

Algèbre linéaire 2

Enseignant : Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Pourquoi l'algèbre linéaire ?

Pourquoi l'algèbre linéaire ?

- **Motivation 1** : car des équations non linéaires sont trop difficiles !

Pourquoi l'algèbre linéaire ?

- **Motivation 1** : car des équations non linéaires sont trop difficiles !
- **Motivation 2** : résoudre des équations de type “linéaire” :

(1) Trouver tous les triplets $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

(2) Trouver toutes les suites (x_1, x_2, \dots) telles que

$$x_{n+3} = 4x_n + 2x_{n+1} - x_{n+2}.$$

(3) Soit $E \in \mathbb{R}$ un “niveau d'énergie”.

Trouver toutes les applications lisses $\Psi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Psi''(x) + \frac{1}{|x|}\Psi(x) = E \cdot \Psi(x).$$

Pourquoi l'algèbre linéaire ?

- **Motivation 1** : car des équations non linéaires sont trop difficiles !
- **Motivation 2** : résoudre des équations de type “linéaire” :

(1) Trouver tous les triplets $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

(2) Trouver toutes les suites (x_1, x_2, \dots) telles que

$$x_{n+3} = 4x_n + 2x_{n+1} - x_{n+2}.$$

(3) Soit $E \in \mathbb{R}$ un “niveau d'énergie”.

Trouver toutes les applications lisses $\Psi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Psi''(x) + \frac{1}{|x|}\Psi(x) = E \cdot \Psi(x).$$

- **Motivation 3** : faire de la géométrie.

→ dimension, projection orthogonale, intersection des plans, ...

Objectifs du module

Cinq chapitres :

- (1) Espaces vectoriels.
- (2) Applications linéaires.
- (3) Applications linéaires en dimension finie.
- (4) La matrice d'une application linéaire.
- (5) Réduction des endomorphismes.

Fonctionnement de l'UE

- Toutes les infos sur **Moodle** :
<https://moodle.univ-tlse3.fr/course/view.php?id=5998>
- **Livre** : J. Grifone, *Algèbre linéaire* (éd. ≤ 6).

4^{me} édition disponible sur Moodle !

- **Modalités de contrôle** :
 - **CC1** (20%) : note TD
→ des DM quasi-hebdomadaires (détails sur Moodle)
 - **CC2** (40%) : épreuve écrit d'1h30 mi-semestre.
 - **CC3** (40%) : épreuve écrit d'1h30 fin du semestre
 - **CC4/Récap.** début janvier

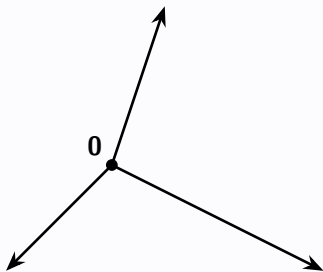
Note finale = $0,2 \cdot \max(\mathbf{1}, \mathbf{4}) + 0,4 \cdot \max(\mathbf{2}, \mathbf{4}) + 0,4 \cdot \max(\mathbf{3}, \mathbf{4})$.

Chapitre 1. Espaces vectoriels

Référence : Grifone, §1.1-1.2

Protagonistes de l'algèbre linéaire : **vecteurs**.

Représentation graphique :

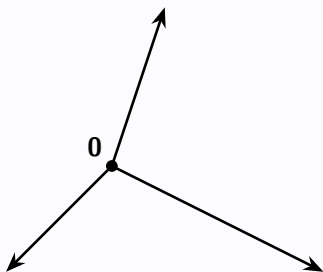


Chapitre 1. Espaces vectoriels

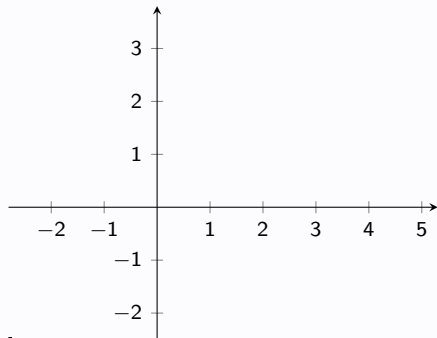
Référence : Grifone, §1.1-1.2

Protagonistes de l'algèbre linéaire : **vecteurs**.

