

Algèbre linéaire 2

2.3. Algèbre abstraite des applications linéaires

Réf : Grifone §3.3

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Matrices et applications linéaires $K^n \rightarrow K^p$

Rappel : notation matricielle d'un vecteur de K^n : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Matrice \rightsquigarrow application linéaire $K^n \rightarrow K^p$

Toute matrice $M \in M_{p,n}(K)$ définit une application linéaire :

$$\Phi_M: K^n \longrightarrow K^p; \quad \Phi_M(x) = M \cdot x$$

Matrices et applications linéaires $K^n \rightarrow K^p$

Rappel : notation matricielle d'un vecteur de K^n : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Matrice \rightsquigarrow application linéaire $K^n \rightarrow K^p$

Toute matrice $M \in M_{p,n}(K)$ définit une application linéaire :

$$\Phi_M: K^n \longrightarrow K^p; \quad \Phi_M(x) = M \cdot x$$

Propriété fondamentale : $\Phi_M(e_i) = \text{colonne } i \text{ de } M$.

Matrices et applications linéaires $K^n \rightarrow K^p$

Application linéaire $K^n \rightarrow K^p \rightsquigarrow$ matrice

Toute $\Phi: K^n \rightarrow K^p$ définit une matrice $M(\Phi) \in M_{p,n}(K)$ avec colonnes $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n)$.

Explicitement :

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} \Phi(e_1)_1 & \Phi(e_2)_1 & \dots & \Phi(e_n)_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(e_1)_p & \Phi(e_2)_p & \dots & \Phi(e_n)_p \end{pmatrix}$$

Matrices et applications linéaires $K^n \rightarrow K^p$

Application linéaire $K^n \rightarrow K^p \rightsquigarrow$ matrice

Toute $\Phi: K^n \rightarrow K^p$ définit une matrice $M(\Phi) \in M_{p,n}(K)$ avec colonnes $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n)$.

Explicitement :

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} \Phi(e_1)_1 & \Phi(e_2)_1 & \dots & \Phi(e_n)_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(e_1)_p & \Phi(e_2)_p & \dots & \Phi(e_n)_p \end{pmatrix}$$

Attention

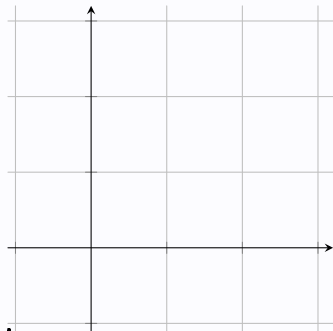
Ici on a choisi d'utiliser les bases **canoniques** de K^n et K^p .

Pour cette raison, on appelle $M(\Phi)$ **la matrice de Φ dans les bases canoniques**.

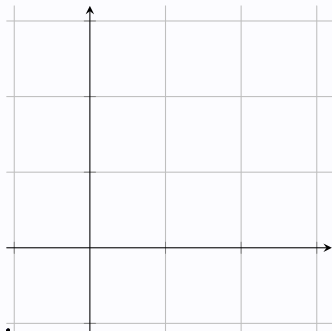
Applications linéaires dans le plan

Exercice. Déterminer les matrices (dans la base canonique de \mathbb{R}^2) des endomorphismes du plan suivants :

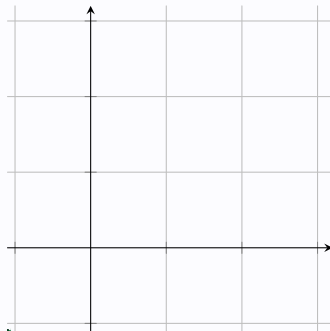
Symétrie d'axe $x = y$



Projection orthogonale
sur l'axe $x = y$



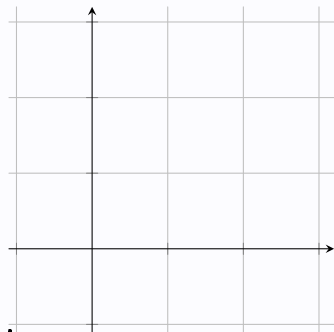
Rotation d'angle θ



Applications linéaires dans le plan

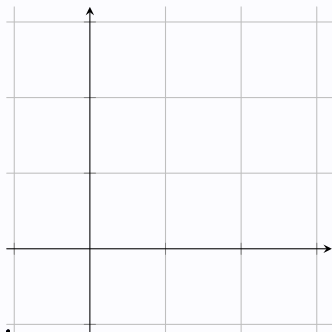
Exercice. Déterminer les matrices (dans la base canonique de \mathbb{R}^2) des endomorphismes du plan suivants :

