

# Algèbre linéaire 2

## 5.3 Diagonalisation

**Réf :** Grifone §6.6

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

[francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr](mailto:francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr)

# Rappel

Pour un endomorphisme  $\Phi: E \longrightarrow E$  :

(1)  $\lambda \in K$  est dit **valeur propre** de  $\Phi$  s'il existe un vecteur **non nul**  $v \in E \setminus \{0\}$  tel que

$$\Phi(v) = \lambda v.$$

(2) dans ce cas,  $v \in E \setminus \{0\}$  est dit **vecteur propre** de valeur propre  $\lambda$ .

(3)  $E_\lambda = \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id})$  est l'**espace propre** associé à la valeur propre  $\lambda$ .

## Résultats :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  distincts  $\implies E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$  sont en somme directe.
- Pour  $E$  de dimension  $n < \infty$  :
  - **Polynôme caractéristique** :  $P_\Phi(X) = \det(\Phi - X \cdot \text{Id})$  (de degré  $n$ ).
  - **Spectre**  $\text{Sp}_K(\Phi) = \{\text{valeurs propres}\} = \{\text{racines de } P_\Phi(X)\} \subset K$ .

## Rappel sur les polynômes

Afin d'étudier le polynôme caractéristique  $P_\Phi(X)$  et ses racines, on rappelle :

### Theorème (division Euclidienne des polynômes)

Soient  $A(X), B(X) \in K[X]$  avec  $B(X) \neq 0$ .

Alors il existe un unique couple de  $Q(X), R(X) \in K[X]$  tel que

$$A(X) = B(X) \cdot Q(X) + R(X)$$

avec  $\text{degré}(R) < \text{degré}(B)$ .

**Méthode :** division posée.

## Rappel sur les polynômes

Afin d'étudier le polynôme caractéristique  $P_\Phi(X)$  et ses racines, on rappelle :

### Theorème (division Euclidienne des polynômes)

Soient  $A(X), B(X) \in K[X]$  avec  $B(X) \neq 0$ .

Alors il existe un unique couple de  $Q(X), R(X) \in K[X]$  tel que

$$A(X) = B(X) \cdot Q(X) + R(X)$$

avec  $\text{degré}(R) < \text{degré}(B)$ .

**Méthode :** division posée.

### Corollaire : racines d'un polynôme

Pour  $P(X) \in K[X]$  et  $r \in K$

$$P(X) = (X - r) \cdot Q(X) + \text{constante}.$$

## Rappel sur les polynômes

Afin d'étudier le polynôme caractéristique  $P_\Phi(X)$  et ses racines, on rappelle :

### Theorème (division Euclidienne des polynômes)

Soient  $A(X), B(X) \in K[X]$  avec  $B(X) \neq 0$ .

Alors il existe un unique couple de  $Q(X), R(X) \in K[X]$  tel que

$$A(X) = B(X) \cdot Q(X) + R(X)$$

avec  $\deg(R) < \deg(B)$ .

**Méthode :** division posée.

### Corollaire : racines d'un polynôme

Pour  $P(X) \in K[X]$  et  $r \in K$

$$P(X) = (X - r) \cdot Q(X) + P(r).$$

Alors  $r$  est racine de  $P(X) \iff (X - r)$  divise  $P(X)$ .

# Rappel sur les polynômes

## Définition

Soit  $P(X) \in K[X]$  et  $r \in K$ . Alors  $r$  est dite racine de **multiplicité  $m$**  de  $P$  si

$$P(X) = (X - r)^m \cdot Q(X) \quad \text{et } Q(r) \neq 0.$$

## Critère différentiel pour la multiplicité

$r$  est racine de multiplicité  $m$  de  $P(X)$  ssi

$$P(r) = 0, \quad P'(r) = 0, \quad \dots \quad P^{(m-1)}(r) = 0, \quad \text{et } P^{(m)}(r) \neq 0.$$

# Rappel sur les polynômes

## Définition

Soit  $P(X) \in K[X]$  et  $r \in K$ . Alors  $r$  est dite racine de **multiplicité**  $m$  de  $P$  si

$$P(X) = (X - r)^m \cdot Q(X) \quad \text{et } Q(r) \neq 0.$$

## Critère différentiel pour la multiplicité

$r$  est racine de multiplicité  $m$  de  $P(X)$  ssi

$$P(r) = 0, \quad P'(r) = 0, \quad \dots \quad P^{(m-1)}(r) = 0, \quad \text{et } P^{(m)}(r) \neq 0.$$

## Définition

Un polynôme  $P(X) \in K[X]$  est **scindé** s'il admet des racines  $r_i \in K$  de multiplicité  $m_i$  telles que

$$P(X) = c \cdot (X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_p)^{m_p} \quad \text{avec } c \in K.$$

Théorème D'Alembert  $\implies$  sur  $K = \mathbb{C}$ , tout polynôme est scindé.

