

# Algèbre linéaire 2

## 5.2 Polynôme caractéristique

**Réf :** Grifone §6.2-6.5

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

[francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr](mailto:francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr)

# Rappel

Pour un endomorphisme  $\Phi: E \longrightarrow E$  :

(1) **valeur propre** de  $\Phi$  :  $\lambda \in K$  tel qu'il existe un vecteur **non nul**  $v \in E \setminus \{0\}$  tel que

$$\Phi(v) = \lambda v.$$

(2) dans ce cas,  $v \in E \setminus \{0\}$  est dit **vecteur propre** de valeur propre  $\lambda$ .

(3) **Spectre** :  $\text{Sp}_K(\Phi) = \{\text{valeurs propres de } \Phi\}$ .

(4) **Espace propre** :  $E_\lambda = \{v \in E : \Phi(v) = \lambda v\} = \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id})$ .

<b>Question</b> : comment trouver les valeurs propres et vecteurs propres de $\Phi$ ?
---

# Somme et somme directe de plusieurs sous-espaces

## Definition

Soient  $E_1, \dots, E_n \subset E$  des sous-espaces vectoriels. Leur **somme** est le sous-espace vectoriel

$$E_1 + \dots + E_n = \left\{ v \in E : v = v_1 + \dots + v_n \text{ avec } v_1 \in E_1, \dots, v_n \in E_n \right\}.$$

On dit que  $E_1, \dots, E_n$  sont **en somme directe** si tout vecteur  $v \in E_1 + \dots + E_n$  se décompose **uniquement** en somme

$$v = v_1 + \dots + v_n \quad \text{avec } v_i \in E_i.$$

Dans ce cas, on note  $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$  la somme de  $E_1, \dots, E_n$ .

# Somme et somme directe de plusieurs sous-espaces

## Proposition (Grifone Thm. 1.38 )

Soient  $E_1, \dots, E_n \subset E$  des sous-espaces vectoriels. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $E_1, \dots, E_n$  sont en somme directe.
- (2) Si  $v_1 \in E_1, \dots, v_n \in E_n$  sont tels que  $v_1 + \dots + v_n = \mathbf{0}_E$  dans  $E$ , alors  $v_1 = \dots = v_n = \mathbf{0}$ .
- (3) Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , soit  $(v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i})$  une famille libre dans  $E_i$ . Alors la famille

$$(v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,m_2}, \dots, v_{n,1}, \dots, v_{n,m_n})$$

est une famille libre de  $E$ .

## Corollaire (Grifone Thm. 1.38 + Cor. 1.39 )

Si  $E_1, \dots, E_n \subset E$  sont en somme directe et  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$  sont des bases de  $E_1, \dots, E_n$ , alors  $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$  est une base de  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$  et

$$\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n).$$

# Espaces propres

## Proposition (Grifone Prop. 6.9)

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des valeurs propres distinctes de  $\Phi$ .  
Alors les espaces propres  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$  sont en somme directe.

# Espaces propres

## Proposition (Grifone Prop. 6.9)

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des valeurs propres distinctes de  $\Phi$ .  
Alors les espaces propres  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$  sont en somme directe.

## Corollaire

Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des valeurs propres distinctes de  $\Phi$ . Alors

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_n}) = \dim(E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}) \leq \dim(E).$$

En particulier : (nombre de valeurs propres différentes de  $\Phi$ )  $\leq \dim(E)$ .

## Trouver des valeurs propres

Pour  $\lambda \in K$ , les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\lambda$  est une valeur propre de  $\Phi$ .
- (2)  $E_\lambda = \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}) \neq \{\mathbf{0}\}$ .

## Trouver des valeurs propres

Pour  $\lambda \in K$ , les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\lambda$  est une valeur propre de  $\Phi$ .
- (2)  $E_\lambda = \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}) \neq \{\mathbf{0}\}$ .
- (3)  $\Phi - \lambda \cdot \text{Id}$  n'est pas inversible.
- (4)  $\det(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}) = 0$ .