Symétrie d'axe $x = y$



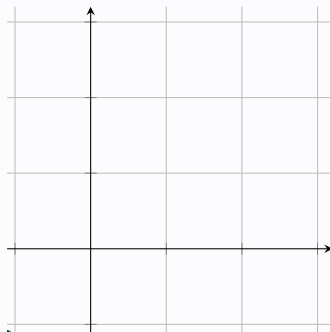
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Projection orthogonale
sur l'axe $x = y$



$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle θ



$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Matrices et applications linéaires $E \longrightarrow F$

Objectif : pour E de dimension n et F de dimension p (finie) :

Application linéaire $\Phi: E \rightarrow F \xleftrightarrow[\text{de } E \text{ et } F]{\text{choix des bases}} \text{matrice} \in M_{p,n}(K).$

Matrices et applications linéaires $E \longrightarrow F$

Objectif : pour E de dimension n et F de dimension p (finie) :

Application linéaire $\Phi: E \rightarrow F \xleftrightarrow[\text{de } E \text{ et } F]{\text{choix des bases}} \text{matrice} \in M_{p,n}(K).$

Fixons :

(a) une base (e_1, \dots, e_n) de E

(b) une base (f_1, \dots, f_p) de F

Matrices et applications linéaires $E \longrightarrow F$

Objectif : pour E de dimension n et F de dimension p (finie) :

Application linéaire $\Phi: E \rightarrow F \xleftrightarrow[\text{de } E \text{ et } F]{\text{choix des bases}} \text{matrice} \in M_{p,n}(K).$

Fixons :

(a) une base (e_1, \dots, e_n) de $E \implies$ tout $x \in E$ s'écrit uniquement comme
 $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n.$

(b) une base (f_1, \dots, f_p) de $F \implies$ tout $y \in F$ s'écrit uniquement comme
 $y = y_1 \cdot f_1 + \dots + y_p \cdot f_p.$

Application linéaire $\Phi: E \longrightarrow F \rightsquigarrow$ matrice

Écrire les images $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n)$ dans la base f_1, \dots, f_p :

$$\Phi(e_1) = a_{1,1} \cdot f_1 + \cdots + a_{p,1} \cdot f_p$$

$$\Phi(e_2) = a_{1,2} \cdot f_1 + \cdots + a_{p,2} \cdot f_p$$

$$\vdots$$

$$\Phi(e_n) = a_{1,n} \cdot f_1 + \cdots + a_{p,n} \cdot f_p$$

Application linéaire $\Phi: E \longrightarrow F \rightsquigarrow$ matrice

Écrire les images $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n)$ dans la base f_1, \dots, f_p :

$$\Phi(e_1) = a_{1,1} \cdot f_1 + \dots + a_{p,1} \cdot f_p$$

$$\Phi(e_2) = a_{1,2} \cdot f_1 + \dots + a_{p,2} \cdot f_p$$

$$\vdots$$

$$\Phi(e_n) = a_{1,n} \cdot f_1 + \dots + a_{p,n} \cdot f_p$$

Définition

La matrice de Φ dans les bases (e_i) , (f_j) est la matrice

$$M(\Phi)_{e_i, f_j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

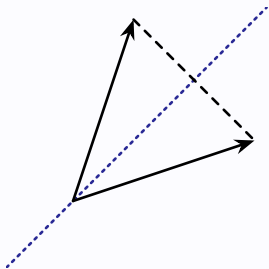
Si $E = F$ et on utilise deux fois la même base, on parle simplement de la matrice de Φ dans la base (e_i) et on la note $M(\Phi)_{e_i}$.

