

## Algèbre linéaire 2

### 5.7 Lemme des noyaux et réduction en blocs triangulaires

**Réf :** Grifone §6.10, 6.12

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

[francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr](mailto:francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr)

## Rappel : polynômes annulateurs

Pour  $A \in M_n(K)$  une matrice et  $P(X) = a_k X^k + a_{k-1} X^{k+1} + \dots + a_0$  un polynôme dans  $K[X]$  :

$$P(A) = a_k \cdot A^k + a_{k-1} \cdot A^{k-1} + \dots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot I_n.$$

Idem pour un endomorphisme  $\Phi$ , avec  $\Phi^k = \Phi \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi$ .

Un polynôme  $P$  est dit **polynôme annulateur de  $A$**  si  $P(A) = 0$  est la matrice nulle.

**Proposition.** Si  $P$  est polynôme annulateur de  $A$ , alors  $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\}$ .

### **Théorème de Cayley–Hamilton.**

Le polynôme caractéristique  $P_A(X)$  de  $A$  est un polynôme annulateur de  $A$  :

$$P_A(A) = 0.$$

# Le polynôme minimal

## Definition

Le polynôme minimal de  $A \in M_n(K)$ , noté  $\mu_A(X)$ , est le polynôme annulateur unitaire de  $A$  de degré minimal.

## Lemma

*$\mu_A(X)$  existe et est unique. De plus tout polynôme annulateur de  $A$  est un multiple de  $\mu_A(X)$ . En particulier le polynôme caractéristique de  $A$  est un multiple de  $\mu_A(X)$ . De plus chaque facteur irréductible de  $P_A(X)$  est aussi un facteur irréductible de  $\mu_A(X)$  (mais il peut être présent dans  $\mu_A(X)$  avec multiplicité moindre que dans  $P_A(X)$ ).*

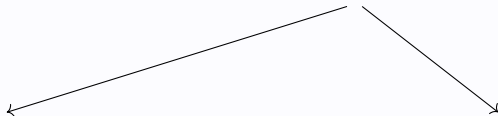
## Lemma

*Si  $\mu_A(X) = P_1(X)P_2(X)$  (avec  $\deg(P_i(X)) > 1, i = 1, 2$ ) alors  $\{0\} \subset \text{Ker}(P_i(A)) \subset K^n, i = 1, 2$  sont des inclusions strictes.*

Une matrice  $A \in M_n(K)$  est-elle diagonalisable ?



$P_A(\lambda)$  admet-il  $n$  racines (avec multiplicités) ?

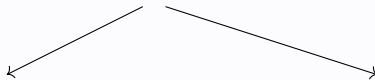


pas diagonalisable  
(seulement si  $K = \mathbb{R}$ )

Alors  $P_A(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$ .



$\forall k : 1 \leq \dim(E_{\lambda_k}) \leq m_k$ .  
Est-il de dimension  $m_k$  ?



diagonalisable :

$$A = PDP^{-1}$$

pas diagonalisable,  
mais trigonalisable.

## Rappel : trigonalisation

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

- (1) Un endomorphisme  $\Phi: E \longrightarrow E$  est dit **trigonalisable** s'il existe une base  $(e_i)$  de  $E$  tel que  $M(\Phi)_{e_i}$  est triangulaire supérieure.
- (2) Une matrice  $A \in M_n(K)$  est dite **trigonalisable** si  $A = PTP^{-1}$  avec  $T$  triangulaire supérieure et  $P$  inversible.
- (3)  $\Phi$  ou  $A$  est trigonalisable  $\iff$  son polynôme caractéristique est **scindé** :

$$P_\Phi(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \dots (\lambda_p - X)^{m_p}.$$

**Problème :** comment trigonaliser “effectivement” un endomorphisme ?

# Réduction en blocs triangulaires

## Définition

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  un endomorphisme avec un polynôme caractéristique scindé :

$$P_{\Phi}(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \dots (\lambda_p - X)^{m_p} \quad (\text{pour des } \lambda_i \text{ distincts}).$$

On appelle **espace caractéristique** associé à la valeur propre  $\lambda_i$  le sous-espace vectoriel

$$N_{\lambda_i} = \text{Ker}((\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id})^{m_i}).$$