# Trouver des valeurs propres

Pour  $\lambda \in K$ , les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\lambda$  est une valeur propre de  $\Phi$ .
- (2)  $E_\lambda = \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}) \neq \{\mathbf{0}\}$ .
- (3)  $\Phi - \lambda \cdot \text{Id}$  n'est pas inversible.
- (4)  $\det(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}) = 0$ .

## Définition

Le **polynôme caractéristique** de  $\Phi$  est l'application

$$P_\Phi: K \longrightarrow K; \quad P_\Phi(\lambda) = \det(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}).$$

## Proposition fondamentale

$\lambda \in K$  est valeur propre de  $\Phi$  si et seulement si  $P_\Phi(\lambda) = 0$ .

# Polynôme caractéristique

## Proposition (Grifone Prop. 6.3 )

Si  $\Phi: E \longrightarrow E$  et  $\dim(E) = n$ , alors  $P_\Phi$  est bien un polynôme d'ordre  $n$  avec coefficients dans  $K$ .

# Polynôme caractéristique

## Proposition (Grifone Prop. 6.3 )

Si  $\Phi: E \longrightarrow E$  et  $\dim(E) = n$ , alors  $P_\Phi$  est bien un polynôme d'ordre  $n$  avec coefficients dans  $K$ .

## Corollaire

Si  $\dim_K(E) = n$ , un endomorphisme  $\Phi: E \longrightarrow E$  admet **au plus**  $n$  valeurs propres différentes.

## Corollaire

Soit  $K = \mathbb{C}$  et  $\Phi: E \longrightarrow E$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.  
Alors  $\Phi$  admet une valeur propre.

## Exemple

Soit  $\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  donné par la matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$P_{\Phi}(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 2 \\ -3 & -\lambda & 2 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

## Exemple

Soit  $\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  donné par la matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$P_{\Phi}(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 2 \\ -3 & -\lambda & 2 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1).$$

$\implies$   $\Phi$  admet 1 comme seule valeur propre :  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi) = \{1\}$ .

## Exemple

Soit  $\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  donné par la matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$P_{\Phi}(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 2 \\ -3 & -\lambda & 2 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + 1).$$

$\implies$   $\Phi$  admet 1 comme seule valeur propre :  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi) = \{1\}$ .

Soit  $\Psi: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$  donné par la même matrice  $A$  (vue comme matrice complexe).

$$P_{\Psi}(\lambda) = P_{\Phi}(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 + 1) \quad (\text{même déterminant})$$

$\implies$  Les valeurs propres de  $\Psi$  sont 1,  $i$  et  $-i$  :  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Psi) = \{1, i, -i\}$ .

## Rappel sur les polynômes

Afin d'étudier le polynôme caractéristique  $P_\Phi(\lambda)$  et ses racines, on rappelle :

### Theorème (division Euclidienne des polynômes)

Soient  $A(X), B(X) \in K[X]$  avec  $B(X) \neq 0$ .

Alors il existe un unique couple de  $Q(X), R(X) \in K[X]$  tel que

$$A(X) = B(X) \cdot Q(X) + R(X)$$

avec  $\text{degré}(R) < \text{degré}(B)$ .

**Méthode :** division posée.

## Rappel sur les polynômes

Afin d'étudier le polynôme caractéristique  $P_\Phi(\lambda)$  et ses racines, on rappelle :

### Theorème (division Euclidienne des polynômes)

Soient  $A(X), B(X) \in K[X]$  avec  $B(X) \neq 0$ .

Alors il existe un unique couple de  $Q(X), R(X) \in K[X]$  tel que

$$A(X) = B(X) \cdot Q(X) + R(X)$$

avec  $\text{degré}(R) < \text{degré}(B)$ .