Applications linéaires dans le plan

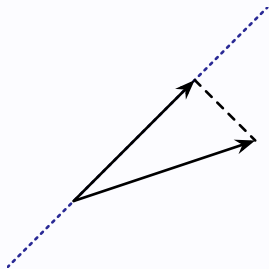
Exercice. Déterminer les matrices des applications linéaires $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ suivantes,

dans la base non standard $\{(1, 1), (-1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 :

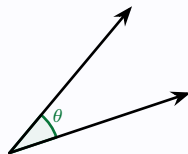
Symétrie d'axe $x = y$



Projection orthogonale
sur l'axe $x = y$



Rotation d'angle θ

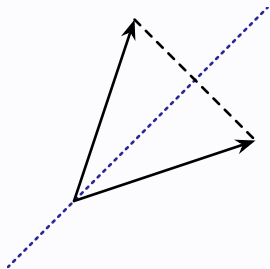


Applications linéaires dans le plan

Exercice. Déterminer les matrices des applications linéaires $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ suivantes,

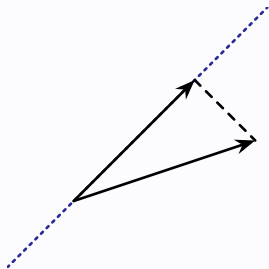
dans la base non standard $\{(1, 1), (-1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 :

Symétrie d'axe $x = y$



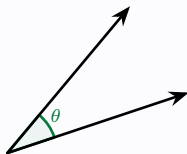
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Projection orthogonale
sur l'axe $x = y$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle θ



$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Matrice \rightsquigarrow application linéaire

Proposition

Soit E un espace vectoriel avec une base (e_1, \dots, e_n) . Alors pour tout espace vectoriel F , il y a un isomorphisme

$$L_K(E, F) \longrightarrow F^n; \quad \Phi \longmapsto (\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n)).$$

Autrement dit : une application linéaire est uniquement déterminée par ses valeurs sur une base.

Matrice \rightsquigarrow application linéaire

Prenons une matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$.

À l'aide des bases (e_1, \dots, e_n) de E et (f_1, \dots, f_p) de F , on peut définir une application linéaire

$$\Phi_{M, e_i, f_j}: E \longrightarrow F$$

caractérisée uniquement par la condition suivante :

(★) pour tout $1 \leq m \leq n$: $\Phi_{M, e_i, f_j}(e_m) = a_{1m}f_1 + a_{2m}f_2 + \dots + a_{pm}f_p$.

Matrice \rightsquigarrow application linéaire

Prenons une matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$.

À l'aide des bases (e_1, \dots, e_n) de E et (f_1, \dots, f_p) de F , on peut définir une application linéaire

$$\Phi_{M, e_i, f_j}: E \longrightarrow F$$

caractérisée uniquement par la condition suivante :

(★) pour tout $1 \leq m \leq n$: $\Phi_{M, e_i, f_j}(e_m) = a_{1m}f_1 + a_{2m}f_2 + \dots + a_{pm}f_p$.

Explicitement :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right) = \sum_{j=1}^p (a_{j,1} \cdot x_1 + \dots + a_{j,n} \cdot x_n) \cdot f_j.$$

Exercice

Considérons la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est l'application linéaire $\Phi: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ définie dans cette base par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

Et si on utilise la base

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

Matrices \longleftrightarrow applications linéaires

Proposition (Grifone Prop. 3.14)

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E et (f_1, \dots, f_p) une base de F . Alors on a deux applications linéaires

$$L_K(E, F) \longrightarrow M_{p,n}(K)$$

$$\Phi \longmapsto M(\Phi)_{e_i, f_j}$$

$$M_{p,n}(K) \longrightarrow L_K(E, F)$$

$$M \longmapsto \Phi_{M, e_i, f_j}.$$

De plus, ces applications sont réciproques l'une de l'autre.

Conséquence : $\dim(L_K(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.