -1$  et donc  $e^{2i\pi} = (e^{i\pi})^2 = 1$ . On en déduit alors que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta} e^{i2\pi} = e^{i\theta} ,$$

ce qui implique la  $2\pi$ -périodicité de  $\cos$  et  $\sin$ .

### 2.3.2 Exponentielle de matrice

Considérons un système de  $d \geq 1$  équations différentielles linéaires à coefficients (complexes ou réels) constants avec  $d$  inconnues :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + \cdots + a_{1,d}x_d(t) + f_1(t) , \\ \vdots \\ x_d'(t) = a_{d,1}x_1(t) + \cdots + a_{d,d}x_d(t) + f_d(t) . \end{cases}$$

En définissant la matrice  $A$  ainsi que le vecteur inconnu  $X$  et source  $F$  comme

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d} , \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix} , \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_d(t) \end{pmatrix} ,$$

ce système se réécrit

$$X'(t) = AX(t) + F(t) .$$

En dimension  $d = 1$ , on sait résoudre l'équation

$$x'(t) = ax(t) + f(t) ,$$

dont la solution est donnée par la *formule de Duhamel*

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds .$$

Nous allons établir une formule similaire en dimension quelconque, ce qui requiert tout d'abord de donner du sens à  $e^{tA}$ .

**Théorème 2.15.** Soit  $A \in M_d(\mathbb{C})$  , le *semi-groupe*  $S(t) = e^{tA}$  *généré par*  $A$  *défini par*

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad S(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

satisfait les propriétés suivantes :

- (1). Pour tout  $s, t \in \mathbb{R}$ , on a  $S(s)S(t) = S(s+t)$ .
- (2).  $S(0) = I_d$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $S(t)^{-1} = S(-t)$ .
- (3).  $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; M_d(\mathbb{C}))$  et  $S^{(n)}(t) = A^n S(t)$ .

De plus, quelque soit  $F \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}; \mathbb{C}^d)$ , l'unique solution  $X \in \mathcal{C}^{r+1}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^d)$  de l'équation

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \ , \quad X(0) = X_0 \in \mathbb{C}^d$$

est donnée par la **formule de Duhamel** :

$$X(t) = S(t)X_0 + \int_0^t S(t-s)F(s)ds \ .$$

*Démonstration.* Commençons par établir (1)–(3), puis établissons la formule de Duhamel.

*Étape 1: Preuve de (1)–(3).* D'après le Théorème 2.14, on a (1), et par la définition de l'exponentielle généralisée, on a (2). Considérons à présent la série tronquée

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(tA)^n}{n!} \ ,$$

on a l'identité différentielle

$$S'_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{d}{dt} \left( \frac{t^n A^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{N-1} A \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} = AS_{N-1}(t) \ .$$

Puisque  $(S_N)_{N \geq 1}$  et donc  $(S'_N)_{N \geq 1}$  convergent uniformément sur tout compact  $[-T, T]$ , on peut passer à la limite par le Corollaire 1.33, ainsi

$$S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; M_d(\mathbb{C})) \quad \text{et} \quad S'(t) = AS(t) \ .$$

Par induction, on déduit (3).

*Étape 2: Preuve de la formule de Duhamel.* On compose à gauche par le facteur intégrant  $S(-t)$  afin d'avoir

$$S(-t)X'(t) = S(-t)AX(t) + S(-t)F(t) \ ,$$

ce qui se réécrit

$$S(-t)F(t) = S(-t)X'(t) - S(-t)AX(t) = (S(-t)X(t))' \ .$$

En intégrant cette égalité différentielle, on obtient puisque  $S(0) = I_d$

$$S(-t)X(t) = X(0) + \int_0^t S(-s)F(s)ds \ ,$$

et ainsi en composant à gauche par  $S(t)$ , en utilisant les identités

$$S(-t)S(t) = I_d \quad \text{et} \quad S(t)S(-s) = S(t-s) \ ,$$

on obtient la formule de Duhamel. Cela conclut la preuve.  $\square$

**Calcul du semi-groupe  $e^{tA}$  en pratique** Soient  $(\lambda_i)_{i=1}^S$  les valeurs propres de  $A$  et  $(m_i)_{i=1}^S$  leurs multiplicités algébriques. Considérons une décomposition de la forme

$$A = P(D + Q)P^{-1} \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_S I_{m_S} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

donnée, par exemple par la [décomposition de Schur](#) ou la [réduction de Jordan](#). Puisqu'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'identité  $(PMP^{-1})^n = PM^nP^{-1}$ , on en déduit

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} P \frac{t^n (D + Q)^n}{n!} P^{-1} = P e^{t(D+Q)} P^{-1}.$$

De plus, puisque  $DQ = QD$ , on peut réécrire  $e^{t(D+Q)}$  comme le produit de  $e^{tD}$  et  $e^{tQ}$  par le Théorème 2.14 :

$$e^{tA} = P e^{tQ} e^{tD} P^{-1} = P e^{tD} e^{tQ} P^{-1}.$$

Lorsque  $A$  est diagonalisable, on peut prendre  $Q = 0$ , ainsi

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_S} I_{m_S} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Lorsque  $A$  n'est que trigonalisable, on peut considérer  $Q$  donnée par la décomposition de Jordan :

$$Q = \begin{pmatrix} J_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_{m_S} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{C}).$$

