

Algèbre linéaire 2

1.2. Sous-espaces vectoriels

Réf. : Grifone §1.3, 1.8

Enseignant : Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Rappel : espaces vectoriels abstraits

On prend toujours $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition

Un **espace vectoriel sur K** est un ensemble E muni de deux opérations :

(A) une loi d'**addition** $+: E \times E \longrightarrow E$

(B) une **multiplication par un scalaire** $K \times E \longrightarrow E$

qui satisfont 4 axiomes chacune.

Exemples classiques :

- K^n
- l'ensemble des matrices
- l'ensemble $K[x]$ des polynômes
- l'ensemble des fonctions $f: S \longrightarrow K$.

But : construire d'autres exemples **sans avoir à vérifier tous ces 8 axiomes**.

Sous-espaces vectoriels

Proposition (Grifone Prop. 1.4)

Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble tel que :

- (1) $F \neq \emptyset$.
- (2) (a) si $u, v \in F$, alors $u + v \in F$.
(b) si $v \in F$ et $\lambda \in K$, alors $\lambda \cdot v \in F$.

Alors la restriction des deux lois de E à F fait de F un espace vectoriel.

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \subset & E \times E \\ \downarrow + & & \downarrow + \\ F & \subset & E \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} K \times F & \subset & K \times E \\ \downarrow \cdot & & \downarrow \cdot \\ F & \subset & E \end{array}$$

Définition

Dans ce cas, F est appelé un **sous-espace vectoriel** de E .

Exemples et non-exemples

- (1) Pour $v \in E$, la droite vectorielle engendrée par v

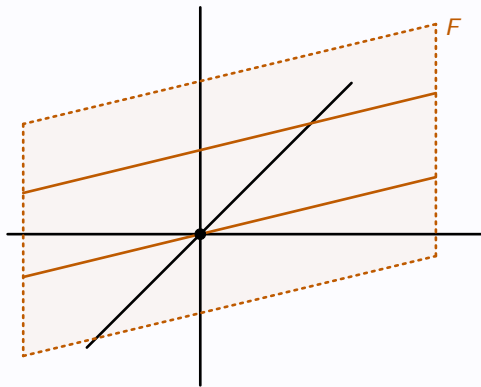
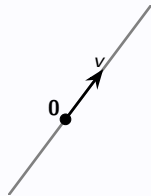
$$F = \{w \in E : \exists \lambda \in K \text{ tel que } w = \lambda v\}.$$

est un sous-espace vectoriel.

- (2) Le sous-ensemble de \mathbb{R}^3

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_2 = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel.



Exemples et non-exemples

- (1) Pour $v \in E$, la droite vectorielle engendrée par v

$$F = \{w \in E : \exists \lambda \in K \text{ tel que } w = \lambda v\}.$$

est un sous-espace vectoriel.

- (2) Le sous-ensemble de \mathbb{R}^3

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_2 = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel.

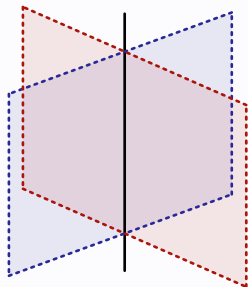
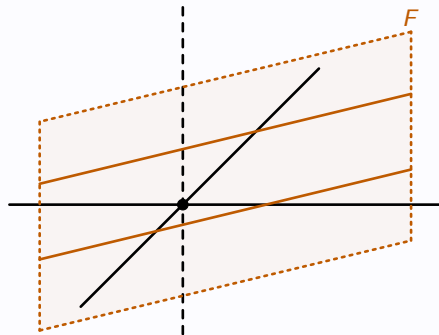
- (3) Par contre,

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_2 = 1\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel,

- (4) et non plus

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 - 2x_2^2 = 0\}.$$



Constructions de sous-espaces vectoriels

Proposition (Exercice 7(1))

Soient $F \subset E$ et $G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Alors $F \cap G \subset E$ est un sous-espace vectoriel.

Constructions de sous-espaces vectoriels

Proposition (Exercice 7(1))

Soient $F \subset E$ et $G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Alors $F \cap G \subset E$ est un sous-espace vectoriel.

