

Questions de cours

1. Donner la **définition** du rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ et énoncer la règle de d'Alembert.
2. Énoncer le théorème de Weierstrass pour l'approximation d'une fonction continue et donner (en justifiant) un contre-exemple pour l'approximation sur \mathbb{R} .
3. Donner la définition **avec des quantificateurs (et sans $\|\cdot\|_\infty$)** de la convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Quelle est la différence entre ces deux définitions ?
4. Soit $f \in C_{2\pi}^k$, décrire le comportement de ses coefficients de Fourier $\widehat{f}(n)$ lorsque $|n| \rightarrow \infty$ en fonction de $k = 0$ et $k \geq 1$.

Exercice 1 Soit un paramètre $\alpha \in]0, 1]$ et $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\alpha + n^2}$ pour tout $|x| \leq 1$.

1. Justifier que f est bien définie et que $f \in C^0([-1, 1])$.
2. Justifier que $f \in C^\infty(]-1, 1[)$.
3. On souhaite montrer que f est croissante sur $[-1, 1]$.
 - (a) Justifier que f est croissante sur $[0, 1]$.
 - (b) Montrer que $f'(-x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.
4. On cherche une équation différentielle satisfaite par f .
 - (a) Exprimer $f^{(p)}$ en fonction de $(f^{(q)})_{0 \leq q \leq p-1}$ et de fonctions élémentaires pour $p = 1, 2$.
 - (b) En déduire une équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par f sur $]-1, 1[$.

Exercice 2 Pour $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } \frac{1}{n} \leq |x| \leq 1, \\ \frac{\omega(nx)}{n}, & \text{si } |x| < \frac{1}{n}, \end{cases} \quad \text{où} \quad \omega(t) = 1 + \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right).$$

1. Tracer l'allure de la courbe de ω sur $[-1, 1]$, et sur un autre graphe, celles de f_n et $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que $f_n \in C^0([-1, 1])$ pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers une fonction f à déterminer.
4. En supposant que $f_n \in C^1([-1, 1])$, est-il possible que la suite $(f'_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$?
5. Montrer que $f_n \in C^1([-1, 1])$ pour tout $n \geq 1$.
6. Soit $I_\delta = [-1, 1] \setminus]-\delta, \delta[$ avec $0 < \delta \leq 1$. Justifier que pour tout $n > \frac{1}{\delta}$ on a $f_n \in C^\infty(I_\delta)$ et que $(f_n^{(k)})_{n > \frac{1}{\delta}}$ converge uniformément quelque soit $k \geq 1$.