# Réduction en blocs triangulaires

## Définition

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  un endomorphisme avec un polynôme caractéristique scindé :

$$P_{\Phi}(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \dots (\lambda_p - X)^{m_p} \quad (\text{pour des } \lambda_i \text{ distincts}).$$

On appelle **espace caractéristique** associé à la valeur propre  $\lambda_i$  le sous-espace vectoriel

$$N_{\lambda_i} = \text{Ker}((\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id})^{m_i}).$$

## Observations :

(1)  $N_{\lambda_i}$  est **stable par  $\Phi$**  :  $v \in N_{\lambda_i} \implies \Phi(v) \in N_{\lambda_i}$ .

# Réduction en blocs triangulaires

## Définition

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  un endomorphisme avec un polynôme caractéristique scindé :

$$P_{\Phi}(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \dots (\lambda_p - X)^{m_p} \quad (\text{pour des } \lambda_i \text{ distincts}).$$

On appelle **espace caractéristique** associé à la valeur propre  $\lambda_i$  le sous-espace vectoriel

$$N_{\lambda_i} = \text{Ker}((\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id})^{m_i}).$$

## Observations :

(1)  $N_{\lambda_i}$  est **stable par  $\Phi$**  :  $v \in N_{\lambda_i} \implies \Phi(v) \in N_{\lambda_i}$ .

(2)

$$E_{\lambda_i} = \text{Ker}(\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id}) \subset \text{Ker}((\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id})^2) \subset \dots \subset \text{Ker}((\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id})^{m_i}) = N_{\lambda_i}$$

(3)  $\Phi$  diagonalisable  $\implies E_{\lambda_i} = N_{\lambda_i}$ .



## Réduction de $\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$

Supposons que  $P_\Phi(X)$  est scindé et que  $\lambda \in \text{Sp}(\Phi)$  est de multiplicité  $m$ .

Considérons l'endomorphisme

$$\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda.$$

### Objectif

Trouver une base  $\mathcal{B} = (e_i)$  de  $N_\lambda$  telle que  $M(\Phi)_{(e_i)}$  est triangulaire supérieure.

## Réduction de $\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$

Supposons que  $P_\Phi(X)$  est scindé et que  $\lambda \in \text{Sp}(\Phi)$  est de multiplicité  $m$ .

Considérons l'endomorphisme

$$\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda.$$

### Objectif

Trouver une base  $\mathcal{B} = (e_i)$  de  $N_\lambda$  telle que  $M(\Phi)_{(e_i)}$  est triangulaire supérieure.

**Méthode récursive** : pour chaque  $1 \leq k \leq m$ , choisir une base  $\mathcal{B}_k$  de  $\text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id})^k$  telle que

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_m = \mathcal{B}.$$

La matrice de  $\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$  dans la base  $\mathcal{B}$  est triangulaire.

## Exercice

(1) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , avec polynôme caractéristique  $P_A(X) = (1 - X)^3$ . Trigonaliser  $A$ .

(2) Soit  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , avec polynôme caractéristique  $P_B(X) = (2 - X)^3$ . Trigonaliser  $B$ .

# Réduction en blocs triangulaires

## Méthode pour trigonaliser une matrice $A$ /endomorphisme $\Phi$ :

- (1) Pour toute valeur propre  $\lambda$  : trigonaliser l'endomorphisme  $\Phi|_{N_\lambda} : N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$  par la méthode précédente.
- (2) Pour tout  $\lambda$ , on aura donc une base  $\mathcal{B}_\lambda$  de  $N_\lambda$ .
- (3) Mettre toutes ces bases ensemble :  $\mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\lambda_p}$ .

**À faire** : pour montrer que cela donne une base de  $E$ , il nous faut le **Lemme des noyaux**.

# Plus sur les polynômes

## Définition

Deux polynômes  $P_1, P_2 \in K[X]$  sont dits **premiers entre eux** si les seuls polynômes qui divisent  $P_1$  et  $P_2$  sont les polynômes constants.

## Lemme

Si  $P_1$  et  $P_2$  sont scindés, alors ils sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.

### Exemple :

- $(X - 1)^2(X - 2)^5$  et  $(X - 3)^5$  sont premiers entre eux.
- $X^2 - 2X + 1$  et  $X^2 + 2X - 3$  **ne sont pas** premiers entre eux ( $(X - 1)$  divise les deux).