Représentation graphique :



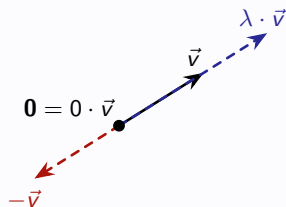
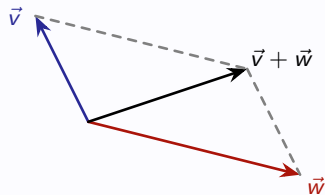
Description par coordonnées :



Opérations fondamentales sur les vecteurs

On sait **additionner** des vecteurs et **changer** leur longueur ou sens.

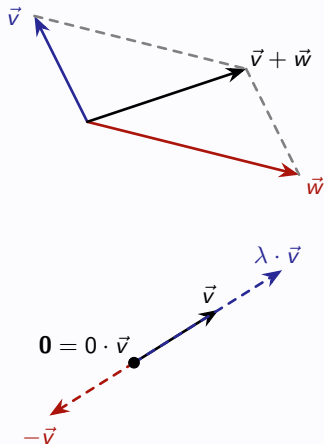
Représentation graphique :



Opérations fondamentales sur les vecteurs

On sait **additionner** des vecteurs et **changer leur longueur ou sens**.

Représentation graphique :



Description par coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

“Méthode axiomatique”

Approche :

- Étudier des contextes “linéaires” généraux où :
 - (A) on peut prendre la somme de deux éléments.
 - (B) on peut changer l'échelle d'un élément (“homothétie”).

“Méthode axiomatique”

Approche :

- Étudier des contextes “linéaires” généraux où :
 - (A) on peut prendre la somme de deux éléments.
 - (B) on peut changer l'échelle d'un élément (“homothétie”).
- (A+B) on peut prendre des combinaisons linéaires des éléments :

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n$$

sans avoir à mettre des parenthèses (on sait comment les développer) !

- Dédire des propositions qui s'appliquent dans toutes ces situations.

Espaces vectoriels abstraits

Définition

Un **espace vectoriel sur \mathbb{R}** est un ensemble E sur lequel on définit deux opérations :

(A) une application $E \times E \longrightarrow E$ appelée **l'addition** et notée $u + v$, telle que :

$$(A.1) \quad (u + v) + w = u + (v + w) \qquad \forall u, v, w \in E \qquad (\text{associativité})$$

$$(A.2) \quad u + v = v + u \qquad \forall u, v \in E \qquad (\text{commutativité})$$

$$(A.3) \quad \text{il existe un élément neutre } 0_E \in E, \text{ tel que } 0_E + u = u \qquad \forall u \in E$$

$$(A.4) \quad \forall v \in E, \text{ il existe un élément opposé noté } (-v) \in E \text{ t.q.}$$

$$v + (-v) = 0_E.$$

Espaces vectoriels abstraits

Définition

Un **espace vectoriel sur \mathbb{R}** est un ensemble E sur lequel on définit deux opérations :

(A) une application $E \times E \longrightarrow E$ appelée **l'addition** et notée $u + v$, telle que :

$$(A.1) \quad (u + v) + w = u + (v + w) \qquad \forall u, v, w \in E \qquad \text{(associativité)}$$

$$(A.2) \quad u + v = v + u \qquad \forall u, v \in E \qquad \text{(commutativité)}$$

$$(A.3) \quad \text{il existe un élément neutre } 0_E \in E, \text{ tel que } 0_E + u = u \qquad \forall u \in E$$

$$(A.4) \quad \forall v \in E, \text{ il existe un élément opposé noté } (-v) \in E \text{ t.q.}$$

$$v + (-v) = 0_E.$$

(B) une application $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$, appelée **multiplication par un scalaire**, telle que :

$$(B.1) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in E$$

$$(B.2) \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in E \qquad \text{(distributivité)}$$

$$(B.3) \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, u, v \in E \qquad \text{(distributivité)}$$

$$(B.4) \quad 1 \cdot v = v \qquad \forall v \in E$$

On appelle un élément $v \in E$ un **vecteur** et $\lambda \in \mathbb{R}$ un **scalaire**.