Puisque  $J_m^n$  est constituée de 0 sauf sa  $n$ -ième surdiagonale remplies de 1, et que  $J_m^m = 0$

$$e^{tJ_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{t^n}{J_m^n} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} e^{tJ_{m_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_S} e^{tJ_{m_S}} \end{pmatrix} P^{-1}.$$



## Chapitre 3

# Séries de Fourier

Revenons à la question “quel choix de fonctions simples  $u_n$  pour une série de fonctions  $\sum u_n$ ?”. Dans le chapitre concernant les séries entières nous avons fait le choix  $u_n(x) = a_n x^n$  :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\cdot)^n \quad \text{où} \quad \frac{d^k}{dx^k} x^n = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} .$$

Cette somme convergeait pour la norme uniforme  $\|\cdot\|_{\infty}$  sur  $\{|x| \leq r\}$ , c'est-à-dire

$$\left\| f - \sum_{n=0}^N a_n (\cdot)^n \right\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Demander que  $f$  puisse s'écrire ainsi est très restrictif car  $f$  vérifie nécessairement beaucoup de propriétés très fortes (infiniment dérivable, zéros isolés *i.e.* pas constante sur des intervalles, ...). Un autre choix possible de fonction de bases est  $u_n(x) = a_n e_n(x)$  avec  $e_n(x) = e^{inx}$  :

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n \quad \text{où} \quad \frac{d^k}{dx^k} e^{inx} = (in)^k e_n(x)$$

La théorie moderne des séries de Fourier consiste à travailler dans un “espace Euclidien de dimension infini”, noté  $L^2$ , muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx ,$$

et de sa norme associée :

$$\|f\|_2 = (\langle f, f \rangle)^{1/2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} .$$

L'ensemble des fonctions  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormée, et comme en dimension finie, on peut décomposer n'importe quelle fonction  $f \in L^2$  dans cette base :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e_n , \quad \widehat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle ,$$

où la série converge, non pas ponctuellement ni uniformément (en général), mais au sens de la norme de cet espace :

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e_n \right\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

et l'inégalité de Pythagore s'écrit dans ce contexte

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 .$$

Les séries de Fourier permettent également de résoudre des équations aux dérivées partielles, telles que l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, x) , & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi] , \\ \theta(0, x) = \theta_0(x) , & x \in [-\pi, \pi] , \end{cases}$$

avec la même technique de diagonalisation qu'en dimension finie : puisque  $\frac{\partial}{\partial x^2} e_n = -n^2 e_n$ , la solution de l'équation de la chaleur est

$$\theta(t, \cdot) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \widehat{\theta}_0(n) e_n .$$

Enfin, grâce à l'identité  $e^{(k)} = (in)^k e_n$ , on a également  $f^{(k)}(n) = \left(\frac{n}{i}\right)^k \widehat{f}(n)$ , ce qui permet d'établir des résultats de la forme

*Plus  $\widehat{f}(n)$  tend rapidement vers 0, plus  $f$  est dérivable.*

Le point de vue moderne dans  $L^2$  relève de l'*analyse fonctionnelle* (programme de L3/M1). Bien qu'élégant car faisant le lien avec plusieurs branches des mathématiques, il ne s'est développé qu'au début du XXe siècle. À leur introduction au XIXe siècle (voire XVIIIe ou XVe pour leurs premières versions), les mathématiciens raisonnaient plutôt en terme de fonctions continues et dérivables et de convergence ponctuelle ou uniforme, et les premiers travaux sur les séries de Fourier portaient plutôt sur l'étude de leur convergence ponctuelle :

$$\text{Pour quels } f \text{ et quels } x \in \mathbb{R} \text{ a-t-on } f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} ?$$

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

- (1). Établir des conditions pour  $f$  et  $x$  afin que cette limite soit satisfaite.
- (2). Prouver le *théorème de Pythagore infini* (appelé *égalité de Parseval*).

Une application classique est de calculer la valeur exacte de certaines séries, par exemple en prenant  $f(x) = x$  sur  $[-\pi, \pi]$  on peut calculer

$$\widehat{f}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \widehat{f}(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n \neq 0) ,$$

ainsi, les deux objectifs de ce chapitre permettent respectivement de montrer

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \|f\|_2^2 = \frac{\pi^2}{3} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} .$$

**Notation :** On note  $\mathcal{C}_T^k$  l'espace des fonctions  $k$ -fois continument dérivables et  $T$ -périodiques, et  $\mathcal{C}_T^{k,pm}$  celles  $T$ -périodiques telles qu'il existe une subdivision  $(x_n)_{n=0}^N$  de  $[0, T]$  pour laquelle  $f \in \mathcal{C}^k([x_n, x_{n+1}[)$  et  $f^{(\ell)}(x_n^\pm)$  existe pour tout  $0 \leq \ell \leq k$  et  $0 \leq n \leq N$ .

La théorie de Fourier est une théorie fondamentalement basée sur l'intégration, qui se mesure en terme des normes suivantes dont on **admettra les propriétés**<sup>1</sup>.