# Lemme des noyaux

## Lemme des noyaux (Grifone 6.21)

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  un endomorphisme et  $P(X) \in K[X]$  un polynôme annulateur de  $\Phi$  qui se factorise comme

$$P(X) = P_1(X)P_2(X) \cdots P_p(X)$$

avec  $P_1, \dots, P_p$  des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors

$$E = \text{Ker}(P_1(\Phi)) \oplus \text{Ker}(P_2(\Phi)) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(P_p(\Phi)).$$

## Lemme des noyaux

### Lemme des noyaux (Grifone 6.21)

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  un endomorphisme et  $P(X) \in K[X]$  un polynôme annulateur de  $\Phi$  qui se factorise comme

$$P(X) = P_1(X)P_2(X) \cdots P_p(X)$$

avec  $P_1, \dots, P_p$  des polynômes **deux à deux premiers entre eux**. Alors

$$E = \text{Ker}(P_1(\Phi)) \oplus \text{Ker}(P_2(\Phi)) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(P_p(\Phi)).$$

**Exemple.** Soit  $p: E \longrightarrow E$  un **projecteur**.

Alors  $X^2 - X = X(X - 1)$  est un polynôme annulateur et donc :

$$E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{Id}).$$

## Un autre exemple

Considérons la matrice carrée  $5 \times 5$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est  $P_A(X) = -(X - 2)^3(X - 3)^2$ .

Alors

$$\mathbb{R}^5 = \text{Ker}((A - 2 \cdot I_5)^3) \oplus \text{Ker}((A - 3 \cdot I_5)^2)$$

=

.



## Un autre exemple

Considérons la matrice carrée  $5 \times 5$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est  $P_A(X) = -(X - 2)^3(X - 3)^2$ .

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^5 &= \text{Ker}((A - 2 \cdot I_5)^3) \oplus \text{Ker}((A - 3 \cdot I_5)^2) \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \oplus \text{Vect}(e_4, e_5). \end{aligned}$$

# Réduction en blocs triangulaires

## Corollaire (du Lemme des noyaux)

Si  $\Phi: E \longrightarrow E$  est un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, alors

$$E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}.$$

# Réduction en blocs triangulaires

## Corollaire (du Lemme des noyaux)

Si  $\Phi: E \longrightarrow E$  est un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, alors

$$E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}.$$

## Corollaire (Grifone, Thm. 6.30)

Pour tout endomorphisme  $\Phi: E \longrightarrow E$  dont le polynôme caractéristique est scindé, il existe une base  $(e_i)$  de  $E$  telle que

$$M(\Phi)_{e_i} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & ? & ? \\ 0 & \ddots & ? \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & ? & ? \\ 0 & \ddots & ? \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{matrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_p & ? & ? \\ 0 & \ddots & ? \\ 0 & 0 & \lambda_p \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

## Démonstration du Lemme des noyaux pour $p = 2$

Soit

$$P(X) = P_1(X)P_2(X)$$

un polynôme annulateur de  $\Phi$  et  $P_1, P_2$  premiers entre eux.

Il nous faut le résultat suivant sur les polynômes :

### Théorème de Bézout

Deux polynômes  $P_1, P_2$  sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des polynômes  $U_1, U_2$  tels que

$$P_1(X) \cdot U_1(X) + P_2(X) \cdot U_2(X) = 1.$$

# Décomposition de Jordan

On va considérer dorénavant une matrice  $A \in M_n(K)$  dont le polynôme caractéristique est scindé, elle est donc trigonalisable.

$$\text{Soit } J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_d(K)$$

## Theorem

*Il existe une base de  $K^n$  telle que  $P^{-1}AP$  soit de la forme diagonale par blocs  $J_d(\lambda_i)$  avec*

- (1) Autant de blocs  $J_*(\lambda_i)$  que  $\dim E_\lambda$*
- (2) La taille maximale d'un bloc  $J_d(\lambda)$  égale au degré du facteur  $(X - \lambda)$  dans  $\mu_A(X)$ .*
- (3) La somme des dimensions des blocs  $J_d(\lambda_i)$  égale au degré du facteur  $(X - \lambda)$  dans  $P_A(X)$ .*