Exemple : l'intersection des deux plans

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 = 0\}$$

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$$

est le sous-espace vectoriel

$$F \cap G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Constructions de sous-espaces vectoriels

Proposition (Exercice 7(1))

Soient $F \subset E$ et $G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Alors $F \cap G \subset E$ est un sous-espace vectoriel.

Exemple : l'intersection des deux plans

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 = 0\} \qquad G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$$

est le sous-espace vectoriel

$$F \cap G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

En résolvant ce système : $F \cap G$ est la droite vectorielle engendrée par $(2, 1, 4)$.

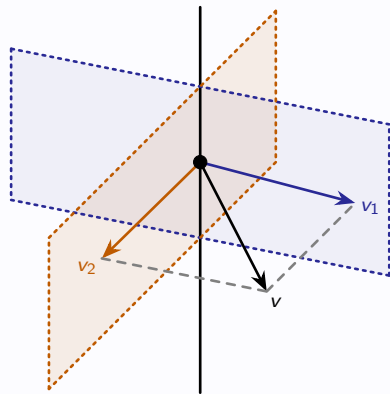
Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition

Soient $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels. La **somme** de F et G est

$$F + G = \{v \in E : \exists v_1 \in F, \exists v_2 \in G \text{ tel que } v = v_1 + v_2\}.$$

C'est bien un sous-espace vectoriel (Exercice 7(2)).



Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition

Soient $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels. La **somme** de F et G est

$$F + G = \{v \in E : \exists v_1 \in F, \exists v_2 \in G \text{ tel que } v = v_1 + v_2\}.$$

C'est bien un sous-espace vectoriel (Exercice 7(2)).

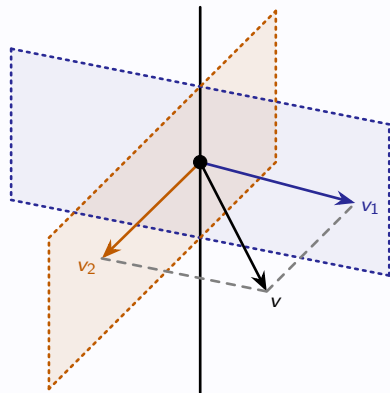
Remarque

Si $v \in F + G$, c'est possible qu'il existe deux paires différents

$$v_1 \in F, v_2 \in G \quad \text{et} \quad w_1 \in F, w_2 \in G$$

tels que

$$v_1 + v_2 = v = w_1 + w_2.$$



Exemple

Soit $E = M_2(K)$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 et

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in K \right\} \qquad G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : a, c, d \in K \right\}.$$

Pour chaque matrice dans $M_2(K)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$F + G = M_2(K).$$

Exemple

Soit $E = M_2(K)$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 et

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in K \right\} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : a, c, d \in K \right\}.$$

Pour chaque matrice dans $M_2(K)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2a & b \\ 0 & 2/3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2a & 0 \\ c & 1/3d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors

$$F + G = M_2(K).$$

Sommes directs

Définition

Soient $E_1 \subseteq E$ et $E_2 \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels et soit $E_{12} = E_1 + E_2$.

Si tout élément $v \in E_{12}$ s'écrit **uniquement** comme

$$v = v_1 + v_2 \quad v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$$

alors on dit que E_{12} est **somme directe** de E_1 et E_2 . Dans ce cas, on note

$$E_{12} = E_1 \oplus E_2.$$

Sommes directes

Définition

Soient $E_1 \subseteq E$ et $E_2 \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels et soit $E_{12} = E_1 + E_2$.