**Définition 3.1.** Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$ , on définit les **normes de Lebesgue** par

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} , & 1 \leq p < \infty , \\ \max_{|x| \leq \pi} |f(x)| , & p = \infty . \end{cases}$$

Ces normes sont comparables entre elles

$$\forall 1 \leq p \leq q \leq \infty , \quad \|f\|_p \leq \|f\|_q ,$$

et satisfont les propriétés suivantes :

(1). (Homogénéité)  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$  où  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

(2). (Inégalité triangulaire)  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

En particulier, pour  $p = 2$ , la norme est associée à un produit scalaire :

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle , \quad \text{où} \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx .$$

**Remarque 3.2.** Ces normes ne sont pas exactement "adaptées" à l'espace  $\mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$ , notamment car  $\|f\|_1 = 0$  n'implique pas  $f = 0$ , par exemple la fonction  $f(x) = 1$  pour  $x \in 2\pi\mathbb{Z}$  et  $f(x) = 0$  autrement.

De même, plusieurs preuves de ce chapitre reposeront sur l'intégration par partie, il sera donc utile de pouvoir approximer une fonction seulement intégrable (ici continue par morceaux) par une fonction continument dérivable. **La preuve de ce résultat peut être omise en première lecture et est reléguée à la fin du chapitre en Section 3.3.**

**Lemme 3.3** (Densité des fonctions  $\mathcal{C}^1$ ). Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$  et  $p \in [1, \infty[$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_{2\pi}^1(\mathbb{R})$  telle que  $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$ . De plus,  $p = \infty$  est autorisé si  $f$  est continue.

1. Ces propriétés sont abordables au niveau L2, mais seront vues de manière plus complète en L3, on choisit donc de les admettre pour alléger ce cours.

### 3.1 Présentation des séries de Fourier

**Définition 3.4** (Coefficients et série de Fourier). *Considérons  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ .*

— *On définit ses **coefficients de Fourier (exponentiels)** par*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx ,$$

*et sa **série de Fourier (exponentielle)** associée est la série de fonctions*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx} dx .$$

— *On définit ses **coefficients de Fourier trigonométriques** pour  $n \geq 1$  par*

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx , \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx ,$$

*pour  $n = 0$  par*

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx ,$$

*et sa **série de Fourier trigonométrique** par*

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) .$$

*Ces deux familles de coefficients sont liées pour  $n \geq 1$  par les formules*

$$\widehat{f}(\pm n) = \frac{1}{2}(a_n \mp ib_n) , \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) , \\ b_n = i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n)) . \end{cases}$$

**Remarque 3.5.** *L'ordre de sommation d'une série de Fourier est crucial, pour cette raison on note  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$  au lieu de  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ , excepté lorsque la série converge normalement.*

Les séries de Fourier tronquées peuvent s'exprimer comme la convolution avec une fonction appelée *noyau de Dirichlet*, il permettra de réduire l'étude de la convergence d'une série de Fourier à l'étude de la convergence d'une intégrale. **La preuve de ce lemme est laissée en exercice.**

**Lemme 3.6.** *On définit pour  $N \geq 0$  les **noyaux de Dirichlet** et de **Féjer** donnés par*

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} ,$$

$$F_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n = \frac{1}{N} \left( \frac{\sin\left(\frac{N}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 .$$

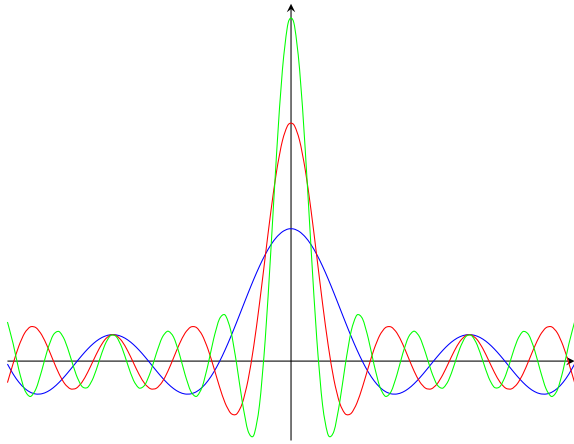


Ceux-ci sont pairs et normalisés : pour  $E = D, F$

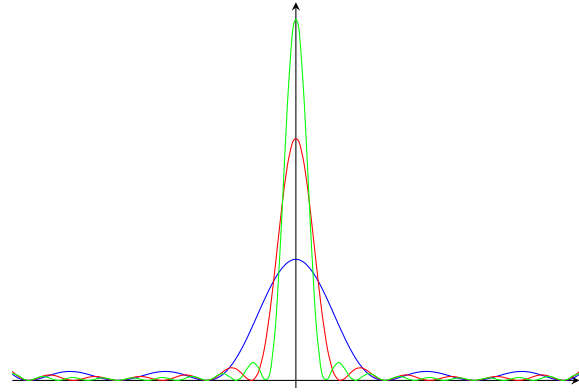
$$E_N(-x) = E_N(x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_N(x) dx = 1 ,$$

et le noyau de Dirichlet permet de réécrire les séries de Fourier tronquées ainsi :

$$\sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_N(y) dy .$$



(a)  $D_N(x)$  pour  $N = 2, 4, 6$



(b)  $F_N(x)$  pour  $N = 4, 8, 12$

Commençons cette section de présentation avec un résultat justifiant qu'une série de Fourier est bien une approximation de  $f$ .

