

Algèbre linéaire 2

2.2. Théorème du rang

Réf : Grifone §3.2

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Rappel : applications linéaires

Application linéaire $f: E \longrightarrow F$:

$$(1) f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

$$(2) f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v).$$

Noyau : $\text{Ker}(f) = \{v \in E \text{ tel que } f(v) = \mathbf{0}\}$

Image : $\text{Im}(f) = \{w \in F \text{ tel que } \exists v \in E \text{ avec } f(v) = w\}$

Rang : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$

Images de familles libres/génératrice

Pour $S = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs dans E , on a une application linéaire

$$\phi_S: K^n \longrightarrow E; \quad \phi_S(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n.$$

Images de familles libres/génératrice

Pour $S = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs dans E , on a une application linéaire

$$\phi_S: K^n \longrightarrow E; \quad \phi_S(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n.$$

S est :	L'application ϕ_S est :	
génératrice		
libre		
une base		.

Images de familles libres/génératrice

Pour $S = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs dans E , on a une application linéaire

$$\phi_S: K^n \longrightarrow E; \quad \phi_S(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n.$$

S est :	Pour tout $v \in E$:	L'application ϕ_S est :
génératrice	$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$	
libre	si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.	
une base	\exists des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Images de familles libres/génératrice

Pour $S = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs dans E , on a une application linéaire

$$\phi_S: K^n \longrightarrow E; \quad \phi_S(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n.$$

S est :	Pour tout $v \in E$:	L'application ϕ_S est :
génératrice	$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$	surjective
libre	si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.	injective
une base	\exists des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$	un isomorphisme.

Images de familles libres/génératrice

Proposition (Grifone, Prop. 3.6)

Soit $f: E \longrightarrow F$ linéaire et $S = (v_1, \dots, v_n)$ une famille dans E . Alors :

- (1) f injective et S libre $\implies f(S) = (f(v_1), \dots, f(v_n))$ libre.
- (2) f surjective et S génératrice $\implies f(S)$ génératrice.
- (3) f isomorphisme et S une base $\implies f(S)$ une base.

Applications linéaires et dimension

Théorème du rang (Grifone, Thm. 3.8)

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors

$$\dim(E) = \operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker}(f)).$$

Si E est de dimension infinie : au moins un parmi $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ est de dimension infinie.

Applications linéaires et dimension

Théorème du rang (Grifone, Thm. 3.8)

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors

$$\dim(E) = \operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker}(f)).$$

Si E est de dimension infinie : au moins un parmi $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ est de dimension infinie.

“Application”

Problème : étant donné un sous-e.v. $F \subset \mathbb{R}^n$, le décrire par des équations linéaires

$$a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \quad \dots, \quad a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0.$$

Applications linéaires et dimension

Théorème du rang (Grifone, Thm. 3.8)

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

Si E est de dimension infinie : au moins un parmi $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ est de dimension infinie.

“Application”

Problème : étant donné un sous-e.v. $F \subset \mathbb{R}^n$, le décrire par des équations linéaires

$$a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \quad \dots, \quad a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0.$$

Autrement dit : trouver $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire telle que $F = \text{Ker}(f)$.

Théorème du rang \implies on aura besoin de (au moins) $n - \dim(F)$ équations.

Applications linéaires et dimension

Corollaire (Grifone, Cor. 3.9)

Soient E, F deux espaces vectoriel de la même dimension n et $f: E \longrightarrow F$ linéaire. Alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ isomorphisme.}$$

Mis en garde : ce résultat est **faux** en dimension ∞ .

Applications linéaires et dimension

Corollaire (Grifone, Cor. 3.9)

Soient E, F deux espaces vectoriel de la même dimension n et $f: E \longrightarrow F$ linéaire. Alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ isomorphisme.}$$

Mis en garde : ce résultat est **faux** en dimension ∞ .

Par ex. $\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]; P \mapsto P'$ est surjective, mais pas injective.

Applications linéaires et dimension

Proposition (Grifone, Thm. 3.7)

Si $\dim_K(E) = \dim_K(F) = n$, alors E et F sont **isomorphe**, c.-à-d. il existe un isomorphisme

$$f: E \longrightarrow F.$$