

L'examen est noté sur 17,75, les notes sont augmentées de 47% de sorte à être noté sur  $\approx 26$ pt ( $\geq 20$  et pour prendre en compte la longueur du sujet).

Questions de cours (5,25pt)

- (1pt) Donner la **définition** du rayon de convergence  $R$  d'une série entière  $\sum a_n z^n$  et énoncer la règle de d'Alembert.

Le rayon de convergence est **défini**<sup>1</sup> comme

$$R := \sup \{ r \geq 0 : (a_n r^n)_n \text{ est borné} \} ,$$

et la règle de d'Alembert dit que  $R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  **si cette limite existe**.

- (1,5pt) Énoncer le théorème de Weierstrass pour l'approximation d'une fonction continue et donner (en justifiant) un contre-exemple pour l'approximation sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f \in C^0(I; \mathbb{C})$  avec  $I$  un **segment**, il existe une suite  $(P_n)_n$  de fonctions **polynomiales** qui convergent **uniformément** vers  $f$  sur  $I$ . La fonction  $\exp$  ne peut pas être approximée sur  $\mathbb{R}$  car  $\|\exp - P\|_\infty = \infty$  par les croissances comparées, **quelque soit** le polynôme  $P$ .

- (1,5pt) Donner la définition **avec des quantificateurs (et sans  $\|\cdot\|_\infty$ )** de la convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  vers une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Quelle est la différence entre ces deux définitions ?

Convergence simple :  $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{x,\varepsilon} \geq 0 : \forall n \geq N_{x,\varepsilon}, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

Convergence uniforme :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 : \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

Dans le cas de la convergence uniforme, le rang  $N$  dépend **uniquement** de  $\varepsilon$ .

- (1,25pt) Soit  $f \in C_{2\pi}^k$ , décrire le comportement de ses coefficients de Fourier  $\hat{f}(n)$  lorsque  $|n| \rightarrow \infty$  en fonction de  $k = 0$  et  $k \geq 1$ .

Pour  $k = 0$ , on a  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$  (Riemann-Lebesgue).

Pour  $k \geq 1$ , on a  $|\hat{f}(n)| \leq |n|^{-k} \|f^{(k)}\|_1 = \mathcal{O}(n^{-k})$

**Exercice 1 : TD2-exo6 (5,25pt)** Soit un paramètre  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\alpha + n^2}$  pour tout  $|x| \leq 1$ .

- (1pt) Justifier que  $f$  est bien définie et que  $f \in C^0([-1, 1])$ .

On a  $\sum_{n \geq 0} \left\| \frac{(\cdot)^n}{\alpha + n^2} \right\|_\infty \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\alpha + n^2} < \infty$  par comparaison à une série de Riemann, donc la série converge normalement sur  $[-1, 1]$ , et ainsi  $f \in C^0([-1, 1])$ .

- (1pt) Justifier que  $f \in C^\infty(]-1, 1[)$ .

Il s'agit d'une **série entière** de rayon de convergence (par d'Alembert)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha + (n+1)^2}{\alpha + n^2} = 1$ , donc elle est de classe  $C^\infty(]-1, 1[)$ .

- (1,5pt) On souhaite montrer que  $f$  est croissante sur  $[-1, 1]$ .

(a) (0,5pt) Justifier que  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

Pour  $x \in [0, 1]$ , on a que  $f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{n x^{n-1}}{\alpha + n^2} \geq 0$  car chaque terme de la série est positif, donc  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

<sup>1</sup>La règle de Cauchy n'est pas la définition.