**Proposition 3.7** (Consistance des séries de Fourier). *Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  tels que  $f$  soit continue en  $x_0$  et que sa série de Fourier converge en  $x_0$  :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx_0} = \ell \in \mathbb{R} ,$$

alors  $f$  et sa série de Fourier coïncident en  $x_0$ , c'est-à-dire  $\ell = f(x_0)$ .

*Démonstration.* Puisque la série de Fourier converge au sens usuel, elle converge aussi au

sens de Cesàro <sup>2</sup> :

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx_0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y) D_N(y) dy \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y) F_N(y) dy \\ &= f(x_0) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 - y) - f(x_0)) F_N(y) dy ,\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que l'intégrale de  $F_N$  vaut  $2\pi$ . Il reste donc à montrer que cette dernière limite vaut 0, pour cela on découpe l'intégrale en fonction d'un paramètre  $\delta > 0$  :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 - y) - f(x_0)) F_N(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} (f(x_0 - y) - f(x_0)) F_N(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq \delta} (f(x_0 - y) - f(x_0)) F_N(y) dy \\ &=: I_1(N; \delta) + I_2(N; \delta) ,\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la première ligne que l'intégrale de  $F_N$  valait  $2\pi$ . Pour la même raison, et car  $F_N \geq 0$ , on a aussi

$$\begin{aligned}|I_1(\delta; N)| &\leq \sup_{|z-x_0| \leq \delta} |f(z) - f(x_0)| \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq \delta} F_N(y) dy \\ &\leq \sup_{|z-x_0| \leq \delta} |f(z) - f(x_0)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y) dy \\ &\leq \sup_{|z-x_0| \leq \delta} |f(z) - f(x_0)| .\end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $\sin$  est croissante sur  $[\delta, \pi/2]$  et que  $\sin$  est bornée par 1 sur  $\mathbb{R}$ , on a également par la formule close (3.6) de  $F_N$

$$I_2(\delta; N) \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{N \sin(\delta/2)^2} .$$

En faisant d'abord tendre  $N \rightarrow \infty$  puis  $\delta \rightarrow 0$ , on obtient ainsi que  $\ell = f(x_0)$ .  $\square$

**Exercice 3.8.** En adaptant la preuve de la Proposition 3.7, montrer que si  $f$  est continue et  $2\pi$ -périodique alors

$$\frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_{N-1}(f)}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{u} f ,$$

où on a noté la série de Fourier partielle  $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx}$ .

2. Une série  $\sum a_n$  converge au sens de Cesàro si  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N A_n$  existe dans  $\mathbb{R}$ , où  $A_n = a_0 + \cdots + a_n$ .

Toute série convergente converge au sens de Cesàro, mais il existe des séries divergentes qui convergent au sens de Cesàro, par exemple  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1/2$  au sens de Cesàro.

Voyons à présent comment se traduit en terme de coefficients de Fourier la dérivation.

**Théorème 3.9** (Dérivée  $\leftrightarrow$  multiplication en fréquence). *Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{k,pm} \cap \mathcal{C}_{2\pi}^{k-1}$ , la dérivée dans l'espace physique correspond à la multiplication par  $n$  en fréquence :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n) .$$

En particulier, si  $f^{(k)}$  est continue en  $x_0$  et que la série ci-dessous converge, on a

$$f^{(k)}(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) (in)^k e^{inx_0} .$$

*Démonstration.* Il suffit de le montrer pour  $k = 1$  puis de conclure par récurrence. Considérons une subdivision adaptée à  $f'$  :

$$-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_M = \pi$$

de sorte à réécrire le  $n$ -ième coefficient de  $f'$  comme

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} f'(x) e^{-inx} dx .$$

Par intégration par partie, on a ainsi

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(n) &= \frac{in}{2\pi} \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x) e^{-inx} dx + [f(x) e^{-inx}]_{x=x_m^+}^{x=x_{m+1}^-} \right\} \\ &= \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in \widehat{f}(n) , \end{aligned}$$

où les termes de bord s'annulent car  $f$  et donc le terme entre crochet est  $2\pi$ -périodique et continu. Par récurrence, on a le résultat.  $\square$

**Corollaire 3.10** (Décroissance des coefficients de Fourier). *Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$ , les coefficients de Fourier tendent vers 0 (**lemme de Riemann-Lebesgue**) :*

$$\widehat{f}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0 ,$$

et si  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{k,pm} \cap \mathcal{C}_{2\pi}^{k-1}$  pour  $k \geq 1$ , on peut quantifier cette convergence :

$$\forall n \neq 0, \quad |\widehat{f}(n)| \leq n^{-k} \|f^{(k)}\|_1 .$$

*Démonstration.* Lorsque  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{k,pm} \cap \mathcal{C}_{2\pi}^{k-1}$ , on a par le Théorème 3.9 que  $\widehat{f}(n) = (in)^{-k} \widehat{f^{(k)}}(n)$  pour tout  $n \neq 0$ , ce qui implique l'inégalité du théorème. On en déduit le lemme de Riemann-Lebesgue par densité : par le Lemme 3.3 il existe  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de classe  $\mathcal{C}_{2\pi}^1$  telle que

$$\|f - f_\varepsilon\|_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 ,$$

ainsi, puisque  $|\widehat{\varphi}(n)| \leq \|\varphi\|_1$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$ , on a

$$|\widehat{f}(n)| \leq |\widehat{f_\varepsilon}(n)| + |(\widehat{f_\varepsilon - f})(n)| \leq |\widehat{f_\varepsilon}(n)| + \|f_\varepsilon - f\|_1 ,$$

ainsi, en faisant tendre d'abord  $n \rightarrow \pm\infty$  puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on conclut.  $\square$

