

Algèbre linéaire 2

5.4 Diagonalisation - applications 1

Réf : Grifone §6.7

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

$\Phi: E \longrightarrow E$ est-il diagonalisable ?

$$\dim(E) = n$$

$P_\Phi(X)$ admet-il n racines (avec multiplicités) ?

Alors $P_\Phi(X) = c(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_p)^{m_p}$.

$\forall k : E_{\lambda_k}$ est-il de dimension m_k ?

diagonalisable :

$$\begin{aligned} \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) \\ = m_1 + \dots + m_p = \dim(E). \end{aligned}$$

pas diagonalisable

pas diagonalisable
(seulement si $K = \mathbb{R}$)

Rappel : diagonaliser des matrices

Matrice **diagonalisable** $A \in M_n(K) \iff$ endomorphisme diagonalisable $K^n \longrightarrow K^n; \vec{v} \mapsto A\vec{v}$.

Explicitement : diagonaliser une matrice $A \in M_n(K) \iff$ la écrire comme $A = PDP^{-1}$ où :

- (1) D la matrice diagonale de ses valeurs propres.
- (2) P une matrice dont les colonnes forment une base de vecteurs propres.

Calculer D :

Rappel : diagonaliser des matrices

Matrice **diagonalisable** $A \in M_n(K) \iff$ endomorphisme diagonalisable $K^n \longrightarrow K^n; \vec{v} \mapsto A\vec{v}$.

Explicitement : diagonaliser une matrice $A \in M_n(K) \iff$ la écrire comme $A = PDP^{-1}$ où :

- (1) D la matrice diagonale de ses valeurs propres.
- (2) P une matrice dont les colonnes forment une base de vecteurs propres.

Calculer D :

- calculer les racines $P_A(X) = \det(A - X \cdot I_n)$.

Calculer P :

Rappel : diagonaliser des matrices

Matrice **diagonalisable** $A \in M_n(K) \iff$ endomorphisme diagonalisable $K^n \longrightarrow K^n; \vec{v} \mapsto A\vec{v}$.

Explicitement : diagonaliser une matrice $A \in M_n(K) \iff$ la écrire comme $A = PDP^{-1}$ où :

- (1) D la matrice diagonale de ses valeurs propres.
- (2) P une matrice dont les colonnes forment une base de vecteurs propres.

Calculer D :

- calculer les racines $P_A(X) = \det(A - X \cdot I_n)$.

Calculer P :

- pour toute racine λ , calculer une base de $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)$.
- prendre ces vecteurs de base comme colonnes de P .

Pas suffisamment de vecteurs propres $\longrightarrow A$ n'est pas diagonalisable.

Attention : pour une matrice réelle $A \in M_n(\mathbb{R})$, il y a deux problèmes :

(1) diagonaliser comme matrice **réelle** :

~> trouver les valeurs propres et vecteurs propres **réels**.

(2) diagonaliser comme matrice **complexe** :

~> trouver les valeurs propres et vecteurs propres **complexes**.

Attention : pour une matrice réelle $A \in M_n(\mathbb{R})$, il y a deux problèmes :

- (1) diagonaliser comme matrice **réelle** :
 \leadsto trouver les valeurs propres et vecteurs propres **réels**.
- (2) diagonaliser comme matrice **complexe** :
 \leadsto trouver les valeurs propres et vecteurs propres **complexes**.

Lemme

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, vue comme matrice complexe. Alors :

(a) $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre $\iff \bar{\lambda}$ une valeur propre.

(b) $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ vecteur propre de valeur propre $\lambda \iff \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$ vecteur propre de valeur propre $\bar{\lambda}$.

Trois applications

- (1) Calculer des puissances d'une matrice.
- (2) Résoudre des suites récurrentes.
- (3) 29.11 : résoudre des équations différentielles.

Application : puissances des matrices

Exercice : considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

But : calculer la matrice A^{2024} .

- (1) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
Calculer aussi P^{-1} .
- (2) Comment A^{2024} s'exprime en termes de P et D ?
- (3) Calculer D^{2024} , puis A^{2024} .

Calcul des puissances d'une matrice

Soit $A \in M_n(K)$ diagonalisable. Pour calculer une puissance A^k :

(1) Trouver une base de vecteurs propres et écrire $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(2) Alors

$$A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) = PD^k P^{-1}$$

avec

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Application : racines carrées des matrices

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Pour trouver une matrice B telle que $B^2 = A$:

Application : racines carrées des matrices

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Pour trouver une matrice B telle que $B^2 = A$:

- (1) Trouver une base de vecteurs propres et écrire $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- (2) Posons $B = PD'P^{-1}$ avec D' de la forme

$$D' = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Remarque : selon la choix des signes, il y aura **au moins** 2^n possibilités pour D' .

- (3) Alors

$$B^2 = (PD'P^{-1})(PD'P^{-1}) = PD'^2P^{-1} = A.$$

Application 2 : résoudre des suites récurrentes

Exercice : considérons la suite de Fibonacci (u_n) , définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \\ u_0 = u_1 = 1. \end{cases}$$

(1) Calculer les termes u_2, u_3, u_4, u_5 .

(2) En introduisant $\vec{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, écrire la relation de récurrence sous la forme

$$\vec{U}_{n+1} = A\vec{U}_n \quad \text{avec } A \in M_2(\mathbb{R}) \text{ 'a préciser.}$$

Par récurrence : $\forall n \geq 1 : \vec{U}_n = A^n \vec{U}_0$.

(3) Justifier que A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$, et déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

(4) Soit $n \geq 1$. Expliciter A^n et en déduire la valeur de U_n , puis celle de u_n .

Application 2 : résoudre des suites récurrentes

(A) Pour résoudre un système de suites récurrentes

$$\vec{U}_{n+1} = A \cdot \vec{U}_n \quad A \in M_k(K), \quad \vec{U}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

il faut calculer les puissances A^n de la matrice A comme avant :

- (1) diagonaliser A : écrire $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
- (2) calculer $A^n = PD^nP^{-1}$.

Application 2 : résoudre des suites récurrentes

(A) Pour résoudre un système de suites récurrentes

$$\vec{U}_{n+1} = A \cdot \vec{U}_n \quad A \in M_k(K), \quad \vec{U}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

il faut calculer les puissances A^n de la matrice A comme avant :

- (1) diagonaliser A : écrire $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
- (2) calculer $A^n = PD^nP^{-1}$.

(B) Relation de récurrence linéaire d'ordre $k \rightarrow$ réécrire comme **(A)** en posant $\vec{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} u_{n+k} = a_0 u_n + \dots + a_{k-1} u_{n+k-1} \\ u_0 = x_0, \quad \dots, \quad u_{k-1} = x_{k-1} \end{cases} \iff \vec{U}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \end{pmatrix} \vec{U}_n, \quad \vec{U}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$$