

Algèbre linéaire 2

3.2. Applications linéaires et matrices – changement de base

Réf : Grifone §3.6-3.7

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Rappel

Soient :

- E un espace vectoriel avec base (e_1, \dots, e_n) .
- F un espace vectoriel avec base (f_1, \dots, f_p) .

Alors :

Application linéaire $\Phi: E \rightarrow F \longleftrightarrow$ matrice $M(\Phi)_{e_i, f_j} \in M_{p,n}(K)$.

Principe : colonne i = coordonnées de $\Phi(e_i)$ dans la base (f_j) .

$$M(\Phi)_{e_i, f_j} = \begin{pmatrix} \Phi(e_1)_1 & \Phi(e_2)_1 & \dots & \Phi(e_n)_1 \\ \Phi(e_1)_2 & \Phi(e_2)_2 & \dots & \Phi(e_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(e_1)_p & \Phi(e_2)_p & \dots & \Phi(e_n)_p \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \quad \Phi(e_i) = \sum_{j=1}^p \Phi(e_i)_j \cdot f_j.$$

Action sur vecteurs

Définition

Soit (e_i) une base de E . Pour tout vecteur $x \in E$, on note

$$M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base (e_i) .

Action sur vecteurs \longleftrightarrow produit matriciel

Proposition (Grifone Prop. 3.18)

Soient – $\Phi: E \longrightarrow F$ une application linéaire,

– (e_i) une base de E ,

– (f_j) une base de F .

Alors pour tout vecteur $x \in E$:

$$M(\Phi(x))_{f_j} = M(\Phi)_{e_i, f_j} \cdot M(x)_{e_i}.$$

Action sur vecteurs \longleftrightarrow produit matriciel

Proposition (Grifone Prop. 3.18)

Soient – $\Phi: E \longrightarrow F$ une application linéaire,

– (e_i) une base de E ,

– (f_j) une base de F .

Alors pour tout vecteur $x \in E$:

$$M(\Phi(x))_{f_j} = M(\Phi)_{e_i, f_j} \cdot M(x)_{e_i}.$$

Corollaire

Dans la situation de la proposition :

(1) Soit $x \in E$. Alors $x \in \text{Ker}(\Phi) \iff M(x)_{e_i} \in \text{Ker}(M(\Phi)_{e_i, f_j})$.

(2) Soit $y \in F$. Alors $y \in \text{Im}(\Phi) \iff M(y)_{f_j} \in \text{Im}(M(\Phi)_{e_i, f_j})$.

Attention : $\text{Ker}(\Phi) \neq \text{Ker}(M(\Phi)_{e_i, f_j})$, il faut utiliser la base (e_i) pour passer de l'un à l'autre !

Composition \longleftrightarrow produit matriciel

Proposition (Grifone Prop. 3.19)

Soient E, F, G des K -espaces vectoriels de dimension finie, avec des bases

$$(e_1, \dots, e_n), \quad (f_1, \dots, f_p), \quad (g_1, \dots, g_q).$$

Pour deux applications linéaires $\Phi: F \longrightarrow G$ et $\Psi: E \longrightarrow F$, on a

$$M(\Phi \circ \Psi)_{e_i, g_k} = M(\Phi)_{f_j, g_k} \cdot M(\Psi)_{e_i, f_j}.$$

Attention : il faut utiliser la même base de F pour les matrices de Φ et Ψ !

Réciproque \longleftrightarrow matrice inverse

Proposition (Grifone Prop. 3.21)

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E et (f_1, \dots, f_n) une base de F . Alors :

(1) $\Phi: E \longrightarrow F$ est inversible \iff sa matrice $M(\Phi)_{e_i, f_j}$ dans les bases $(e_i), (f_j)$ est inversible.

(2) Si ceci est le cas, alors

$$M_{f_j, e_i}(\Phi^{-1}) = (M(\Phi)_{e_i, f_j})^{-1}.$$

Réciproque \longleftrightarrow matrice inverse

Proposition (Grifone Prop. 3.21)

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E et (f_1, \dots, f_n) une base de F . Alors :

- (1) $\Phi: E \longrightarrow F$ est inversible \iff sa matrice $M(\Phi)_{e_i, f_j}$ dans les bases $(e_i), (f_j)$ est inversible.
- (2) Si ceci est le cas, alors

$$M_{f_j, e_i}(\Phi^{-1}) = (M(\Phi)_{e_i, f_j})^{-1}.$$

Attention :

- $M(\Phi)_{e_i, f_j}$ transforme une matrice colonne dans la base (e_i) en une dans la base (f_j) .
- $(M(\Phi)_{e_i, f_j})^{-1}$ transforme une matrice colonne dans la base (f_j) en une dans la base (e_i) .

Changement de base

Cas spécial : soient (e_1, \dots, e_n) et (e'_1, \dots, e'_n) deux bases du même espace vectoriel E .

Définition

La matrice de passage de la base (e_i) à la base (e'_i) est

$$P_{e_i \rightarrow e'_i} = M(\text{Id}_E)_{e'_i, e_i}.$$

Autrement dit :

colonne k de $P_{e_i \rightarrow e'_i} =$ vecteur colonne de e'_k dans la base (e_i) .
--

Matrice de passage : propriétés

colonne k de $P_{e_i \rightarrow e'_i}$ = vecteur colonne de e'_k dans la base (e_i) .