# Dimensions des espaces propres

## Proposition (Grifone Prop. 6.12 )

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Si  $\lambda$  est une racine de  $P_\Phi$  de multiplicité  $m$ , alors  $\dim(E_\lambda) \leq m$ .

**Cas particulier :** si  $\lambda$  est une racine **simple** de  $P_\Phi$  (= de multiplicité 1), alors  $\dim(E_\lambda) = 1$ .



# Dimensions des espaces propres

## Proposition (Grifone Prop. 6.12 )

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Si  $\lambda$  est une racine de  $P_\Phi$  de multiplicité  $m$ , alors  $\dim(E_\lambda) \leq m$ .

**Cas particulier :** si  $\lambda$  est une racine **simple** de  $P_\Phi$  (= de multiplicité 1), alors  $\dim(E_\lambda) = 1$ .

## Corollaire (voir Grifone Thm. 6.13 )

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les racines de  $P_\Phi(X)$ , avec multiplicités  $m_1, \dots, m_p$ . Alors :

$$\dim(E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) \leq m_1 + \dots + m_p \leq \dim(E).$$

# Le problème de diagonalisation

## Définition

Un endomorphisme  $\Phi: E \longrightarrow E$  est **diagonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que tout  $v_i \in \mathcal{B}$  est un vecteur propre de  $\Phi$ .

**Autrement dit** : la matrice de  $\Phi$  dans la base  $\mathcal{B}$  est une matrice diagonale.

# Le problème de diagonalisation

## Définition

Un endomorphisme  $\Phi: E \longrightarrow E$  est **diagonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que tout  $v_i \in \mathcal{B}$  est un vecteur propre de  $\Phi$ .

**Autrement dit** : la matrice de  $\Phi$  dans la base  $\mathcal{B}$  est une matrice diagonale.

## Proposition (Grifone Thm. 6.10 )

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  un endomorphisme et  $\text{Sp}_K(\Phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ .

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\Phi: E \longrightarrow E$  est diagonalisable.
- (2)  $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = E$ .
- (3)  $\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = \dim(E)$ .

$\Phi: E \longrightarrow E$  est-il diagonalisable ?

$$\dim(E) = n$$

$P_\Phi(X)$  admet-il  $n$  racines (avec multiplicités) ?

Alors  $P_\Phi(X) = c(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_p)^{m_p}$ .

$\forall k : E_{\lambda_k}$  est-il de dimension  $m_k$  ?

diagonalisable :

$$\begin{aligned} \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) \\ = m_1 + \dots + m_p = \dim(E). \end{aligned}$$

pas diagonalisable

pas diagonalisable  
(seulement si  $K = \mathbb{R}$ )

# Diagonaliser des matrices

## Définition

Une matrice  $A \in M_n(K)$  est dite **diagonalisable** si l'application linéaire associée

$$\Phi_A: K^n \longrightarrow K^n; \vec{v} \mapsto A\vec{v}$$

est diagonalisable.

**Explicitement** : diagonaliser une matrice  $A$

= trouver une base de vecteurs propres de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}.$$

# Diagonaliser des matrices

## Définition

Une matrice  $A \in M_n(K)$  est dite **diagonalisable** si l'application linéaire associée

$$\Phi_A: K^n \longrightarrow K^n; \vec{v} \mapsto A\vec{v}$$

est diagonalisable.

**Explicitement** : diagonaliser une matrice  $A$

= trouver une base de vecteurs propres de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}.$$

= écrire la matrice  $A$  comme produit matriciel

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$

**Attention :** pour une matrice réelle  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , il y a deux problèmes :

(1) diagonaliser comme matrice **réelle** :

~> trouver des valeurs propres et vecteurs propres **réelles**.

(2) diagonaliser comme matrice **complexe** :

~> trouver des valeurs propres et vecteurs propres **complexes**.

**Attention :** pour une matrice réelle  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , il y a deux problèmes :

(1) diagonaliser comme matrice **réelle** :

$\leadsto$  trouver des valeurs propres et vecteurs propres **réelles**.

(2) diagonaliser comme matrice **complexe** :

$\leadsto$  trouver des valeurs propres et vecteurs propres **complexes**.

### Lemme

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , vue comme matrice complexe. Alors :

(a)  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre  $\implies \bar{\lambda}$  aussi une valeur propre.

(b)  $(z_1, \dots, z_n)$  un vecteur propre de valeur propre  $\lambda$   
 $\implies (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$  un vecteur propre de valeur propre  $\bar{\lambda}$ .