

Exercice 1 : Questions générales

1. Compléter les énoncés de convergence suivants :

(a) Si $f \in C_{2\pi}^1$, sa série de Fourier converge

(b) Si $f \in C_{2\pi}^{0,pm}$ admet une limite à gauche et à droite en $x_0 \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0^\pm)}{x - x_0}$ existe, alors sa série de

Fourier converge

2. Soit $f : t \mapsto e^{ikt}$ où $k \in \mathbb{Z}$ est un paramètre fixé, alors $\widehat{f}(n) = \dots$

3. Soit $f \in C_{2\pi}^{0,pm}$, énoncer l'identité de Parseval :

Exercice 2 : Étude d'une fonction On considère la fonction 2π -périodique $f(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

2. Avec peu voire aucun calcul, que valent les coefficients $b_n(f)$?

3. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ a-t-on $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt) \right)$? Justifier.

4. En notant $\gamma = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}$, montrer que $a_n(f) = \gamma \frac{(-1)^n}{1 + n^2}$ pour $n \geq 1$ et $a_0(f) = \frac{\gamma}{2}$.

5. En déduire les valeurs des séries $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1+n^2}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(1+n^2)^2}$.