Proposition (Grifone Prop. 3.24)

- (1) La matrice de passage de (e_i) à (e_i) elle-même est la matrice d'identité I_n .
- (2) La matrice de passage de (e'_i) à (e_i) est l'inverse :

$$P_{e'_i \rightarrow e_i} = (P_{e_i \rightarrow e'_i})^{-1}.$$

- (3) Transitivité : $P_{e_i \rightarrow e'_i} \cdot P_{e'_i \rightarrow e''_i} = P_{e_i \rightarrow e''_i}$.

Exemple 2

Soit $S = \{A \in M_{2,2}(K) \mid A^T = A\}$ l'espace des matrices 2×2 symétriques.

La dimension de S est

Exemple 2

Soit $S = \{A \in M_{2,2}(K) \mid A^T = A\}$ l'espace des matrices 2×2 symétriques.

La dimension de S est 3, puisqu'on a les bases suivantes :

(a) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(b) $E'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Les matrices de passage associées sont de taille 3×3 car $\dim(S) = 3$. On calcule :

$$P_{E_i \rightarrow E'_i} =$$

Exemple 2

Soit $S = \{A \in M_{2,2}(K) \mid A^T = A\}$ l'espace des matrices 2×2 symétriques.

La dimension de S est 3, puisqu'on a les bases suivantes :

(a) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(b) $E'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Les matrices de passage associées sont de taille 3×3 car $\dim(S) = 3$. On calcule :

$$P_{E_i \rightarrow E'_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{E'_i \rightarrow E_i} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Changement de coordonnées d'un vecteur

Proposition (Grifone Prop. 3.25)

Soit E un espace vectoriel avec deux bases (e_i) et (e'_i) . Pour un vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$, le vecteur colonne

$$(P_{e_i \rightarrow e'_i})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est le vecteur colonne de x dans la base (e'_i) . Autrement dit :

$$(P_{e_i \rightarrow e'_i})^{-1} M_{e_i}(x) = M_{e'_i}(x).$$

Changement de coordonnées d'un vecteur

Proposition (Grifone Prop. 3.25)

Soit E un espace vectoriel avec deux bases (e_i) et (e'_i) . Pour un vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$, le vecteur colonne

$$(P_{e_i \rightarrow e'_i})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est le vecteur colonne de x dans la base (e'_i) . Autrement dit :

$$(P_{e_i \rightarrow e'_i})^{-1} M_{e_i}(x) = M_{e'_i}(x).$$

Important : l'inverse de la matrice de passage de (e_i) à (e'_i) transforme

coordonnées dans la base (e_i) $\xrightarrow{P_{e_i \rightarrow e'_i}^{-1}}$ coordonnées dans la base (e'_i)

Action sur une représentation matricielle

Proposition (Grifone Prop. 3.26)

Soient :

- E un espace vectoriel avec deux bases (e_i) et (e'_i)
- F un espace vectoriel avec deux bases (f_j) et (f'_j) .

Pour une application linéaire $\Phi: E \longrightarrow F$:

$$M(\Phi)_{e'_i, f'_j} = P_{f_j \rightarrow f'_j}^{-1} \cdot M(\Phi)_{e_i, f_j} \cdot P_{e_i \rightarrow e'_i}.$$

Action sur une représentation matricielle

Proposition (Grifone Prop. 3.26)

Soient :

- E un espace vectoriel avec deux bases (e_i) et (e'_i)
- F un espace vectoriel avec deux bases (f_j) et (f'_j) .

Pour une application linéaire $\Phi: E \longrightarrow F$:

$$M(\Phi)_{e'_i, f'_j} = P_{f_j \rightarrow f'_j}^{-1} \cdot M(\Phi)_{e_i, f_j} \cdot P_{e_i \rightarrow e'_i}.$$

Corollaire (Grifone Cor. 3.27)

Soient (e_i) et (e'_i) deux bases de E et $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme. Alors :

$$M(\Phi)_{e'_i} = P_{e_i \rightarrow e'_i}^{-1} \cdot M(\Phi)_{e_i} \cdot P_{e_i \rightarrow e'_i}$$

Exercice

Soit $\Phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $\Phi(x, y) = (5x - 6y, 2x - 2y)$ et considérons les deux bases suivantes :

- la base standard $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.
- la base $e'_1 = (3, 2)$ et $e'_2 = (2, 1)$.

Calculer :

- (1) la matrice de Φ dans la base (e_1, e_2) .
- (2) les matrices de passage $P_{e_i \rightarrow e'_i}$ et $P_{e'_i \rightarrow e_i}$.
- (3) la matrice de Φ dans la base (e'_1, e'_2) .

Matrices équivalentes

Définition

Deux matrices $A, A' \in M_{p,n}(K)$ sont dites **équivalentes** s'il existe deux matrices *inversibles*

$$P \in M_{p,p}(K) \quad \text{et} \quad Q \in M_{n,n}(K)$$

telles que

$$A' = P \cdot A \cdot Q.$$

Matrices équivalentes

Définition

Deux matrices $A, A' \in M_{p,n}(K)$ sont dites **équivalentes** s'il existe deux matrices *inversibles*

$$P \in M_{p,p}(K) \quad \text{et} \quad Q \in M_{n,n}(K)$$

telles que

$$A' = P \cdot A \cdot Q.$$

Exemples :

(1) $A \in M_{n,n}(K)$ inversible \iff équivalente à la matrice identité I_n .

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices semblables

Définition

Deux matrices $A, A' \in M_n(K)$ carrées sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(K)$ telle que

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Remarque : deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Exemples :

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(2) I_n et $2I_n$ sont équivalentes mais pas semblables : $P^{-1} \cdot I_n \cdot P$ est toujours I_n .