

# Algèbre linéaire 2

## 1.5. Dimensions de sous-espaces

**Réf :** Grifone §1.6–1.8

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

[francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr](mailto:francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr)

## Rappel : bases et dimension

Une famille de vecteurs  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$  dans  $E$  est dite :

(1) **génératrice** si tout  $v \in E$  s'écrit comme

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p.$$

(2) **libre** si :  $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p = \mathbf{0}_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$

(3) **une base** si génératrice + libre.

**Théorème d'existence** : pour tout sous-famille libre  $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$  d'une famille génératrice,

il existe une base  $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ .

Un espace vectoriel  $E$  est de **dimension finie** s'il admet une base (finie) et

$$\dim_K(E) = \text{Card}(\text{base}).$$

- **Théorème de l'échange**  $\implies$  toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.
- Si  $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim_K(E)$  :  $\mathcal{F}$  est libre  $\iff$  génératrice  $\iff$  une base.

## Dimensions de sous-espaces

“Théorème de la base incomplète” (Grifone, Cor. 1.17)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{L}$  une famille libre.

Alors il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ .

# Dimensions de sous-espaces

## “Théorème de la base incomplète” (Grifone, Cor. 1.17)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{L}$  une famille libre.

Alors il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ .

## Proposition (Grifone, Prop. 1.22 + Cor. 1.32)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Alors :

- (1)  $F$  est de dimension finie et  $\dim(F) \leq \dim(E)$ .
- (2)  $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$ .
- (3) Il existe un supplémentaire de  $F$ .

# Formule de Grassmann

## Proposition (Grifone, Prop. 1.34)

Soit  $E$  un espace vectoriel **de dimension finie** et  $F \subset E$ ,  $G \subset E$  deux sous-espaces vectoriels.  
Alors :

(1)  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$

(2) en particulier :  $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$

# Dimension et supplémentaires

## Proposition (Grifone, Prop. 1.30 + Thm. 1.33)

Soit  $E$  un espace vectoriel **de dimension finie** et  $F \subset E$ ,  $G \subset E$  deux sous-espaces vectoriels. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.
- (2)  $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$  et  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ .
- (3) Si  $(v_1, \dots, v_m)$  est une base de  $F$  et  $(w_1, \dots, w_n)$  est une base de  $G$ , alors  $(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n)$  est une base de  $E$ .

## Bases en dimension $\infty$

**Important :** les lois d'un espace vectoriel ne permettent que des combinaisons linéaires **finies**.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i v_i \quad \text{n'a pas de sens !}$$

## Bases en dimension $\infty$

**Important :** les lois d'un espace vectoriel ne permettent que des combinaisons linéaires **finies**.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i v_i \quad \text{n'a pas de sens !}$$

Néanmoins, on peut imiter la définition d'une base :

### Definition (supplémentaire)

Une famille  $\mathcal{F} = (v_\alpha)_{\alpha \in A}$  de vecteurs (pas forcément finie) dans  $E$  est dite :

- (1) **génératrice** si tout  $v \in E$  est combinaison linéaire d'un nombre **fini** de  $v_\alpha$ .
- (2) **libre** si pour  $\lambda_1 v_{\alpha_1} + \dots + \lambda_p v_{\alpha_p} = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ .
- (3) une **base** si elle est libre et génératrice.

**Exemple :**  $\mathbb{R}[x]$  admet une base  $\{x^n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ .