

Algèbre linéaire 2

5.1 Vecteurs propres et valeurs propres

Réf : Grifone §6.1-6.2

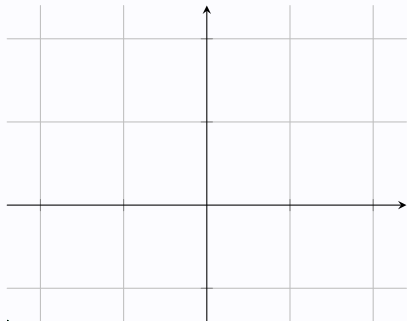
Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Exemple

Rotation du plan d'angle θ

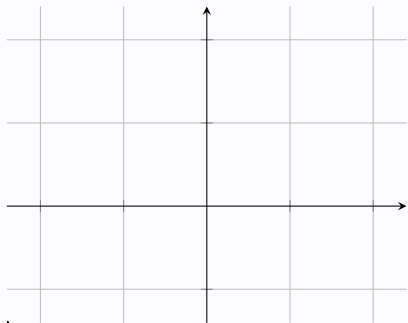


$$\text{Matrice : } R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice : } S_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

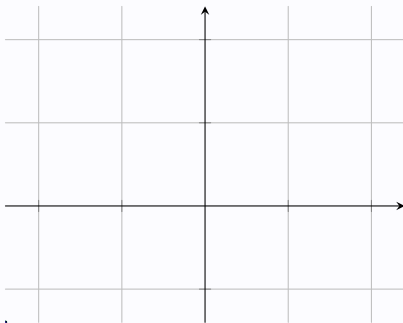
Exemple

Rotation du plan d'angle θ



$$\text{Matrice : } R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

“Serrage” du plan



$$\text{Matrice : } S_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Différence qualitative : $S_{\theta}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ préserve certaines droites :

- (1) la diagonale $\{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$.
- (2) l'antidiagonale $\{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$.

Exemple, de façon algébrique

De fait, on calcule :

$$S_{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemple, de façon algébrique

De fait, on calcule :

$$S_{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors :

- (1) sur la diagonale : S_{θ} agit comme une dilatation par $\cos(\theta) + \sin(\theta)$.
- (2) sur l'antidiagonale : S_{θ} agit comme une dilatation par $\cos(\theta) - \sin(\theta)$.

En particulier : la matrice de S_{θ} dans la base $\{(1, 1), (1, -1)\}$ est simplement :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) + \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) - \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Valeurs et vecteurs propres

Définition

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme.

(1) Un vecteur **non nul** $v \in E$ est dit **vecteur propre** de Φ si

$$\Phi(v) = \lambda \cdot v \quad \text{pour } \lambda \in K.$$

(2) Dans cette situation, v est dit vecteur propre de **valeur propre** λ .

Valeurs et vecteurs propres

Définition

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme.

- (1) Un vecteur **non nul** $v \in E$ est dit **vecteur propre** de Φ si

$$\Phi(v) = \lambda \cdot v \quad \text{pour } \lambda \in K.$$

- (2) Dans cette situation, v est dit vecteur propre de **valeur propre** λ .
- (3) Un $\lambda \in K$ est dit **valeur propre** de Φ s'il existe un vecteur propre de Φ de valeur propre λ .
- (4) On appelle **spectre** de Φ le sous-ensemble $\text{Sp}_K(\Phi) \subset K$ des valeurs propres.

D'autres exemples

(1) Soit $p: E \longrightarrow E$ un projecteur ($p^2 = p$). Alors :

- Les seules valeurs propres de p possibles sont 0 et 1 :

D'autres exemples

(1) Soit $p: E \longrightarrow E$ un projecteur ($p^2 = p$). Alors :

- Les seules valeurs propres de p possibles sont 0 et 1 :

$$p(v) = \lambda v \quad \implies \quad \lambda v = p(v) = p^2(v) = p(\lambda v) = \lambda^2 v.$$

- v vecteur propre de valeur propre 0 $\iff v \in \text{Ker}(p) \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- v vecteur propre de valeur propre 1 $\iff v \in \text{Im}(p) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

D'autres exemples

(1) Soit $p: E \longrightarrow E$ un **projecteur** ($p^2 = p$). Alors :

- Les seules valeurs propres de p possibles sont 0 et 1 :

$$p(v) = \lambda v \quad \implies \quad \lambda v = p(v) = p^2(v) = p(\lambda v) = \lambda^2 v.$$

- v vecteur propre de valeur propre 0 $\iff v \in \text{Ker}(p) \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- v vecteur propre de valeur propre 1 $\iff v \in \text{Im}(p) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(2) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace d'applications infiniment dérivables et considérons l'endomorphisme

$$D: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad f(x) \longmapsto f'(x).$$

D'autres exemples

(1) Soit $p: E \longrightarrow E$ un projecteur ($p^2 = p$). Alors :

- Les seules valeurs propres de p possibles sont 0 et 1 :

$$p(v) = \lambda v \quad \implies \quad \lambda v = p(v) = p^2(v) = p(\lambda v) = \lambda^2 v.$$

- v vecteur propre de valeur propre 0 $\iff v \in \text{Ker}(p) \setminus \{0\}$.
- v vecteur propre de valeur propre 1 $\iff v \in \text{Im}(p) \setminus \{0\}$.

