

Algèbre linéaire 2

5.7 Polynômes annulateurs et le théorème de Cayley–Hamilton

Réf : Grifone §6.9

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Une matrice $A \in M_n(K)$ est-elle diagonalisable ?



$P_A(\lambda)$ admet-il n racines (avec multiplicités) ?



pas diagonalisable
(seulement si $K = \mathbb{R}$)

Alors $P_A(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$.



$\forall k : 1 \leq \dim(E_{\lambda_k}) \leq m_k$.
Est-il de dimension m_k ?



diagonalisable :

$$A = PDP^{-1}$$

pas diagonalisable,
mais trigonalisable.

Polynômes annulateurs

Soit $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme, alors :

(1) Endomorphisme $\Phi: E \longrightarrow E \rightsquigarrow$ endomorphisme $P(\Phi) = a_k \cdot \Phi^k + \cdots + a_1 \Phi + a_0 \cdot \text{Id}$.

(2) Matrice $A \in M_n(K) \rightsquigarrow$ matrice $P(A) = a_k \cdot A^k + \cdots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot I_n$.

Rappel : si $A = M(\Phi)_{e_i}$, alors $P(A) = M(P(\Phi))_{e_i}$.

Polynômes annulateurs

Soit $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme, alors :

(1) Endomorphisme $\Phi: E \longrightarrow E \rightsquigarrow$ endomorphisme $P(\Phi) = a_k \cdot \Phi^k + \cdots + a_1 \Phi + a_0 \cdot \text{Id}$.

(2) Matrice $A \in M_n(K) \rightsquigarrow$ matrice $P(A) = a_k \cdot A^k + \cdots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot I_n$.

Rappel : si $A = M(\Phi)_{e_i}$, alors $P(A) = M(P(\Phi))_{e_i}$.

Définition

Un polynôme $P(X)$ est dite **polynôme annulateur de Φ** si $P(\Phi) = 0$ est l'endomorphisme nul.
Idem pour une matrice A .

Polynômes annulateurs

Soit $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme, alors :

(1) Endomorphisme $\Phi: E \longrightarrow E \rightsquigarrow$ endomorphisme $P(\Phi) = a_k \cdot \Phi^k + \cdots + a_1 \Phi + a_0 \cdot \text{Id}$.

(2) Matrice $A \in M_n(K) \rightsquigarrow$ matrice $P(A) = a_k \cdot A^k + \cdots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot I_n$.

Rappel : si $A = M(\Phi)_{e_i}$, alors $P(A) = M(P(\Phi))_{e_i}$.

Définition

Un polynôme $P(X)$ est dite **polynôme annulateur de Φ** si $P(\Phi) = 0$ est l'endomorphisme nul.
Idem pour une matrice A .

Remarque : pour deux polynômes P, Q :

$$(P + Q)(\Phi) = P(\Phi) + Q(\Phi)$$

$$(PQ)(\Phi) = P(\Phi) \circ Q(\Phi).$$

Par conséquent : P et Q annulateurs $\implies P + Q$ aussi.

P annulateur $\implies PQ$ aussi.

Exemples

- (1) Soit $p: E \longrightarrow E$ un **projecteur** ($p \circ p = p$), alors $X^2 - X$ est un polynôme annulateur (par définition).
- (2) TD5 exercice 3.3 : une endomorphisme $s: E \longrightarrow E$ est une **symétrie** si $s \circ s = \text{Id}$. Alors $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur (par définition).
- (3) **Exercice** : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $X^2 - 5X - 2$ est un polynôme annulateur.

Polynômes annulateurs et valeurs propres

Proposition (Grifone Prop. 6.18)

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ et $P(X) \in K[X]$ un polynôme annulateur de Φ .

Si λ est une valeur propre de Φ , alors λ est racine de P .

Théorème du Cayley–Hamilton

Théorème (Cayley–Hamilton)

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors son polynôme caractéristique $P_\Phi(X)$ est annulateur.

Version matricielle équivalente : si $A \in M_n(A)$, alors $P_A(X)$ est polynôme annulateur.

Théorème du Cayley–Hamilton

Théorème (Cayley–Hamilton)

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors son polynôme caractéristique $P_\Phi(X)$ est annulateur.

Version matricielle équivalente : si $A \in M_n(K)$, alors $P_A(X)$ est polynôme annulateur.

Remarque

Pour $A \in M_n(K)$, $P_A(X)$ n'est pas forcément son polynôme annulateur le plus petit : il peut y avoir un polynôme annulateur de degré $< n$!

Polynôme minimal

Proposition (Grifone Prop. 6.25)

Soit $\Phi \in L(E)$ un endomorphisme. Il existe un unique polynôme annulateur $M_\Phi(X)$ tel que :

- son coefficient du terme de plus haut degré est 1.
- tout polynôme annulateur est divisible par $M_\Phi(X)$.

Définition

On appelle ce polynôme $M_\Phi(X)$ le **polynôme minimal** de Φ .

Application : calcul des puissances de A

Problème

Soit $A \in M_n(K)$ et $Z(X) \in K[X]$ (par ex. $Z(X) = X^k$). Calculer la matrice $Z(A)$.

Application : calcul des puissances de A

Problème

Soit $A \in M_n(K)$ et $Z(X) \in K[X]$ (par ex. $Z(X) = X^k$). Calculer la matrice $Z(A)$.

Une méthode :

- (1) Prenons un polynôme annulateur $P(X)$ de A , par ex. son polynôme caractéristique.
- (2) Effectuer la division Euclidienne de $Z(X)$ par $P(X)$:

$$Z(X) = P(X)Q(X) + R(X)$$

avec $\deg(R) < \deg(P)$.

- (3) Alors $Z(A) = P(A) \cdot Q(A) + R(A) = R(A)$.

Il reste à calculer $R(A)$.