

Algèbre linéaire 2

5.5 Trigonalisation

Réf : Grifone §6.8

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Une matrice $A \in M_n(K)$ est-elle diagonalisable ?



$P_A(\lambda)$ admet-il n racines (avec multiplicités) ?



pas diagonalisable
(seulement si $K = \mathbb{R}$)

Alors $P_A(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$.



$\forall k : 1 \leq \dim(E_{\lambda_k}) \leq m_k$.
Est-il de dimension m_k ?



diagonalisable :

$$A = PDP^{-1}$$

pas diagonalisable

Trigonalisation

Définition

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n .

Φ est dite **trigonalisable** s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$M(\Phi)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{est triangulaire (supérieure).}$$

Trigonalisation

Définition

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n .

Φ est dite **trigonalisable** s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$M(\Phi)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{est triangulaire (supérieure).}$$

Quelques remarques :

- diagonalisable \implies trigonalisable.
- $A \in M_n(K)$ est dite **trigonalisable** \iff l'application $\Phi_A: K^n \longrightarrow K^n$ est trigonalisable.
Équivalent : il existe P inversible et T triangulaire tel que $A = PTP^{-1}$.
- T matrice triangulaire \implies les coefficients diagonaux sont ses valeurs propres.

Trigonalisation

Theorème (Grifone Thm. 6.14)

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) Φ est trigonalisable.
- (2) le polynôme caractéristique $P_\Phi(\lambda) = \det(P - \lambda \cdot \text{Id})$ est **scindé** :
il admet n racines (en comptant leurs multiplicités).

Trigonalisation

Theorème (Grifone Thm. 6.14)

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) Φ est trigonalisable.
- (2) le polynôme caractéristique $P_\Phi(\lambda) = \det(P - \lambda \cdot \text{Id})$ est **scindé** :
il admet n racines (en comptant leurs multiplicités).

Corollaire (Grifone Cor. 6.15)

Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme

$$A = PTP^{-1}$$

avec P inversible et T triangulaire (supérieure).

Trace et déterminant

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice carrée, alors sa **trace** est donnée par

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Proposition/rappel : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ pour tout $A, B \in M_n(K)$.

Trace et déterminant

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice carrée, alors sa **trace** est donnée par

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Proposition/rappel : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ pour tout $A, B \in M_n(K)$.

Proposition (Grifone, Cor. 6.16)

Soit $A \in M_n(K)$ trigonalisable avec valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors :

- (1) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.
- (2) $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Corollaire

Pour $A \in M_n(K)$, son polynôme caractéristique a la forme

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{Tr}(A) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + ? \cdot \lambda + \det(A).$$

Espace caractéristique

Définition

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme avec un polynôme caractéristique scindé :

$$P_{\Phi}(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \dots (\lambda_p - X)^{m_p} \quad (\text{pour des } \lambda_i \text{ distincts}).$$

On appelle **espace caractéristique** associé à la valeur propre λ_i le sous-espace vectoriel

$$N_{\lambda_i} = \text{Ker}((\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id})^{m_i}).$$

Espace caractéristique

Définition

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme avec un polynôme caractéristique scindé :

$$P_{\Phi}(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \dots (\lambda_p - X)^{m_p} \quad (\text{pour des } \lambda_i \text{ distincts}).$$

On appelle **espace caractéristique** associé à la valeur propre λ_i le sous-espace vectoriel

$$N_{\lambda_i} = \text{Ker}((\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id})^{m_i}).$$

Observations :

(1) N_{λ_i} est **stable par Φ** : si $v \in N_{\lambda_i}$, alors $\Phi(v) \in N_{\lambda_i}$.

Espace caractéristique

Définition

Soit $\Phi: E \longrightarrow E$ un endomorphisme avec un polynôme caractéristique scindé :

$$P_{\Phi}(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \dots (\lambda_p - X)^{m_p} \quad (\text{pour des } \lambda_i \text{ distincts}).$$

On appelle **espace caractéristique** associé à la valeur propre λ_i le sous-espace vectoriel

$$N_{\lambda_i} = \text{Ker}((\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id})^{m_i}).$$

Observations :

(1) N_{λ_i} est **stable par Φ** : si $v \in N_{\lambda_i}$, alors $\Phi(v) \in N_{\lambda_i}$.

(2) On a une suite d'inclusions

$$E_{\lambda_i} = \text{Ker}(\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id}) \subset \text{Ker}((\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id})^2) \subset \dots \subset \text{Ker}((\Phi - \lambda_i \cdot \text{Id})^{m_i}) = N_{\lambda_i}$$

(3) Φ est diagonalisable $\implies E_{\lambda_i} = N_{\lambda_i}$.

Réduction de $\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$

Supposons que $P_\Phi(X)$ est scindé et que $\lambda \in \text{Sp}(\Phi)$ est de multiplicité m .

Considérons l'endomorphisme

$$\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda.$$

Objectif

Trouver une base $\mathcal{B} = (e_i)$ de N_λ telle que $M(\Phi)_{(\mathcal{B})}$ est triangulaire supérieure.

Réduction de $\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$

Supposons que $P_\Phi(X)$ est scindé et que $\lambda \in \text{Sp}(\Phi)$ est de multiplicité m .

Considérons l'endomorphisme

$$\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda.$$

Objectif

Trouver une base $\mathcal{B} = (e_i)$ de N_λ telle que $M(\Phi)_{(e_i)}$ est triangulaire supérieure.

Méthode récursive :

- Pour tout $1 \leq k \leq m$, choisir une base \mathcal{B}_k de $\text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id})^k$ telle que

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_m = \mathcal{B}.$$

Réduction de $\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$

Supposons que $P_\Phi(X)$ est scindé et que $\lambda \in \text{Sp}(\Phi)$ est de multiplicité m .

Considérons l'endomorphisme

$$\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda.$$

Objectif

Trouver une base $\mathcal{B} = (e_i)$ de N_λ telle que $M(\Phi)_{(e_i)}$ est triangulaire supérieure.

Méthode récursive :

- Pour tout $1 \leq k \leq m$, choisir une base \mathcal{B}_k de $\text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id})^k$ telle que

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_m = \mathcal{B}.$$

- Si $e_i \in \mathcal{B}_k$, alors : $(\Phi - \lambda \cdot \text{Id})^k(e_i) = 0$.

Autrement dit : $\Phi(e_i) - \lambda e_i \in \text{Ker}((\Phi - \lambda \cdot \text{Id})^{k-1}) = \text{Vect}(\mathcal{B}_{k-1})$.

- Par conséquent : $\Phi(e_i) = \lambda e_i + \text{combinaison linéaire des vecteurs de base précédents}$.

Conclusion : la matrice de $\Phi: N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$ dans la base \mathcal{B} est triangulaire.

Exercice

(1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, avec polynôme caractéristique $P_A(X) = (1 - X)^3$. Trigonaliser A .

(2) Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, avec polynôme caractéristique $P_B(X) = (2 - X)^3$. Trigonaliser B .

Réduction en blocs triangulaires

Méthode pour trigonaliser une matrice A /endomorphisme Φ :

- (1) Pour toute valeur propre λ : trigonaliser l'endomorphisme $\Phi|_{N_\lambda} : N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$ par la méthode précédente.
- (2) Pour tout λ , on aura donc une base \mathcal{B}_λ de N_λ .
- (3) Mettre toutes ces bases ensemble : $\mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\lambda_p}$.

À faire : pour montrer que cela donne une base de E , il nous faut le **Lemme des noyaux**.