Si tout élément $v \in E_{12}$ s'écrit **uniquement** comme

$$v = v_1 + v_2 \quad v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$$

alors on dit que E_{12} est **somme directe** de E_1 et E_2 . Dans ce cas, on note

$$E_{12} = E_1 \oplus E_2.$$

Proposition (Grifone, Prop. 1.23)

Soient $E_1 \subseteq E$, $E_2 \subseteq E$ des sous-espaces vectoriels et soit $E_{12} = E_1 + E_2$. Alors :

$$E_{12} = E_1 \oplus E_2 \quad \Longleftrightarrow \quad E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}_E\}.$$

Sous-espaces supplémentaires

Définition

On dit que deux sous-espaces vectoriels $E_1 \subseteq E$ et $E_2 \subseteq E$ sont **supplémentaires** (ou que E_2 est **un supplémentaire** de E_1) si

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

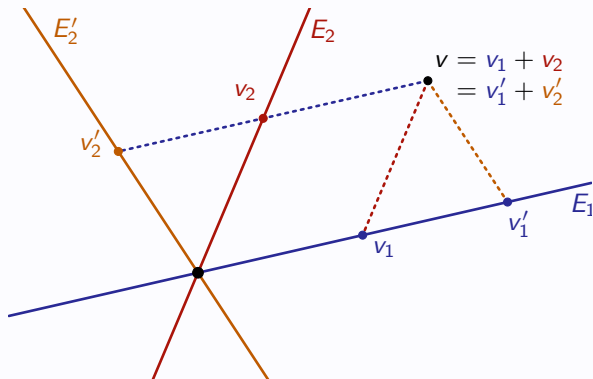
Autrement dit :

- $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}_E\}$ **et**
- tout $v \in E$ est une somme d'éléments $v_1 \in E_1$ et $v_2 \in E_2$.

Sous-espaces supplémentaires

Soit $E_1 \subseteq E$ un sous-espace vectoriel.

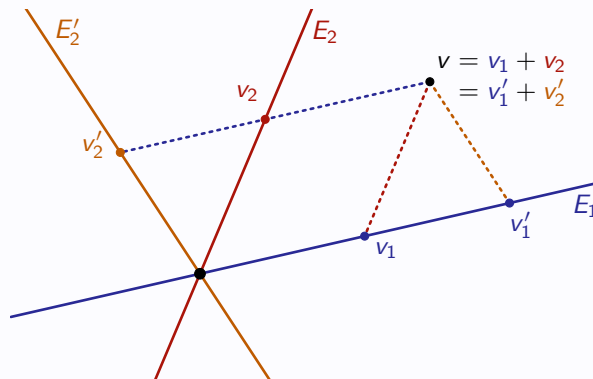
Il existe typiquement **plusieurs** sous-espaces supplémentaires, c'est pourquoi on parle d'**un** supplémentaire.



Sous-espaces supplémentaires

Soit $E_1 \subseteq E$ un sous-espace vectoriel.

Il existe typiquement **plusieurs** sous-espaces supplémentaires, c'est pourquoi on parle d'**un** supplémentaire.



Question : pour tout sous-espace vectoriel $E_1 \subseteq E$, existe-t-il (au moins) un sous-espace supplémentaire, c.-à-d. un $E_2 \subseteq E$ tel que

$$E = E_1 \oplus E_2?$$

Somme et somme directe de plusieurs sous-espaces

Definition

Soient $E_1, \dots, E_n \subseteq E$ des sous-espaces vectoriel. Leur **somme** est le sous-espace vectoriel

$$F = E_1 + \dots + E_n = \left\{ x \in E : x = v_1 + \dots + v_n \text{ avec } v_1 \in E_1, \dots, v_n \in E_n \right\}.$$

Si tout vecteur $v \in F$ se décompose **uniquement** en somme

$$v = v_1 + \dots + v_n \quad \text{avec } v_i \in E_i$$

alors on dit que F est **somme directe** des E_i et on note

$$F = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n.$$

Somme et somme directe de plusieurs sous-espaces

Definition

Soient $E_1, \dots, E_n \subseteq E$ des sous-espaces vectoriel. Leur **somme** est le sous-espace vectoriel

$$F = E_1 + \dots + E_n = \left\{ x \in E : x = v_1 + \dots + v_n \text{ avec } v_1 \in E_1, \dots, v_n \in E_n \right\}.$$

Si tout vecteur $v \in F$ se décompose **uniquement** en somme

$$v = v_1 + \dots + v_n \quad \text{avec } v_i \in E_i$$

alors on dit que F est **somme directe** des E_i et on note

$$F = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n.$$

Exemple : $M_3(K) = D \oplus U \oplus L$ avec

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \right\} \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$