**Corollaire 3.11.** *Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$  et tout  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  on a*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\alpha Nx + \beta) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\alpha Nx + \beta) dx = 0 .$$

### 3.2 Critères de convergence des séries de Fourier

Dans cette section, on établit plusieurs critères permettant de conclure à la convergence ponctuelle des séries de Fourier. Un premier résultat découle immédiatement du Corollaire 3.10 et de la Proposition 3.7.

**Corollaire 3.12** ( $\mathcal{C}_{2\pi}^{2,pm} \Rightarrow \text{cvg. normale}$ ). *Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{2,pm}$ , la série de Fourier de  $f$  converge normalement vers  $f$ .*

Ce résultat est très fort, mais l'hypothèse l'est tout autant, et on peut montrer la convergence ponctuelle, voire uniforme de la série de Fourier sous des hypothèses significativement plus faibles. On verra même en fin de section qu'être  $\mathcal{C}_{2\pi}^{1,pm}$  suffit pour la convergence normale.

**Théorème 3.13** (Dirichlet). *Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  un point pour lequel ces limites existent et sont finies :*

$$f(x_0^\pm) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0^\pm)}{x - x_0} = \tau^\pm ,$$

*c'est-à-dire que  $f$  admet, à droite et à gauche, une limite et une "dérivée", alors la série de Fourier converge en  $x_0$  vers  $\frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-))$ .*

**N.B. :** *En particulier, si  $f$  est continue en  $x_0$  (i.e.  $f(x_0^\pm) = f(x_0)$ ) et admet des dérivées à gauche et à droite, alors la série de Fourier en  $x_0$  converge vers  $f(x_0)$ .*

*Démonstration.* On part de l'écriture des séries de Fourier en terme du noyau de Dirichlet :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx_0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x_0 - y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(y) (f(x_0 - y) + f(x_0 + y)) dy \\ &= \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} + R_N(x_0) , \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que l'intégrale de  $D_N$  vaut  $\pi$  sur  $[0, \pi]$  et on a défini le reste

$$R_N(x_0) := \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_N(y) r(y) dy$$

en terme de la la fonction paire

$$\forall y \in [-\pi, \pi], \quad r(y) := f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - f(x_0^+) - f(x_0^-) .$$

Définissons à présent la fonction impaire

$$\rho(y) := \begin{cases} \frac{r(y)}{2 \sin(y/2)} = \frac{f(x_0 + y) - f(x_0^+)}{2 \sin(y/2)} + \frac{f(x_0 - y) - f(x_0^-)}{2 \sin(y/2)}, & y \neq 0, \\ \text{valeur quelconque}, & y = 0. \end{cases}$$

Puisque  $\sin(y) \stackrel{y \rightarrow 0}{\sim} y$ , l'hypothèse faite sur les taux d'accroissements de  $f$  en  $x_0$  implique que  $\rho$  est continue par morceaux :

$$\rho(0^\pm) = \pm \frac{1}{2} (\tau^+ + \tau^-) ,$$

ainsi, par le lemme de Riemann-Lebesgue sous la forme du Corolaire 3.11

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_N(y) r(y) dy &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(y) r(|y|) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \sin \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) y \right) \rho(y) dy \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 , \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

En raffinant cette stratégie, on peut montrer que si la fonction est continument dérivable alors la convergence est uniforme.

**Théorème 3.14** ( $\mathcal{C}^1 \Rightarrow \text{cvg. unif.}$ ). *Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ , la série de Fourier associée à  $f$  converge uniformément vers  $f$ .*

*Démonstration.* Puisque les hypothèses actuelles impliquent que  $f(x_0^\pm) = f(x_0)$ , en reprenant les notations de la preuve du théorème de Dirichlet, on a

$$\sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx_0} = f(x_0) + R_N(x_0) ,$$

où le reste s'écrit cette fois

$$R_N(x_0) = \int_0^\pi D_N(y) r_{x_0}(y) dy , \quad r_{x_0}(y) := f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - 2f(x_0) .$$

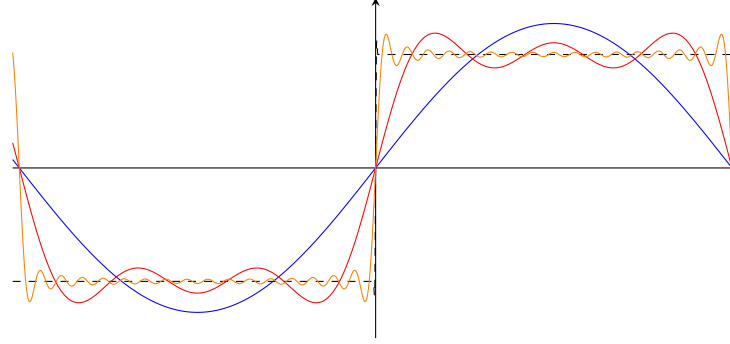


FIGURE 3.2 – En pointillé la fonction  $f(x) = -1$  pour  $x < 0$  et  $f(x) = 1$  pour  $x > 0$ , dont la série de Fourier est  $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$ . En bleu la somme partielle d'ordre 1, en rouge celle d'ordre 5, en orange celle d'ordre 33. Quelque soit la valeur de  $f$  en 0, la série de Fourier converge vers  $\frac{1}{2} (f(0^+) + f(0^-)) = 0$ .

