

Algèbre linéaire 2

1.4. Bases et dimension – résultats théoriques

Réf : Grifone §1.5–1.6

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Rappel : bases et dimension

Une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ dans E est dite :

- (1) **génératrice** - si tout $v \in E$ s'écrit comme
$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p.$$
- (2) **libre** - si pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$:
$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p = \mathbf{0}_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$
- (3) **une base** - si génératrice + libre, ou équivalent :
 - si tout $v \in E$ s'écrit **uniquement** comme
$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p.$$

Plan : dimension

Définition (provisoire)

Soit E un espace vectoriel et \mathcal{B} une base de E qui consiste en n vecteurs.
Alors on dit que E est **de dimension n** .

Plan : dimension

Définition (provisoire)

Soit E un espace vectoriel et \mathcal{B} une base de E qui consiste en n vecteurs.
Alors on dit que E est **de dimension n** .

Question 1 : la dimension, est-elle bien définie ?

La dimension est-elle indépendant du choix de la base \mathcal{B} ?

Question 2 : la dimension, est-elle toujours définie ?

Autrement dit : existe-t-il toujours une base (finie) de E ?

Question 1 : la dimension, est-elle bien définie ?

“Théorème de l'échange” (Grifone, §1.6)

Soit $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille génératrice et $\mathcal{L} = (w_1, \dots, w_m)$ une famille libre dans E .
Alors :

$$m \leq n.$$

Question 1 : la dimension, est-elle bien définie ?

“Théorème de l'échange” (Grifone, §1.6)

Soit $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille génératrice et $\mathcal{L} = (w_1, \dots, w_m)$ une famille libre dans E .
Alors :

$$m \leq n.$$

Théorème (Grifone Thm. 1.18)

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Alors

$$\text{Card}(\mathcal{B}) = \text{Card}(\mathcal{B}').$$

Dimension

Définition

Soit E un espace vectoriel.

- (1) E est **de dimension finie** s'il admet une base (finie).
- (2) Si E est de dimension finie, alors sa **dimension** est le nombre d'éléments d'une base \mathcal{B} (ou bien **tout** base) :

$$\dim_K(E) = \text{Card}(\mathcal{B}).$$

Exemples :

- (0) Par convention : $\dim_K(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

("la famille vide $\mathcal{B} = \emptyset$ est une base : $\mathbf{0}$ est la somme vide.")

- (1) $\dim_K(K^n) = n$
- (2) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.
- (3) $\dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{R})) = 4$.

Mise en garde

La dimension de E dépend du choix de $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} !

Exemple : le \mathbb{C}^2 standard est :

(a) un espace vectoriel sur \mathbb{C} , avec une base $((1, 0), (0, 1))$.

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2.$$

Mise en garde

La dimension de E dépend du choix de $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} !

Exemple : le \mathbb{C}^2 standard est :

(a) un espace vectoriel sur \mathbb{C} , avec une base $((1, 0), (0, 1))$.

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2.$$

(b) **aussi** un espace vectoriel sur \mathbb{R} , avec

$$\lambda(z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2) \quad \text{seulement pour } \lambda \in \mathbb{R} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}).$$

Dans ce cas, $(1, 0), (i, 0), (0, 1)$ et $(0, i)$ forment une base, alors :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) = 4.$$

Notation : si K est clair du contexte, on abrège $\dim(E) = \dim_K(E)$.

Conséquences

Corollaire (Grifone Cor. 1.19 + Thm. 1.21)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{F} une famille de vecteurs.

- \mathcal{F} génératrice $\implies \text{Card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.
- \mathcal{F} libre $\implies \text{Card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
- **Si $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$, alors :**

$$\mathcal{F} \text{ génératrice} \iff \mathcal{F} \text{ une base} \iff \mathcal{F} \text{ libre.}$$

Conséquences

Corollaire (Grifone Cor. 1.19 + Thm. 1.21)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{F} une famille de vecteurs.

- \mathcal{F} génératrice $\implies \text{Card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.
- \mathcal{F} libre $\implies \text{Card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
- **Si $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$, alors :**

$$\mathcal{F} \text{ génératrice} \iff \mathcal{F} \text{ une base} \iff \mathcal{F} \text{ libre.}$$

Corollaire

Soit E un espace vectoriel.

- (1) E est de dimension finie et contient une famille libre $(v_1, \dots, v_n) \implies \dim_K(E) \geq n$.
- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, E contient une famille libre $(v_1, \dots, v_n) \implies E$ est de dimension infinie.

Existence d'une base

Théorème d'existence (Grifone Thm. 1.16)

Soit $E \neq \{\mathbf{0}\}$ un espace vectoriel, \mathcal{G} une famille génératrice et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une sous-famille libre. Alors il existe une base \mathcal{B} telle que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}.$$

Conséquences

Corollaire

Un espace vectoriel E est de dimension finie si et seulement s'il existe une famille génératrice (finie) de vecteurs dans E .

“Théorème de la base incomplète” (Grifone, Cor. 1.17)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{L} une famille libre.

Alors il existe une base \mathcal{B} telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

Démonstration : choisir une base \mathcal{B}' et appliquer le théorème d'existence à $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}' \cup \mathcal{L}$.