

Algèbre linéaire 2

1.3. Bases, familles libres, génératrices

Réf : Grifone §1.4

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Rappel : espaces vectoriels abstraits

On prend toujours $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition

Un **espace vectoriel sur K** est un ensemble E muni de deux opérations :

(A) une loi d'**addition** $+: E \times E \longrightarrow E$

(B) une **multiplication par un scalaire** $K \times E \longrightarrow E$

qui satisfont 4 axiomes chacune.

Exemples classiques :

- K^n
- l'ensemble $K[x]$ des polynômes
- l'ensemble des fonctions $f: S \longrightarrow K$
- tous leurs **sous-espaces vectoriels** (= sous-ensembles non vides, stables par $+$ et \cdot)

Rappel : somme, somme directe, supplémentaire.

Pour $F \subset E$ et $G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels :

(1) $F + G = \{v \in E : \exists v_1 \in F, v_2 \in G \text{ tels que } v = v_1 + v_2\}.$

(2) $F \oplus G$: F et G sont en somme directe, c.-à-d. :

- tout $v \in F + G$ s'écrit de façon unique comme

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{avec } v_1 \in F \quad v_2 \in G.$$

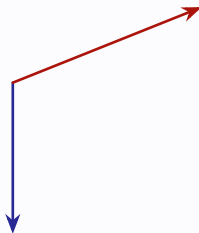
- ou équivalent : $F \cap G = \{0_E\}.$

(3) F et G sont supplémentaires si $E = F \oplus G.$

Plan

Idée de base : espace vectoriel abstrait $\xrightarrow{\text{base}}$ espace vectoriel concret ($= K^n$)

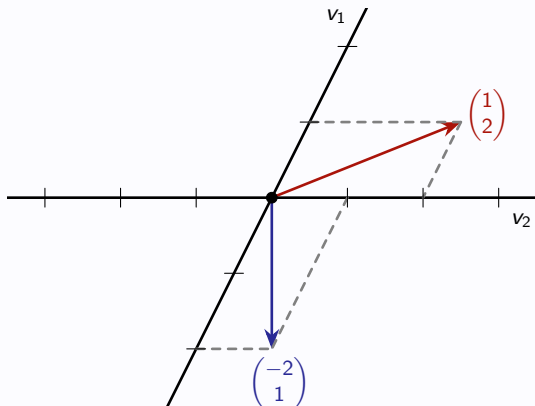
Géométriquement :



Plan

Idée de base : espace vectoriel abstrait $\xrightarrow{\text{base}}$ espace vectoriel concret ($= K^n$)

Géométriquement :



Combinaisons linéaires

Définition

Soient v_1, \dots, v_p des vecteurs dans un espace vectoriel E .

Une **combinaison linéaire** de v_1, \dots, v_p est un vecteur dans E de la forme

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \text{pour certains } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K.$$

On dit aussi que v **se décompose** sur les vecteurs v_i .

Combinaisons linéaires

Définition

Soient v_1, \dots, v_p des vecteurs dans un espace vectoriel E .

Une **combinaison linéaire** de v_1, \dots, v_p est un vecteur dans E de la forme

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \text{pour certains } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K.$$

On dit aussi que v **se décompose** sur les vecteurs v_i .

Exemple : soient $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les vecteurs donnés par les applications $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

$$f_1(x) = \cos^2(x) \quad f_2(x) = \sin^2(x) \quad f_3(x) = 1.$$

Alors f_3 est combinaison linéaire de f_1 et f_2 , puisque

$$f_3(x) = 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = (f_1 + f_2)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sous-espaces engendrés par des familles

Définition

Soit (v_1, v_2, \dots, v_p) une famille (finie) de vecteurs d'un espace vectoriel E sur K . On note

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_p) = \left\{ v \in E : v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \text{ pour certains } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K \right\}$$

le sous-espace vectoriel engendré par v_1, \dots, v_p .

Remarque : en effet, $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ est un sous-espace vectoriel.