(b) (1pt) Montrer que  $f'(-x) \geq 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

Pour  $x \in [0, 1]$ , on a que

$$f'(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{\alpha + n^2} = \frac{1}{1 + \alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nx^{n-1}}{\alpha + n^2} ,$$

il s'agit donc de montrer que le reste de cette **série alternée** est plus petit en valeur absolue que  $(1 + \alpha)^{-1}$ . Puisque la suite  $(x^n)_n$  est décroissante car  $x \in [0, 1]$ , il suffit de vérifier que  $\left(\frac{n}{\alpha + n^2}\right)_{n \geq 2}$  l'est aussi :

$$\forall t \geq 2 , \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{t}{\alpha + t^2} \right) = \frac{\alpha - t^2}{(\alpha + t^2)^2} \leq 0 .$$

On a alors par l'estimation de reste pour les séries alternées

$$f'(-x) \geq \frac{1}{\alpha + 1} - \frac{2}{\alpha + 2^2} = \frac{2 - \alpha}{(\alpha + 1)(\alpha + 4)} \geq 0 .$$

Ainsi,  $f$  est croissante sur  $[-1, 0]$ .

4. (1,75pt) On cherche une équation différentielle satisfaite par  $f$ .

⚠ La question (a) n'est possible que pour  $p = 2$ , j'ai mis les points à tout le monde pour la question 4.

On a pour tout  $|x| < 1$

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) &= \sum_{n \geq 2} \frac{(n^2 - n)x^n}{\alpha + n^2} \\ &= \sum_{n \geq 2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha + n^2} - \frac{n}{\alpha + n^2} \right) x^n \\ &= \sum_{n \geq 2} x^n - \alpha \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{\alpha + n^2} - x \sum_{n \geq 2} \frac{nx^{n-1}}{\alpha + n^2} \\ &= \frac{x^2}{1 - x} - \alpha \left( f(x) - \frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\alpha + 1} \right) - x \left( f'(x) - \frac{1}{\alpha + 1} \right) \\ &= \frac{1}{1 - x} - \alpha f(x) - x f'(x) . \end{aligned}$$

(a) (0,5pt) Exprimer  $f^{(p)}$  en fonction de  $(f^{(q)})_{0 \leq q \leq p-1}$  et de fonctions élémentaires pour  $p = 1, 2$ .

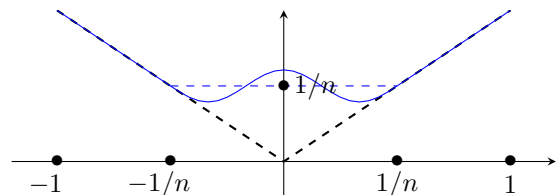
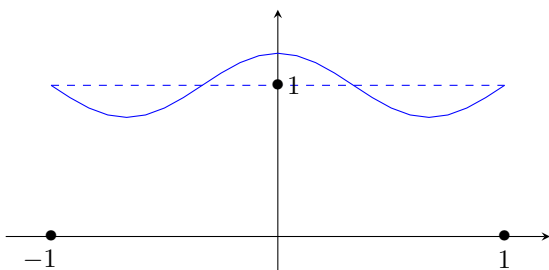
(b) (1,25pt) En déduire une équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par  $f$  sur  $] -1, 1[$ .

Donc  $f$  satisfait l'équation différentielle  $x^2 f''(x) + x f'(x) + \alpha f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**Exercice 2 : TD1-exo5 (7,25pt)** Pour  $n \geq 1$ , on définit la fonction  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| , & \text{si } \frac{1}{n} \leq |x| \leq 1 , \\ \frac{\omega(nx)}{n} , & \text{si } |x| < \frac{1}{n} , \end{cases} \quad \text{où} \quad \omega(t) = 1 + \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right) .$$

1. (1pt) Tracer l'allure de la courbe de  $\omega$  sur  $[-1, 1]$ , et sur un autre graphe, celles de  $f_n$  et  $x \mapsto |x|$  sur  $[-1, 1]$ .



2. (1,25pt) Montrer que  $f_n \in C^0([-1, 1])$  pour tout  $n \geq 1$ .