Découpons le reste proche et loin de 0 :

$$\begin{aligned} R_N(x_0) &= \int_0^{\delta} \sin\left(Ny + \frac{y}{2}\right) \frac{r_{x_0}(y)}{\sin(y/2)} dy + \int_{\delta}^{\pi} \sin\left(Ny + \frac{y}{2}\right) \frac{r_{x_0}(y)}{\sin(y/2)} dy \\ &=: R_{N,\delta}(x_0) + R_{N,\delta}^c(x_0) . \end{aligned}$$

*Étape 1: Estimation loin de 0.* D'une part, on montre facilement que pour tout  $\delta > 0$

$$\sup_{\delta \leq |y| \leq \pi} \left| \left( \frac{r_{x_0}(y)}{\sin(y/2)} \right)' \right| \leq \frac{\|f'\|_{\infty}}{\sin(\delta/2)} + \frac{\|f\|_{\infty}}{2 \sin(\delta/2)^2} = M(\delta) ,$$

d'autre part, une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} R_{\delta,N}^c(x_0) dy &= \int_{\delta}^{\pi} \sin\left(Ny + \frac{y}{2}\right) \frac{r_{x_0}(y)}{\sin(y/2)} dy \\ &= -\frac{1}{N + \frac{1}{2}} \int_{\delta}^{\pi} \left[ \cos\left(Ny + \frac{y}{2}\right) \right]' \frac{r_{x_0}(y)}{\sin(y/2)} dy \\ &= \frac{1}{N + \frac{1}{2}} \int_{\delta}^{\pi} \cos\left(Ny + \frac{y}{2}\right) \left( \frac{r_{x_0}(y)}{\sin(y/2)} \right)' dy , \end{aligned}$$

ainsi on a  $\|R_{N,\delta}^c\|_{\infty} \leq \frac{M(\delta)}{N + \frac{1}{2}}$ .

*Étape 2: Estimation proche de 0.* La fonction  $\frac{r_{x_0}(y)}{\sin(y/2)}$  se réécrit par Taylor

$$\frac{r_{x_0}(y)}{\sin(y/2)} = \frac{y}{\sin(y/2)} \int_0^1 (f'(x_0 + \theta y) - f'(x_0 - \theta y)) d\theta ,$$

ainsi, par continuité uniforme de  $f'$  et le fait que  $\frac{y}{\sin(y/2)} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 2$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}, |y| \leq \delta_\varepsilon} \left| \frac{r_{x_0}(y)}{\sin(y/2)} \right| \leq \varepsilon ,$$

et en conséquence, puisque  $|\sin(Ny + \frac{y}{2})| \leq 1$ , on en déduit  $\|R_{N,\delta_\varepsilon}\|_\infty \leq \varepsilon$ .

*Étape 3: Conclusion.* En combinant les estimations des deux étapes précédentes, on a alors pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\|R_N\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{M(\delta_\varepsilon)}{N + \frac{1}{2}} ,$$

ainsi en faisant tendre  $N \rightarrow \infty$ , puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a bien  $\|R_N\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

Le cadre moderne  $L^2$  est probablement le plus naturel car la série de Fourier converge en toute généralité dans  $L^2$ , mais également car il permet d'interpréter la transformée de Fourier de façon "géométrique" :  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormale et la transformée de Fourier  $f \mapsto \hat{f}$  est une isométrie.

**Lemme 3.15.** *La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthonormale pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .*

La preuve est immédiate et **laissée en exercice**.

**Théorème 3.16** ( $\mathcal{C}^{0,pm} \Rightarrow \text{cvg. } L^2$ ). *Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$ , sa série de Fourier converge dans  $L^2$  :*

$$\left\| \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e_n - f \right\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 ,$$

en particulier, on a l'égalité de Parseval :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2) .$$

*Démonstration.* Notons dans cette preuve la série de Fourier partielle pour tout  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$

$$S_N(f) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n)e_n = \sum_{|n| \leq N} \langle f, e_n \rangle e_n ,$$

et remarquons que, puisque  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -orthonormale par le Lemme 3.15,  $S_N$  est donc la projection orthogonale de  $\mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$  sur  $\text{Vect}(e_n, |n| \leq N)$ , on a

$$\|S_N(f)\|_2^2 = \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}(n)|^2 \quad \text{et} \quad \|f\|_2^2 = \|S_N(f)\|_2^2 + \|f - S_N(f)\|_2^2 . \quad (3.2.1)$$

Il suffit ainsi de montrer que, lorsque  $N \rightarrow \infty$ , la série de Fourier partielle  $S_N(f)$  converge vers  $f$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ . Nous allons d'abord le prouver pour des fonctions  $\mathcal{C}_{2\pi}^1$  puis conclure par densité.