Espaces vectoriels abstraits

Convention : on note $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition

Un **espace vectoriel sur K** est un ensemble E sur lequel on définit deux opérations :

(A) une application $E \times E \longrightarrow E$ appelée **l'addition** et notée $u + v$, telle que :

$$(A.1) \quad (u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in E \quad (\text{associativité})$$

$$(A.2) \quad u + v = v + u \quad \forall u, v \in E \quad (\text{commutativité})$$

$$(A.3) \quad \text{il existe un élément neutre } 0_E \in E, \text{ tel que } 0_E + u = u \quad \forall u \in E$$

$$(A.4) \quad \forall v \in E, \text{ il existe un élément opposé noté } (-v) \in E \text{ t.q.}$$

$$v + (-v) = 0_E.$$

(B) une application $K \times E \longrightarrow E$, appelée **multiplication par un scalaire**, telle que :

$$(B.1) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in K, v \in E$$

$$(B.2) \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \quad \forall \lambda, \mu \in K, v \in E \quad (\text{distributivité})$$

$$(B.3) \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall \lambda \in K, u, v \in E \quad (\text{distributivité})$$

$$(B.4) \quad 1 \cdot v = v \quad \forall v \in E$$

On appelle un élément $v \in E$ un **vecteur** et $\lambda \in K$ un **scalaire**.

Exemples

(1) $E = K^n$ est un espace vectoriel sur K pour les lois suivantes :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

(2) L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynômiales est un espace vectoriel sur \mathbb{R} pour :

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k \\ \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) x^k$$

(où toute somme a un nombre *fini* de termes non nuls).

De même : l'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré $\leq n$.

Plus d'exemples

(3) L'ensemble $M_2(K)$ des matrices 2×2 est un espace vectoriel sur K pour

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

(4) L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites dans \mathbb{R} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} pour :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) \\ \lambda(x_1, x_2, \dots) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots). \end{aligned}$$

Plus d'exemples

(3) L'ensemble $M_2(K)$ des matrices 2×2 est un espace vectoriel sur K pour

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

(4) L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites dans \mathbb{R} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} pour :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) \\ \lambda(x_1, x_2, \dots) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots). \end{aligned}$$

(5) Si S est un ensemble quelconque, l'ensemble des applications $f: S \longrightarrow K$ est un espace vectoriel sur K pour :

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s) \qquad (\lambda f)(s) = \lambda f(s).$$

Thème commun : les axiomes sont vérifiés grâce à la loi distributive $(a + b)c = ac + bc$ dans K .

Propriétés de base

Proposition (Grifone Prop. 1.2)

Soit E un K -espace vectoriel. Alors :

- (1) Il existe un *unique* élément $\mathbf{0}_E \in E$ tel que $\mathbf{0}_E + u = u$ pour tout $u \in E$.
- (2) Pour tout $v \in E$, il existe un *unique* élément $(-v) \in E$ tel que $v + (-v) = \mathbf{0}_E$.
- (3) (Exo 3.1) Pour tout $\lambda \in K$: $\lambda \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$.
- (4) (Exo 3.2) Pour tout $v \in K$: $0 \cdot v = \mathbf{0}_E$.
- (5) (Exo 3.3) Pour tout $\lambda \in K$ et $v \in E$: $\lambda \cdot (-v) = (-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$.

Démonstration :

- (1) Soient $\mathbf{0}_E$ et $\tilde{\mathbf{0}}_E$ deux éléments neutres. Alors $\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E + \tilde{\mathbf{0}}_E = \tilde{\mathbf{0}}_E$ et donc l'élément neutre est unique.
- (2) Soit $v \in E$ et soient $w, \tilde{w} \in E$ tels que $v + w = \mathbf{0}_E = v + \tilde{w}$. Alors :

$$\tilde{w} = \tilde{w} + \mathbf{0}_E = \tilde{w} + (v + w) = (\tilde{w} + v) + \tilde{w} = \mathbf{0}_E + w = w.$$

Il existe donc un unique élément opposé.