Sous-espaces engendrés par des familles

Définition

Soit (v_1, v_2, \dots, v_p) une famille (finie) de vecteurs d'un espace vectoriel E sur K . On note

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_p) = \left\{ v \in E : v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \text{ pour certains } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K \right\}$$

le sous-espace vectoriel engendré par v_1, \dots, v_p .

Remarque : en effet, $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ est un sous-espace vectoriel.

Exemples :

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(2) si $v \neq \mathbf{0}_E$: $\text{Vect}(v)$ est la droite engendrée par v .

$$(3) \text{Vect}(v_1, \dots, v_p) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i) + \text{Vect}(v_{i+1}, \dots, v_p).$$

Familles de vecteurs génératrices

Définition

Une famille (v_1, \dots, v_p) de vecteurs dans E est dite **génératrice** si

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_p) = E.$$

Autrement dit : tout vecteur $v \in E$ est combinaison linéaire des v_1, \dots, v_p .

Exemple : soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est génératrice de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + y + z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Familles de vecteurs libres

Définition

Une famille (v_1, \dots, v_p) est **libre** si pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p = \mathbf{0}_E \quad \implies \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Sinon, la famille est appelée **liée** et ses vecteurs sont **linéairement dépendants**.

Exemple : reprenons $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors :

- (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée : $2v_1 - v_2 - v_3 - v_4 = 0$.
- (v_2, v_3, v_4) est libre.

Familles de vecteurs libres

Proposition (Grifone Prop. 1.10 + 1.11)

Soit (v_1, \dots, v_p) une famille de vecteurs dans E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) La famille est libre.
- (b) Si $v \in E$ s'écrit comme $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p$, alors les λ_i sont uniques.
- (c) Aucun v_i n'est combinaison linéaire des autres éléments.

Démonstration : tableau.

Bases

Définition

Une famille $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une **base** (de E) si elle est **génératrice** et **libre**.

Autrement dit : tout $v \in E$ **s'écrit** **uniquement** comme

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p.$$

Les scalaires λ_i sont appelés les **composantes** de v dans la base \mathcal{B} .

Bases

Définition

Une famille $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une **base** (de E) si elle est **génératrice** et **libre**.

Autrement dit : tout $v \in E$ **s'écrit** **uniquement** comme

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p.$$

Les scalaires λ_i sont appelés les **composantes** de v dans la base \mathcal{B} .

Exemples :

- La **base canonique** de \mathbb{R}^2 est donnée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bases

Définition

Une famille $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une **base** (de E) si elle est **génératrice** et **libre**.

Autrement dit : tout $v \in E$ **s'écrit** **uniquement** comme

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p.$$

Les scalaires λ_i sont appelés les **composantes** de v dans la base \mathcal{B} .

Exemples :

- La **base canonique** de \mathbb{R}^2 est donnée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de \mathbb{R}^2 : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \cdot u_1 + \frac{x-y}{2} \cdot u_2$.

Bases

Définition

Une famille $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une **base** (de E) si elle est **génératrice** et **libre**.

Autrement dit : tout $v \in E$ **s'écrit** **uniquement** comme

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_p \cdot v_p.$$

Les scalaires λ_i sont appelés les **composantes** de v dans la base \mathcal{B} .

Exemples :

- La **base canonique** de \mathbb{R}^2 est donnée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de \mathbb{R}^2 : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \cdot u_1 + \frac{x-y}{2} \cdot u_2$.
- Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base de \mathbb{R}^2 .

Quelles sont les composantes du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

Exemples : “bases canoniques”

(1) La **base canonique** de K^n est la famille

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Exemples : “bases canoniques”

(1) La **base canonique** de K^n est la famille

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

(2) La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donnée par $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Exemple dans $\mathbb{R}_2[X]$:

les composantes de $P(X) = (X + 1)^2$ dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \end{matrix}$.

Exemples : “bases canoniques”

(1) La **base canonique** de K^n est la famille

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

(2) La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donnée par $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Exemple dans $\mathbb{R}_2[X]$:

les composantes de $P(X) = (X + 1)^2$ dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \end{matrix}$.

(3) Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $M_2(K)$.