

Algèbre linéaire 2

4.4 Déterminant et rang

Réf : Grifone §4.9

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222
francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Rappel : déterminant

Le déterminant d'une matrice $A \in M_n(K)$ est :

(1) linéaire dans chaque colonne

$$\begin{vmatrix} \dots & a_{1j} + \lambda b_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} + \lambda b_{nj} & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & a_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{vmatrix}$$

et dans chaque ligne.

(2) **alternée** : échanger deux lignes ou deux colonnes \rightsquigarrow déterminant change de signe.

(3) calculable par pivot de Gauss.

(4) calculable par **développement selon colonne** j (ou selon une ligne) :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}).$$

(5) le “volume orienté” du parallélépipède délimité par les colonnes de A .

Déterminant d'un endomorphisme $\Phi: E \rightarrow E$: déterminant de $M(\Phi)_{e_i}$ pour une base (e_i) .

Déterminant et rang

Objectif : pour $v_1, \dots, v_k \in K^n$, utiliser le déterminant afin d'identifier $\dim(\text{Vect}(v_1, \dots, v_k))$.

Premier étape : pour $k = n$, dire quand v_1, \dots, v_n engendrent K^n .

Déterminant et rang

Objectif : pour $v_1, \dots, v_k \in K^n$, utiliser le déterminant afin d'identifier $\dim(\text{Vect}(v_1, \dots, v_k))$.

Premier étape : pour $k = n$, dire quand v_1, \dots, v_n engendrent K^n .

Rappel (Grifone Thm. 4.23)

Soient $v_1, \dots, v_n \in K^n$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) (v_1, \dots, v_n) est une base de K^n .
- (2) La matrice (v_1, \dots, v_n) est inversible.
- (3) $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Mineurs d'une matrice

Définition

Soit $A \in M_{n,k}(K)$ une matrice à n lignes et k colonnes.

On appelle **mineur d'ordre r** de A le déterminant d'une matrice carrée d'ordre r extraite de A en choisissant r lignes et r colonnes (différentes).

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & \boxed{5} & 4 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & \boxed{-1} & 3 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

En choisissant les lignes 2, 4 et les colonnes 3, 5, on obtient le mineur d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

Familles libres

Theorème (Grifone Thm. 4.24)

Soient $v_1, \dots, v_k \in K^n$ avec $k \leq n$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) (v_1, \dots, v_k) est une famille libre.
- (2) La matrice $A = (v_1, \dots, v_k)$ avec les v_i comme colonnes admet un mineur d'ordre k non nul.

Familles libres

Theorème (Grifone Thm. 4.24)

Soient $v_1, \dots, v_k \in K^n$ avec $k \leq n$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) (v_1, \dots, v_k) est une famille libre.
- (2) La matrice $A = (v_1, \dots, v_k)$ avec les v_i comme colonnes admet un mineur d'ordre k non nul.

Corollaire (voir Grifone Thm. 4.26)

Soit (v_1, \dots, v_r) une famille **libre** dans K^n et $w \in K^n$. Alors, les suivantes sont équivalentes :

- (1) $w \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_r) \subset K^n$.
- (2) La matrice $A = (v_1, \dots, v_r, w)$ est de rang $\text{rg}(A) = r$.
- (3) Tous les mineurs d'ordre $r + 1$ de A sont nuls.

Mineurs et rang

Theorème

Soit $A = (v_1, \dots, v_k) \in M_{n,k}(K)$ une matrice. Alors :

$\text{rg}(A)$ = le nombre r maximal tel que A admet un mineur non nul d'ordre r .

De plus, pour tout mineur non nul d'ordre $r = \text{rg}(A)$:

les colonnes correspondantes $v_{i_1}, \dots, v_{i_r} \in K^n$ forment une base de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) \subset K^n$.