

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ puis X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $[1, n+1]$ dont la loi de couple est donnée par

$$\forall (i, j) \in [1, n+1]^2, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer que $\lambda = \frac{1}{4^n}$.
2.
 - a) Déterminer les lois marginales de X et Y .
 - b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X . On pourra étudier la variable aléatoire $X - 1$.
4. Soit

$$B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

telle que

$$b_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$$

pour tout $(i, j) \in [1, n+1]^2$.

- a) Justifier que B est diagonalisable.
- b) En calculant B^2 , déterminer les valeurs propres de B ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

Exercice 2

Soit $(X_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

On note A la matrice symétrique aléatoire définie par

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X_{1,1}(\omega) & X_{1,2}(\omega) & \cdots & X_{1,n}(\omega) \\ X_{1,2}(\omega) & X_{2,2}(\omega) & \cdots & X_{2,n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1,n}(\omega) & X_{2,n}(\omega) & \cdots & X_{n,n}(\omega) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\{0, 1\}).$$

1. On suppose dans cette question que

$$M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

est une matrice symétrique définie positive.

- a) Montrer que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top M X \geq 0,$$

et caractériser le cas d'égalité.

- b) Montrer que, pour tout $i \neq j$,

$$M_{i,j}^2 \leq M_{i,i} M_{j,j}.$$

- c) Montrer que si $M_{i,i} = 0$ pour un certain i , alors la i -ème ligne et la i -ème colonne de M sont nulles.
- d) En déduire la probabilité que la matrice aléatoire A soit définie positive.

2. Calculer $\mathbb{E}(\det(A))$ pour $n = 2$ et $n = 3$.

3. On note $T_n = \text{Tr}(A)$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T_n .