

Algèbre linéaire 2

Chapitre 2. Applications linéaires

Réf : Grifone §3.1, 3.2

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222
francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Applications linéaires

Définition

Soient E, F deux espaces vectoriels sur K . Une application $f: E \longrightarrow F$ est dite $(K-)$ linéaire si :

- (1) $f(v_1 +_E v_2) = f(v_1) +_F f(v_2)$ pour tout $v_1, v_2 \in E$.
- (2) $f(\lambda \cdot_E v) = \lambda \cdot_F f(v)$ pour tout $v \in E, \lambda \in K$.

Applications linéaires

Définition

Soient E, F deux espaces vectoriels sur K . Une application $f: E \longrightarrow F$ est dite **(K -)linéaire** si :

- (1) $f(v_1 +_E v_2) = f(v_1) +_F f(v_2)$ pour tout $v_1, v_2 \in E$.
- (2) $f(\lambda \cdot_E v) = \lambda \cdot_F f(v)$ pour tout $v \in E, \lambda \in K$.

Conséquences directes :

- $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.
- $f(-v) = -f(v)$.
- f préserve des combinaisons linéaires :

$$f\left(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\right) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n).$$

Exemples

(1) L'application $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2; F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exemples

(1) L'application $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Pour un point $x \in \mathbb{R}$, l'évaluation dans le point x :

$$\text{ev}: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ \text{fonctions } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \text{ev}_x(f) = f(x).$$

Exemples

(1) L'application $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Pour un point $x \in \mathbb{R}$, l'évaluation dans le point x :

$$\text{ev}: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ \text{fonctions } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \text{ev}_x(f) = f(x).$$

(3) Notons $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) = \{ f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \}$

$$\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) = \{ f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue à dérivée continue} \}.$$

Prendre la dérivée est une application linéaire

$$D: \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}); \quad f \longmapsto f'$$

Exemples

(1) L'application $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Pour un point $x \in \mathbb{R}$, l'évaluation dans le point x :

$$\text{ev}: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ \text{fonctions } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \text{ev}_x(f) = f(x).$$

(3) Notons $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) = \{ f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \}$

$$\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) = \{ f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue à dérivée continue} \}.$$

Prendre la dérivée est une application linéaire

$$D: \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}); \quad f \longmapsto f'$$

(4) Soit $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le sous-espace vectoriel (exercice !) des suites (x_1, x_2, \dots) convergentes.

Prendre la limite est une application linéaire

$$\lim_{n \rightarrow \infty}: E \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (x_n)_{n \geq 1} \longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Combinaisons de plusieurs applications linéaires

Proposition

(1) Si $f: E_1 \longrightarrow E_2$ et $g: E_2 \longrightarrow E_3$ sont des applications linéaires, leur composée l'est aussi :

$$g \circ f: E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} E_3; \quad (g \circ f)(v) = g(f(v)).$$

(2) Si $f: E \longrightarrow F$ est une application linéaire bijective, alors $f^{-1}: F \longrightarrow E$ est aussi linéaire.

Combinaisons de plusieurs applications linéaires

Proposition

(1) Si $f: E_1 \longrightarrow E_2$ et $g: E_2 \longrightarrow E_3$ sont des applications linéaires, leur composée l'est aussi :

$$g \circ f: E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} E_3; \quad (g \circ f)(v) = g(f(v)).$$

(2) Si $f: E \longrightarrow F$ est une application linéaire bijective, alors $f^{-1}: F \longrightarrow E$ est aussi linéaire.

(3) Si $f: E \longrightarrow F$ et $g: E \longrightarrow F$ sont deux applications linéaires, leur somme l'est aussi :

$$f + g: E \longrightarrow F; \quad v \longmapsto f(v) + g(v)$$

(4) Si $f: E \longrightarrow F$ est une application linéaire et $\lambda \in K$, alors $\lambda \cdot f: E \longrightarrow F; v \mapsto \lambda \cdot f(v)$ l'est aussi.

Vocabulaire

Définition

On note $\mathcal{L}_K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

Conséquence : $\mathcal{L}_K(E, F)$ est un espace vectoriel pour la $+$ et le \cdot ci-dessus.

Vocabulaire

Définition

On note $\mathcal{L}_K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

Conséquence : $\mathcal{L}_K(E, F)$ est un espace vectoriel pour la $+$ et le \cdot ci-dessus.

Définition

- Un **endomorphisme** d'un e.v. E est une application linéaire $f: E \longrightarrow E$.
On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes.
- Une application linéaire $f: E \longrightarrow F$ est appelée un **isomorphisme** si elle est bijective.

Image et noyau

Proposition (Grifone, Prop. 3.3 + 3.4)

Soit $f: E \longrightarrow F$ linéaire, alors :

- (1) pour tout sous-espace $E' \subset E$, l'image $f(E') \subset F$ est un sous-espace vectoriel.
- (2) pour tout sous-espace $F' \subset F$, l'image réciproque $f^{-1}(F') \subset E$ est un sous-espace vectoriel.

Image et noyau

Proposition (Grifone, Prop. 3.3 + 3.4)

Soit $f: E \longrightarrow F$ linéaire, alors :

- (1) pour tout sous-espace $E' \subset E$, l'image $f(E') \subset F$ est un sous-espace vectoriel.
- (2) pour tout sous-espace $F' \subset F$, l'image réciproque $f^{-1}(F') \subset E$ est un sous-espace vectoriel.

Définition

Pour $f: E \longrightarrow F$ linéaire, le **noyau** et l'**image** de f sont les sous-espaces vectoriels de E et F

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}), \quad \text{Im}(f) = f(E).$$

Si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, le **rang** de f est sa dimension

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Exemple : projection

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ la somme directe de E_1 et E_2 .

La projection sur E_1 parallèlement à E_2 est l'application

$$p: E \longrightarrow E; \quad v = v_1 + v_2 \longmapsto v_1.$$

Elle est linéaire avec

$$\text{Ker}(p) = E_2, \quad \text{Im}(p) = E_1.$$

Critère d'injectivité

Proposition (Grifone, Prop. 3.5)

Une application linéaire $f: E \longrightarrow F$ est **injective** $\iff \text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.