**Méthode :** division posée.

### Corollaire : racines d'un polynôme

Pour  $P(X) \in K[X]$  et  $r \in K$

$$P(X) = (X - r) \cdot Q(X) + \text{constante}.$$



## Rappel sur les polynômes

Afin d'étudier le polynôme caractéristique  $P_\Phi(\lambda)$  et ses racines, on rappelle :

### Theorème (division Euclidienne des polynômes)

Soient  $A(X), B(X) \in K[X]$  avec  $B(X) \neq 0$ .

Alors il existe un unique couple de  $Q(X), R(X) \in K[X]$  tel que

$$A(X) = B(X) \cdot Q(X) + R(X)$$

avec  $\deg(R) < \deg(B)$ .

**Méthode :** division posée.

### Corollaire : racines d'un polynôme

Pour  $P(X) \in K[X]$  et  $r \in K$

$$P(X) = (X - r) \cdot Q(X) + P(r).$$

Alors  $r$  est racine de  $P(X) \iff (X - r)$  divise  $P(X)$ .

# Rappel sur les polynômes

## Définition

Soit  $P(X) \in K[X]$  et  $r \in K$ . Alors  $r$  est dite racine de **multiplicité  $m$**  de  $P$  si

$$P(X) = (X - r)^m \cdot Q(X) \quad \text{et } Q(r) \neq 0.$$

## Critère différentiel pour la multiplicité

$r$  est racine de multiplicité  $m$  de  $P(X)$  ssi

$$P(r) = 0, \quad P'(r) = 0, \quad \dots \quad P^{(m-1)}(r) = 0, \quad \text{et } P^{(m)}(r) \neq 0.$$

# Rappel sur les polynômes

## Définition

Soit  $P(X) \in K[X]$  et  $r \in K$ . Alors  $r$  est dite racine de **multiplicité**  $m$  de  $P$  si

$$P(X) = (X - r)^m \cdot Q(X) \quad \text{et } Q(r) \neq 0.$$

## Critère différentiel pour la multiplicité

$r$  est racine de multiplicité  $m$  de  $P(X)$  ssi

$$P(r) = 0, \quad P'(r) = 0, \quad \dots \quad P^{(m-1)}(r) = 0, \quad \text{et } P^{(m)}(r) \neq 0.$$

## Définition

Un polynôme  $P(X) \in K[X]$  est **scindé** s'il admet des racines  $r_i \in K$  de multiplicité  $m_i$  telles que

$$P(X) = c \cdot (X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_p)^{m_p} \quad \text{avec } c \in K.$$

Théorème D'Alembert  $\implies$  sur  $K = \mathbb{C}$ , tout polynôme est scindé.

# Espaces propres

Soit  $\lambda \in \text{Sp}_K(\Phi)$  une valeur propre de  $\Phi: E \longrightarrow E$ .

$$E_\lambda = \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}).$$

Trouver les vecteurs propres  $\iff$  résoudre le système linéaire  $(\Phi - \lambda \cdot \text{Id})(v) = 0$ .

**Note :** il y aura une infinité de solutions, sinon  $\lambda$  n'était pas une valeur propre !

## Espaces propres

Soit  $\lambda \in \text{Sp}_K(\Phi)$  une valeur propre de  $\Phi: E \longrightarrow E$ .

$$E_\lambda = \text{Ker}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}).$$

Trouver les vecteurs propres  $\iff$  résoudre le système linéaire  $(\Phi - \lambda \cdot \text{Id})(v) = 0$ .

**Note :** il y aura une infinité de solutions, sinon  $\lambda$  n'était pas une valeur propre !

### Proposition (Grifone Prop. 6.12 )

Soit  $\lambda$  une racine de  $P_\Phi$  de multiplicité  $m$ , alors  $\dim(E_\lambda) \leq m$ .

**Cas particulier :** si  $\lambda$  est une racine **simple** de  $P_\Phi$  (= de multiplicité 1), alors  $\dim(E_\lambda) = 1$ .