(2) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace d'applications infiniment dérivables et considérons l'endomorphisme

$$D: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad f(x) \longmapsto f'(x).$$

Alors $\exp(x)$ est un vecteur propre de D , de valeur propre 1.

D'autres exemples

(1) Soit $p: E \longrightarrow E$ un projecteur ($p^2 = p$). Alors :

- Les seules valeurs propres de p possibles sont 0 et 1 :

$$p(v) = \lambda v \quad \implies \quad \lambda v = p(v) = p^2(v) = p(\lambda v) = \lambda^2 v.$$

- v vecteur propre de valeur propre 0 $\iff v \in \text{Ker}(p) \setminus \{0\}$.
- v vecteur propre de valeur propre 1 $\iff v \in \text{Im}(p) \setminus \{0\}$.

(2) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace d'applications infiniment dérivables et considérons l'endomorphisme

$$D: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad f(x) \longmapsto f'(x).$$

Alors $\exp(\lambda \cdot x)$ est un vecteur propre de D , de valeur propre λ .

Espaces propres

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme, $\lambda \in K$ et $v \in E$. Alors :

$$\Phi(v) = \lambda v \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(v) - \lambda v = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad v \in \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}).$$

Par conséquent :

$v \text{ est vecteur propre de valeur propre } \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad v \in \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}) \setminus \{\mathbf{0}\}$
--

Espaces propres

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme, $\lambda \in K$ et $v \in E$. Alors :

$$\Phi(v) = \lambda v \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(v) - \lambda v = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad v \in \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}).$$

Par conséquent :

$v \text{ est vecteur propre de valeur propre } \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad v \in \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}) \setminus \{\mathbf{0}\}$
--

Définition

Pour tout $\lambda \in K$, l'espace propre de Φ correspondant à λ est le sous-espace vectoriel de E

$$E_\lambda = \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}).$$

Remarque :

- $E_\lambda = \{\mathbf{0}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ n'est pas valeur propre de } \Phi.$
- Si λ est une valeur propre, il existe donc une infinité de vecteurs propres : tout $E_\lambda \setminus \{\mathbf{0}\}.$

Exercice

Soit $\Phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x + 3y \end{pmatrix}.$$

Calculer E_λ pour $\lambda = 0, 1$.

Somme et somme directe de plusieurs sous-espaces

Definition

Soient $E_1, \dots, E_n \subset E$ des sous-espaces vectoriels. Leur **somme** est le sous-espace vectoriel

$$E_1 + \dots + E_n = \left\{ v \in E : v = v_1 + \dots + v_n \text{ avec } v_1 \in E_1, \dots, v_n \in E_n \right\}.$$

On dit que E_1, \dots, E_n sont **en somme directe** si tout vecteur $v \in E_1 + \dots + E_n$ se décompose **uniquement** en somme

$$v = v_1 + \dots + v_n \quad \text{avec } v_i \in E_i.$$

Dans ce cas, on note $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ la somme de E_1, \dots, E_n .

Somme et somme directe de plusieurs sous-espaces

Proposition (Grifone Thm. 1.38)

Soient $E_1, \dots, E_n \subset E$ des sous-espaces vectoriels. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) E_1, \dots, E_n sont en somme directe.
- (2) Si $v_1 \in E_1, \dots, v_n \in E_n$ sont tels que $v_1 + \dots + v_n = \mathbf{0}_E$ dans E , alors $v_1 = \dots = v_n = \mathbf{0}$.
- (3) Pour tout $i = 1, \dots, n$, soit $(v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i})$ une famille libre dans E_i . Alors la famille

$$(v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,m_2}, \dots, v_{n,1}, \dots, v_{n,m_n})$$

est une famille libre de E .

Corollaire (Grifone Thm. 1.38 + Cor. 1.39)

Si $E_1, \dots, E_n \subset E$ sont en somme directe et $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ sont des bases de E_1, \dots, E_n , alors $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$ est une base de $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ et

$$\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n).$$

Espaces propres

Proposition (Grifone Prop. 6.9)

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de Φ .
Alors les espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe.

Espaces propres

Proposition (Grifone Prop. 6.9)

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de Φ .
Alors les espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe.

Corollaire

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de Φ . Alors

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_n}) = \dim(E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}) \leq \dim(E).$$

En particulier : (nombre de valeurs propres différentes de Φ) $\leq \dim(E)$.