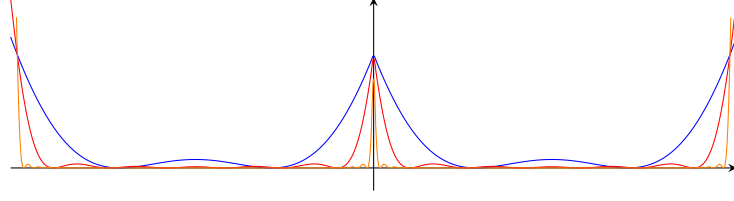


FIGURE 3.3 – Pour la fonction  $f(x) = -1$  pour  $x < 0$  et  $f(x) = 1$  pour  $x > 0$ , on a tracé les graphes de  $|S_1(f) - f|^2$  en bleu,  $|S_5(f) - f|^2$  en rouge, et  $|S_{33}(f) - f|^2$  en orange. On voit que l'erreur ne tend pas uniformément vers 0 (sinon  $f$  serait continue), mais pour la norme  $L^2$ .

*Étape 1: Cas continuement dérivable.* Lorsque  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ , on a que  $S_N(f)$  tend uniformément vers  $f$  par le Théorème 3.14, d'où

$$\|S_N(f) - f\|_2 \leq \|S_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

On a donc bien vérifié l'égalité de Parseval dans le cas  $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ .

*Étape 2: Cas des fonctions continues par morceaux.* Commençons par souligner que (3.2.1) implique

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}, \quad \|S_N(f)\|_2 \leq \|f\|_2. \quad (3.2.2)$$

Considérons  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$  et  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une famille approchant  $f$  comme à l'Étape 2, on a par (3.2.2)

$$\begin{aligned} \|S_N(f) - f\|_2 &\leq \|S_N(f - f_\varepsilon)\|_2 + \|S_N(f_\varepsilon) - f_\varepsilon\|_2 + \|f_\varepsilon - f\|_2 \\ &\leq \|S_N(f_\varepsilon) - f_\varepsilon\|_2 + 2\|f_\varepsilon - f\|_2, \end{aligned}$$

et en conséquence, par l'Étape 1

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 \leq 2\|f_\varepsilon - f\|_2.$$

On conclut la preuve en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

On peut à présent renforcer les premiers résultats de convergence normale et uniforme.

**Corollaire 3.17.** Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{1,pm} \cap \mathcal{C}_{2\pi}^0$ , sa série de Fourier converge normalement vers  $f$ .

*Démonstration.* On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^{2N}$

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \leq N} \|\widehat{f}(n)e_n\|_\infty &= \sum_{|n| \leq N} |\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n} |n\widehat{f}(n)| \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \left( \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{1 \leq |n| \leq N} |n\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$



Les deux sommes correspondent à des séries convergentes, ainsi en passant à la limite, on a par le Théorème 3.9 et l'égalité de Parseval

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq |\widehat{f}(0)| + \left( 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \|f'\|_2 .$$

Cela conclut la preuve.  $\square$

Régularité supplémentaire de $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$	Mode de convergence
$\mathcal{C}_{2\pi}^0 \cap \mathcal{C}_{2\pi}^{1,pm}$	Normale
Les morceaux de $f$ à g./d. de $x_0$ sont cont./dér. en $x_0$	Simple vers $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$
Aucune	$\ \cdot\ _2$

FIGURE 3.4 – Tableau récapitulatif des modes de convergence de  $\sum \widehat{f}(n)e^{inx}$  vers  $f(x)$  en fonction de la régularité de  $f$  qui est au moins  $\mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$ .

### 3.3 Preuve du Lemme de densité

Montrons à présent le Lemme 3.3. On commence par construire la fonction  $f^\varepsilon$  puis on montre qu'elle est à une petite distance de  $f$ .

*Étape 1: Construction de  $f^\varepsilon$ .* En appliquant le Théorème 1.23 sur chaque sous-intervalle de  $[-\pi, \pi]$  sur lequel  $f$  est continue, on obtient une fonction  $\widetilde{f}^\varepsilon : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  constante par morceaux telle que

$$\|f - \widetilde{f}^\varepsilon\|_{\infty, [-\pi, \pi]} \leq \varepsilon .$$

On prolonge  $\widetilde{f}^\varepsilon$  à tout  $\mathbb{R}$  par périodicité, et on considère une subdivision adaptée

$$\dots < \widetilde{x}_{i-1} < \widetilde{x}_i < \widetilde{x}_{i+1} < \dots$$

c'est-à-dire telle que  $\widetilde{f}^\varepsilon$  soit constante égale à  $\widetilde{y}_i$  sur chaque  $]\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}[$ . Il ne reste plus qu'à lisser les jonctions entre deux intervalles (voir Figure 3.5) : soit  $0 < \delta < \frac{1}{2} \min_i |x_{i+1} - x_i|$ , si  $|x - x_i| \leq \delta$  pour un (unique)  $i$ , on pose

$$f^\varepsilon(x_i + h) = \widetilde{y}_{i-1} + \sigma\left(\frac{h}{\delta}\right) (\widetilde{y}_i - \widetilde{y}_{i-1}) , \quad \sigma(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right) ,$$

autrement, on pose  $f^\varepsilon(x) = \widetilde{f}^\varepsilon(x)$ , ce qui donne effectivement un fonction périodique de classe  $\mathcal{C}^1$  (**exercice**).