La fonction  $f_n$  est définie par recollement des fonctions  $|\cdot|$  et  $\omega(n\cdot)/n$  qui sont continues sur  $\mathbb{R}$ , elle est donc continue par morceaux. Il suffit alors de vérifier que les fonctions la définissant par morceaux coïncident aux points de recollement  $\pm \frac{1}{n}$  et avec  $f_n$ . C'est en effet le cas puisque

$$f_n\left(\pm \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \quad \left|\pm \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}, \quad \frac{\omega(1)}{n} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi  $f_n$  est continue sur  $[-1, 1]$ .

3. (1,25pt) Montrer que  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers une fonction  $f$  à déterminer.

D'une part, pour tout  $|x| \geq 1/n$  on a  $f_n(x) = |x|$ , et d'autre part, pour tout  $|x| < 1/n$  on a

$$|f_n(x) - |x|| = \left| \frac{\omega(nx)}{n} - |x| \right| \leq \frac{\omega(nx) + 1}{n} \leq \frac{\|\omega\|_\infty + 1}{n},$$

ainsi on a bien  $\|f_n - |\cdot|\|_\infty \leq (1 + \|\omega\|_\infty)/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

4. (1pt) En supposant que  $f_n \in C^1([-1, 1])$ , est-il possible que la suite  $(f'_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  ?

Dans ce cas, il est impossible que  $(f'_n)_n$  converge uniformément car cela impliquerait que la limite de  $(f_n)_n$  serait  $C^1$ , or il s'agit de  $|\cdot|$  qui n'est pas dérivable en 0.

5. (1,5pt) Montrer que  $f_n \in C^1([-1, 1])$  pour tout  $n \geq 1$ .

Puisque  $f_n$  est définie par recollement de fonctions  $C^1$  sur chacun des morceaux<sup>2</sup>,  $f'_n$  existe et est continue sur  $[-1, 1] \setminus \{\pm 1/n\}$ . Puisque  $f_n$  est continue sur  $[-1, 1]$ , pour que  $f'_n$  existe et soit continue sur  $[-1, 1]$  il suffit que les limites  $\lim_{x \rightarrow \pm 1/n} f'_n(x)$  existent<sup>3</sup>, et en effet

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^+} f'_n(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^-} f'_n(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^-} \omega'(nx) = \omega'(1) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

et similairement en  $-\frac{1}{n}$  par symétrie.

6. (1pt) Soit  $I_\delta = [-1, 1] \setminus ]-\delta, \delta[$  avec  $0 < \delta \leq 1$ . Justifier que pour tout  $n > \frac{1}{\delta}$  on a  $f_n \in C^\infty(I_\delta)$  et que  $(f_n^{(k)})_{n > \frac{1}{\delta}}$  converge uniformément quelque soit  $k \geq 1$ .

Pour tout  $n > \frac{1}{\delta}$  et  $x \in I_\delta$ , on a que  $\frac{1}{n} < \delta \leq |x|$  ainsi  $f_n(x) = |x|$ , et donc  $f_n$  est bien  $C^\infty$  sur  $I_\delta = [-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$ . De plus, on a  $f'_n = \text{signe}(\cdot)$  et  $f^{(2)} = f^{(3)} = \dots = 0$  sur  $I_\delta$ . Autrement dit, pour tout  $k \geq 1$  la fonction  $f_n^{(k)}$  restreinte à  $I_\delta$  ne dépend pas  $n$  et, trivialement, converge uniformément.

<sup>2</sup> $|\cdot|$  n'est pas  $C^1$  sur  $[-1, 1]$  mais elle l'est sur  $[-1, -1/n] \cup [1/n, 1]$ .

<sup>3</sup>Si  $f \in C^0([a, b]) \cap C^1([a, b] \setminus \{c\})$  et  $\lim_c f'$  existe alors, par le théorème de Rolle  $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c + \xi_h)$  où  $0 < |\xi_h| < |h|$ , d'où  $f'(c)$  existe et vaut  $\lim_c f'$ , ainsi  $f \in C^1([a, b])$ .