

Algèbre linéaire 2

4.5 Diagonalisation - applications 2

Réf : Grifone §6.7

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

$\Phi: E \longrightarrow E$ est-il diagonalisable ?

$$\dim(E) = n$$

$P_\Phi(X)$ admet-il n racines (avec multiplicités) ?

Alors $P_\Phi(X) = c(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_p)^{m_p}$.

$\forall k : E_{\lambda_k}$ est-il de dimension m_k ?

diagonalisable :

$$\begin{aligned} \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) \\ = m_1 + \dots + m_p = \dim(E). \end{aligned}$$

pas diagonalisable

pas diagonalisable
(seulement si $K = \mathbb{R}$)

Applications

Puissances d'une matrice A diagonalisable :

(1) Écrire $A = PDP^{-1}$ avec :

- D matrice diagonale des valeurs propres λ_i .
- P matrice dont les colonnes forment **une base** des vecteurs propres.

(2) Alors $A^n = PD^nP^{-1}$ où D^n est diagonale de coefficients λ_i^n .

Applications

Puissances d'une matrice A diagonalisable :

(1) Écrire $A = PDP^{-1}$ avec :

- D matrice diagonale des valeurs propres λ_i .
- P matrice dont les colonnes forment une base des vecteurs propres.

(2) Alors $A^n = PD^nP^{-1}$ où D^n est diagonale de coefficients λ_i^n .

Système de récurrences linéaires d'ordre 1 : $\boxed{\vec{U}_{n+1} = A \cdot \vec{U}_n}$ avec $A \in M_k(\mathbb{C})$ et $\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$

→ solution $\vec{U}_n = A^n \cdot \vec{U}_0$.

Applications

Puissances d'une matrice A diagonalisable :

(1) Écrire $A = PDP^{-1}$ avec :

- D matrice diagonale des valeurs propres λ_i .
- P matrice dont les colonnes forment **une base** des vecteurs propres.

(2) Alors $A^n = PD^nP^{-1}$ où D^n est diagonale de coefficients λ_i^n .

Système de récurrences linéaires d'ordre 1 : $\boxed{\vec{U}_{n+1} = A \cdot \vec{U}_n}$ avec $A \in M_k(\mathbb{C})$ et $\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$

→ solution $\vec{U}_n = A^n \cdot \vec{U}_0$.

Récurrence linéaire d'ordre k : $\boxed{u_{n+k} = a_0 u_n + \dots + a_{k-1} u_{n+k-1}}$ avec u_0, \dots, u_{k-1} fixés

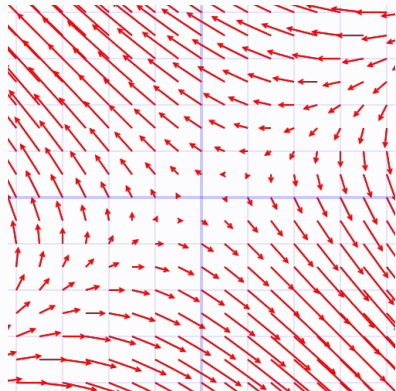
→ résoudre $\vec{U}_{n+1} = A \cdot \vec{U}_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \end{pmatrix}$ et $\vec{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix}$.

Application 3 : résoudre des systèmes différentiels linéaires

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut voir A comme un **courant** : le courant au point $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur $A\vec{x}$.



Application 3 : résoudre des systèmes différentiels linéaires

Considérons la matrice

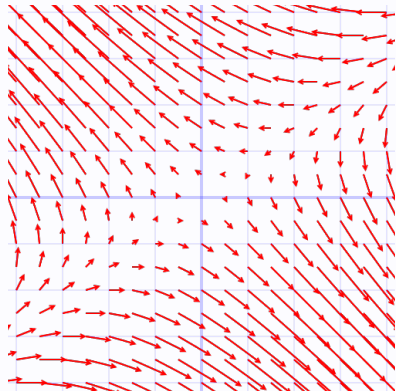
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut voir A comme un **courant** : le courant au point $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur $A\vec{x}$.

But : décrire la trajectoire $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ d'une particule dans ce courant.

Cette trajectoire est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) - 3y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -2x(t) + 2y(t) \end{cases}$$



Exemple

But : résoudre le système différentiel

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple

But : résoudre le système différentiel

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Méthode :

(1) Diagonaliser la matrice A : $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(2) Posons $\vec{v}(t) = P^{-1}\vec{x}(t)$, et notons que

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = D\vec{v}(t).$$

Autrement dit, on trouve le système

$$\begin{cases} \frac{dv_1(t)}{dt} = \lambda_1 v_1(t) \\ \frac{dv_2(t)}{dt} = \lambda_2 v_2(t). \end{cases} \quad \text{où} \quad \vec{v}(0) = P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Résoudre ce système et en déduire la solution $\vec{x}(t)$ du système original.

Application 3 : résoudre des systèmes différentiels linéaires

(A) Pour résoudre un système différentiel

$$\frac{\vec{x}(t)}{dt} = A \cdot \vec{x}(t) \quad A \in M_k(K), \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

on suit les étapes suivantes :

(1) Diagonaliser A : écrire $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

(2) Résoudre $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = D \cdot \vec{y}(t)$ composante par composante :

$$y_i(t) = c_i \cdot e^{\lambda_i t} \quad \text{pour certains } c_i \in \mathbb{C}.$$

(3) Alors $\vec{x}(t) = P\vec{y}(t)$ satisfait $\frac{\vec{x}(t)}{dt} = A \cdot \vec{x}(t)$.

(4) Déterminer les valeurs des c_i tels que $\vec{x}(0) = P\vec{y}(0)$ satisfait les conditions initiales.

Application 3 : résoudre des systèmes différentiels linéaires

(B) Toute équation différentielle linéaire d'ordre n avec coefficients constants

$$x^{(n)}(t) = a_0 x(t) + a_1 x'(t) + \cdots + a_{n-1} x^{(n-1)}(t)$$

avec conditions initiales $x(0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$ peut être réécrit sous la forme **(A)** :

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}(t) \quad \text{en posant} \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$