Étape 2: Preuve que  $f^\varepsilon$  est proche de  $f$ . Par l'inégalité triangulaire pour  $\|\cdot\|_p$ , on a

$$\|f - f^\varepsilon\|_{p,[-\pi,\pi]} \leq \|f - \tilde{f}^\varepsilon\|_{p,[-\pi,\pi]} + \|\tilde{f}^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{p,[-\pi,\pi]} .$$

D'une part, le premier terme satisfait

$$\|f - \tilde{f}^\varepsilon\|_{p,[-\pi,\pi]} \leq \|f - \tilde{f}^\varepsilon\|_{\infty,[-\pi,\pi]} \leq \varepsilon .$$

D'autre part, en considérant  $M \leq N$  tels que  $\tilde{x}_N = \pi$  et  $\tilde{x}_M = -\pi$ , le second terme satisfait

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{p,[-\pi,\pi]} &= \sum_{n=N}^{M-1} \left( \|\tilde{f}^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{p,[\tilde{x}_n, \tilde{x}_n+\delta]} + \|\tilde{f}^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{p,[\tilde{x}_{n+1}-\delta, \tilde{x}_{n+1}]} \right) \\ &\leq \|\sigma(\cdot/\delta)\|_{p,[-\delta,\delta]} \sum_{n=N}^{M-1} |\tilde{y}_{i-1} - \tilde{y}_i| \\ &\leq 4(M-N)\|\tilde{f}\|_{\infty,[-\pi,\pi]} \delta^{1/p} . \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\tilde{f}^\varepsilon \neq 0$ , en supposant de plus  $\delta \leq \left( \frac{\varepsilon}{4\|\tilde{f}\|_{\infty,[-\pi,\pi]}(M-N)} \right)^p$ , on obtient

$$\|\tilde{f}^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{p,[-\pi,\pi]} \leq 2\varepsilon ,$$

ce qui permet de conclure. Notons que dans le cas  $p = \infty$ , il suffit de modifier l'estimation du second terme comme

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{\infty,[-\pi,\pi]} &= \max_{N \leq n \leq M-1} \left( \|\tilde{f}^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{\infty,[\tilde{x}_n, \tilde{x}_n+\delta]} + \|\tilde{f}^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{\infty,[\tilde{x}_{n+1}-\delta, \tilde{x}_{n+1}]} \right) \\ &\leq 2\|\sigma(\cdot/\delta)\|_{\infty,[-\delta,\delta]} \max_{N \leq n \leq M-1} |\tilde{y}_{i-1} - \tilde{y}_i| \\ &\leq 2 \max_{N \leq n \leq M-1} |\tilde{y}_{i-1} - \tilde{y}_i| , \end{aligned}$$

cependant on a aussi

$$\begin{aligned} |\tilde{y}_{i-1} - \tilde{y}_i| &= \left| \tilde{f}^\varepsilon(\tilde{x}_{i-1} - \delta/2) - \tilde{f}^\varepsilon(\tilde{x}_{i-1} + \delta/2) \right| \\ &\leq \left| \tilde{f}^\varepsilon(\tilde{x}_{i-1} - \delta/2) - f(\tilde{x}_{i-1} - \delta/2) \right| + |f(\tilde{x}_{i-1} - \delta/2) - f(\tilde{x}_{i-1} + \delta/2)| \\ &\quad + \left| f(\tilde{x}_{i-1} + \delta/2) - \tilde{f}^\varepsilon(\tilde{x}_{i-1} + \delta/2) \right| \\ &\leq 2\|f - \tilde{f}^\varepsilon\|_{\infty,[-\pi,\pi]} + \sup_{|x-x'| \leq \delta} |f(x) - f(x')| . \end{aligned}$$

Puisque  $f$  est continue et donc uniformément continue car périodique, on peut prendre  $\delta$  assez petit de sorte à ce que le second terme soit borné par  $\varepsilon$ , ainsi  $\|\tilde{f}^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{\infty,[-\pi,\pi]} \leq 6\varepsilon$ .

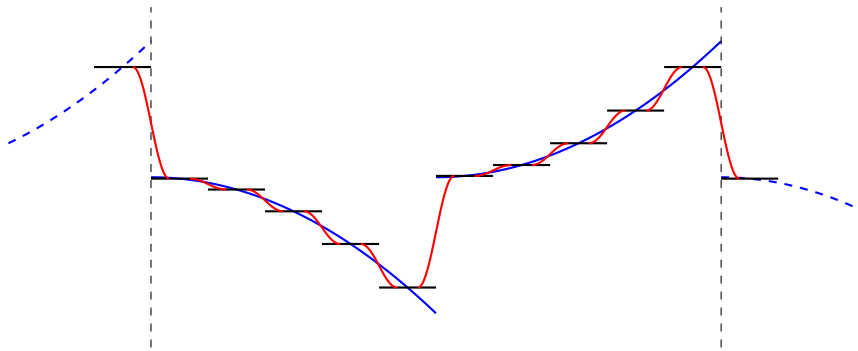


FIGURE 3.5 – En bleu la fonction  $f$  à approximer, en noir la fonction  $\tilde{f}^\varepsilon$  constante par morceaux, et en rouge les jonctions sinusoïdales de largeurs  $2\delta$ .