

Exercice 1

1. Cette fonction est un polynôme, et donne déjà une série entière (avec un nombre fini de termes non-nuls). En particulier, le rayon de convergence est $R = \infty$.

2. Par la règle de Cauchy, $R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-\lambda n^\alpha})^{1/n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda n^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ e^{-\lambda}, & \alpha = 1 \\ 1, & \alpha < 1 \end{cases}$$

ainsi $R = \begin{cases} \infty, & \alpha > 1 \\ e^\lambda, & \alpha = 1 \\ 1, & \alpha < 1 \end{cases}$

3. a) Si $\lambda \neq 0$ et $u_0 \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$ et donc par d'Alembert $R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{n+1} = 0, \text{ c'est-à-dire } R = \infty.$$

Si $\lambda = 0$ ou $u_0 = 0$, alors $u_1 = 0$ et donc $u_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, ainsi $R = \infty$.

b) On a $u_n = \frac{\lambda}{n} u_{n-1} = \frac{\lambda^2}{n(n-1)} u_{n-2} = \dots = \frac{\lambda^n}{n!} u_0$ pour tout $n \geq 0$,

et donc $\sum_{n \geq 0} u_n x^n = u_0 \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda x)^n}{n!} = u_0 e^{\lambda x}$

Exercice 2

1. Puisque pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{d}{ds}(n^{-s}) = \frac{d}{ds}(e^{-s \ln n}) = (-\ln n) e^{-s \ln n} = (-\ln n) n^{-s}$ ce qui permet de conclure par récurrence que $\frac{d^k}{ds^k}(n^{-s}) = (-\ln n)^k n^{-s}$ pour tout $k \geq 0$.

2. Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} (-\ln n)^k n^{-s}$ converge normalement sur $[1+\delta, \infty[$ quelque soit $k \geq 0$ pour en déduire que $\zeta^{(k)}: s \mapsto \sum_{n \geq 1} (-\ln n)^k n^{-s} \in \mathcal{C}^0([1, \infty[)$, et donc que $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]1, \infty[)$.

Option 1 (Croissances comparées):

$$\begin{aligned} \text{Pour } s \geq 1+\delta, \text{ on a } |m^{-s}(\ln m)^k| &\leq m^{-(1+\delta)} |\ln m|^k \\ &\leq m^{-\delta} m^{-(1+\delta-\delta)} |\ln m|^k \\ &\leq C m^{-\delta} \end{aligned}$$

où on a considéré un paramètre $\delta \in]1, 1+\delta[$ quelconque et $C := \sup_{m \geq 1} \frac{(\ln m)^k}{m^{1+\delta-\delta}}$ existe et est fini par les croissances comparées.

Ainsi, puisque $\sum_{m \geq 1} m^{-\delta} < \infty$, on a bien que la série définissant $\zeta^{(k)}$ converge normalement.

Option 2 (Série de Bertrand): $\sum_{m \geq 1, s \geq 1+\delta} (\ln m)^k m^{-s} \leq \sum_{m \geq 1} \frac{(\ln m)^k}{m^{1+\delta}} < \infty$
Car il s'agit d'une série de Bertrand.

$$3. \text{ On a } \zeta'(s) = \sum_{m \geq 1} \underbrace{(-\ln m)}_{\leq 0} m^{-s} \leq 0 \text{ et } \zeta''(s) = \sum_{m \geq 1} \underbrace{(\ln m)^2}_{\geq 0} m^{-s} \geq 0,$$

ainsi ζ est décroissante et convexe.

4. Puisque $t \mapsto t^{-s}$ est décroissante sur $]1, \infty[$, on a pour tout $m \geq 1$

$$\forall t \in [m, m+1], \frac{1}{(m+1)^s} \leq t^{-s} \leq \frac{1}{m^s}$$

et donc en intégrant:

$$\frac{1}{(m+1)^s} \leq \int_m^{m+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{m^s}$$

puis en sommant:

$$\underbrace{\sum_{m \geq 2} \frac{1}{m^s}}_{\zeta(s)-1} \leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \underbrace{\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^s}}_{\zeta(s)}$$

Enfin, puisque $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s} = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{s-1}$, on conclut que

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

5. Puisque $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \geq 1$, on a par la question 4 que $1 \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$, donc $\lim_{s \rightarrow \infty} \zeta(s) = 1$ par le théorème des gendarmes.

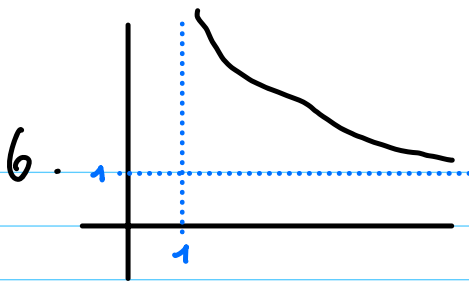
⚠ Même si $\zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$, on ne peut pas immédiatement déduire $\lim_{s \rightarrow \infty} \zeta(s) = 1$

Penser à
 $s \mapsto \frac{1}{s-1} + \cos(s)$

(car cela n'implique pas que la limite existe.

Si elle existe, on peut seulement déduire $\lim_{s \rightarrow \infty} \zeta(s) \leq 1$.

En général, on peut seulement déduire que $\limsup_{s \rightarrow \infty} \zeta(s) \leq 1$.



7. On a pour tout $s \geq 1$ et $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{n^s} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{m^s} \xrightarrow{m \rightarrow n} 0$$

ainsi par le critère de Dirichlet uniforme, la série converge uniformément sur $[1, \infty[$.

⚠ Important de préciser $\left\| \sum_{m=N}^n (-1)^m \right\|_\infty \leq 1$ pour $0 \leq N \leq n$, mais si vous le faites

n'écrivez pas $\sum_{m=N}^{\infty} (-1)^m$ car la série ne converge pas!

8. Pour tout $s > 1$, on a $\zeta(s)(1-2^{1-s}) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} - \sum_{n \geq 1} \frac{2^{1-s}}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^s}$.

Puisque la première série converge absolument, on peut réorganiser les termes d'indices pairs et impairs (théorème de réarrangement de Riemann):

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^s} + \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^s} - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^s}}_{\sum_{n \geq 1} \frac{-1}{(2n)^s}} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$